

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列  
全国十二大考研辅导机构指定用书

# 分阶习题 同步训练

数学一

主 编 © 李永乐 王式安 季文铎

编 委 © 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

本习题集将每章习题，按难度分为三类  
分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练



ISBN 978-7-5150-1052-6



9 787515 010526 >

定价：58.00元

书

997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列  
全国十二大考研辅导机构指定用书

# 分阶习题 同步训练

数学一

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编 委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

北方工业大学图书馆

国家行政学院出版社

# 说 明

本习题集将每章习题,按难度分为三类,分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。题型包括选择题、填空题和解答题。选择题均为单项选择题,只有一个最适合的选项。解答题要求写出解题步骤、过程和必要的说明。

## 基础单项训练

此类题难度较低,属于菜鸟级。题目内容都是所在章节的基本概念、定理和方法的简单重现。为熟悉所学内容而进行的必要练习。

## 基础综合训练

所在章节的综合练习题,题目涉及的知识点不再是单个的概念,具有一定的综合性,条件设置较隐蔽,需要进行一定探索研究才能得到结果。增加练习的效果。

## 思维拓展训练

此类题目具有难度和综合性,目的是使学生的数学知识转化成思维模式上来。让学生随着练习逐步深化、拓展知识结构。这类题,结合前后章节的知识,具有开放性,解题方法不统一,变换一些条件就会转化成新的题目。需要学生积极思考,能从不同方法中寻求解题最佳方法。

尽管我们为以上所有的习题都配了答案,但希望同学不要被所提供的答案束缚,积极思考,尽量通过自己的思考得出答案。顺便提一下,如果你被菜鸟题虐的很惨。请记住,不是你不够聪明,而是老师出的题太刁钻。

# 目录



## 第一篇 高等数学

|                       |      |
|-----------------------|------|
| 第一章 函数 极限 连续 .....    | (1)  |
| 基础单项训练 .....          | (1)  |
| 基础综合训练 .....          | (2)  |
| 思维拓展训练 .....          | (4)  |
| 第二章 一元函数微分学 .....     | (6)  |
| 基础单项训练 .....          | (6)  |
| 基础综合训练 .....          | (7)  |
| 思维拓展训练 .....          | (11) |
| 第三章 一元函数积分学 .....     | (14) |
| 基础单项训练 .....          | (14) |
| 基础综合训练 .....          | (16) |
| 思维拓展训练 .....          | (19) |
| 第四章 向量代数与空间解析几何 ..... | (23) |
| 基础单项训练 .....          | (23) |
| 基础综合训练 .....          | (24) |
| 思维拓展训练 .....          | (26) |
| 第五章 多元函数微分学 .....     | (27) |
| 基础单项训练 .....          | (27) |
| 基础综合训练 .....          | (29) |
| 思维拓展训练 .....          | (32) |
| 第六章 多元函数积分学 .....     | (35) |
| 基础单项训练 .....          | (35) |
| 基础综合训练 .....          | (39) |
| 思维拓展训练 .....          | (43) |
| 第七章 无穷级数 .....        | (46) |
| 基础单项训练 .....          | (46) |

|                |      |
|----------------|------|
| 基础综合训练 .....   | (48) |
| 思维拓展训练 .....   | (51) |
| 第八章 微分方程 ..... | (52) |
| 基础单项训练 .....   | (52) |
| 基础综合训练 .....   | (53) |
| 思维拓展训练 .....   | (54) |

## 第二篇 线性代数

|                         |      |
|-------------------------|------|
| 第一章 行列式 .....           | (56) |
| 基础单项训练 .....            | (56) |
| 基础综合训练 .....            | (56) |
| 思维拓展训练 .....            | (57) |
| 第二章 矩 阵 .....           | (58) |
| 基础单项训练 .....            | (58) |
| 基础综合训练 .....            | (58) |
| 思维拓展训练 .....            | (59) |
| 第三章 向 量 .....           | (60) |
| 基础单项训练 .....            | (60) |
| 基础综合训练 .....            | (61) |
| 思维拓展训练 .....            | (62) |
| 第四章 线性方程组 .....         | (63) |
| 基础单项训练 .....            | (63) |
| 基础综合训练 .....            | (64) |
| 思维拓展训练 .....            | (66) |
| 第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 ..... | (67) |
| 基础单项训练 .....            | (67) |
| 基础综合训练 .....            | (68) |

|                      |      |
|----------------------|------|
| 思维拓展训练 .....         | (69) |
| <b>第六章 二次型</b> ..... | (71) |
| 基础单项训练 .....         | (71) |
| 基础综合训练 .....         | (72) |
| 思维拓展训练 .....         | (74) |

### 第三篇 概率论与数理统计

|                              |      |
|------------------------------|------|
| <b>第一章 随机事件和概率</b> .....     | (75) |
| 基础单项训练 .....                 | (75) |
| 基础综合训练 .....                 | (75) |
| 思维拓展训练 .....                 | (76) |
| <b>第二章 随机变量及其概率分布</b> .....  | (78) |
| 基础单项训练 .....                 | (78) |
| 基础综合训练 .....                 | (79) |
| 思维拓展训练 .....                 | (80) |
| <b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....  | (81) |
| 基础单项训练 .....                 | (81) |
| 基础综合训练 .....                 | (82) |
| 思维拓展训练 .....                 | (83) |
| <b>第四章 随机变量的数字特征</b> .....   | (85) |
| 基础单项训练 .....                 | (85) |
| 基础综合训练 .....                 | (85) |
| 思维拓展训练 .....                 | (86) |
| <b>第五章 大数定律和中心极限定理</b> ..... | (88) |
| 基础单项训练 .....                 | (88) |
| 基础综合训练 .....                 | (88) |
| 思维拓展训练 .....                 | (89) |
| <b>第六章 数理统计的基本概念</b> .....   | (90) |
| 基础单项训练 .....                 | (90) |
| 基础综合训练 .....                 | (90) |
| 思维拓展训练 .....                 | (92) |
| <b>第七章 参数估计</b> .....        | (93) |
| 基础单项训练 .....                 | (93) |
| 基础综合训练 .....                 | (93) |
| 思维拓展训练 .....                 | (95) |
| <b>第八章 假设检验</b> .....        | (96) |

|              |      |
|--------------|------|
| 基础单项训练 ..... | (96) |
| 基础综合训练 ..... | (96) |
| 思维拓展训练 ..... | (97) |

### 习题参考答案与解析

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| <b>第一篇 高等数学</b> .....        | (98)  |
| <b>第一章 函数 极限 连续</b> .....    | (98)  |
| 基础单项训练 .....                 | (98)  |
| 基础综合训练 .....                 | (100) |
| 思维拓展训练 .....                 | (102) |
| <b>第二章 一元函数微分学</b> .....     | (104) |
| 基础单项训练 .....                 | (104) |
| 基础综合训练 .....                 | (107) |
| 思维拓展训练 .....                 | (109) |
| <b>第三章 一元函数积分学</b> .....     | (112) |
| 基础单项训练 .....                 | (112) |
| 基础综合训练 .....                 | (114) |
| 思维拓展训练 .....                 | (118) |
| <b>第四章 向量代数与空间解析几何</b> ..... | (122) |
| 基础单项训练 .....                 | (122) |
| 基础综合训练 .....                 | (122) |
| 思维拓展训练 .....                 | (123) |
| <b>第五章 多元函数微分学</b> .....     | (124) |
| 基础单项训练 .....                 | (124) |
| 基础综合训练 .....                 | (125) |
| 思维拓展训练 .....                 | (127) |
| <b>第六章 多元函数积分学</b> .....     | (130) |
| 基础单项训练 .....                 | (130) |
| 基础综合训练 .....                 | (133) |
| 思维拓展训练 .....                 | (136) |
| <b>第七章 无穷级数</b> .....        | (138) |
| 基础单项训练 .....                 | (138) |
| 基础综合训练 .....                 | (139) |
| 思维拓展训练 .....                 | (142) |
| <b>第八章 微分方程</b> .....        | (144) |
| 基础单项训练 .....                 | (144) |
| 基础综合训练 .....                 | (145) |

|                                |       |                              |       |
|--------------------------------|-------|------------------------------|-------|
| 思维拓展训练 .....                   | (147) | 思维拓展训练 .....                 | (170) |
| <b>第二篇 线性代数</b> .....          | (150) | <b>第二章 随机变量及其概率分布</b> .....  | (172) |
| <b>第一章 行列式</b> .....           | (150) | 基础单项训练 .....                 | (172) |
| 基础单项训练 .....                   | (150) | 基础综合训练 .....                 | (173) |
| 基础综合训练 .....                   | (150) | 思维拓展训练 .....                 | (174) |
| 思维拓展训练 .....                   | (151) | <b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....  | (177) |
| <b>第二章 矩阵</b> .....            | (152) | 基础单项训练 .....                 | (177) |
| 基础单项训练 .....                   | (152) | 基础综合训练 .....                 | (179) |
| 基础综合训练 .....                   | (152) | 思维拓展训练 .....                 | (181) |
| 思维拓展训练 .....                   | (154) | <b>第四章 随机变量的数字特征</b> .....   | (184) |
| <b>第三章 向量</b> .....            | (155) | 基础单项训练 .....                 | (184) |
| 基础单项训练 .....                   | (155) | 基础综合训练 .....                 | (184) |
| 基础综合训练 .....                   | (155) | 思维拓展训练 .....                 | (187) |
| 思维拓展训练 .....                   | (156) | <b>第五章 大数定律和中心极限定理</b> ..... | (190) |
| <b>第四章 线性方程组</b> .....         | (158) | 基础单项训练 .....                 | (190) |
| 基础单项训练 .....                   | (158) | 基础综合训练 .....                 | (190) |
| 基础综合训练 .....                   | (158) | 思维拓展训练 .....                 | (191) |
| 思维拓展训练 .....                   | (158) | <b>第六章 数理统计的基本概念</b> .....   | (193) |
| <b>第五章 特征值、特征向量、相似矩阵</b> ..... | (160) | 基础单项训练 .....                 | (193) |
| 基础单项训练 .....                   | (160) | 基础综合训练 .....                 | (193) |
| 基础综合训练 .....                   | (160) | 思维拓展训练 .....                 | (195) |
| 思维拓展训练 .....                   | (161) | <b>第七章 参数估计</b> .....        | (197) |
| <b>第六章 二次型</b> .....           | (164) | 基础单项训练 .....                 | (197) |
| 基础单项训练 .....                   | (164) | 基础综合训练 .....                 | (198) |
| 基础综合训练 .....                   | (164) | 思维拓展训练 .....                 | (199) |
| 思维拓展训练 .....                   | (165) | <b>第八章 假设检验</b> .....        | (201) |
| <b>第三篇 概率论与数理统计</b> .....      | (167) | 基础单项训练 .....                 | (201) |
| <b>第一章 随机事件和概率</b> .....       | (167) | 基础综合训练 .....                 | (201) |
| 基础单项训练 .....                   | (167) | 思维拓展训练 .....                 | (202) |
| 基础综合训练 .....                   | (168) |                              |       |

## 第一篇 高等数学

## 第一章 函数 极限 连续

## 基础单项训练

难度: ★ ☆

通关称号: 菜鸟

1. 设  $f(x) = \frac{(1 - \cos x)(x^3 + x + 1)}{x^3 + x^2}$ , 则
- (A) 存在  $\delta > 0$  及  $X > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内有界, 在  $(X, +\infty)$  内无界.  
 (B) 存在  $\delta > 0$  及  $X > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内无界, 在  $(X, +\infty)$  内有界.  
 (C) 对任意  $X > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, X)$  内有界, 在  $(X, +\infty)$  内无界.  
 (D)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界.
2. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  不存在, 则
- (A)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  必不存在. (B)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  必存在.  
 (C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  必不存在. (D)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  必存在.
3. 下列命题
- ① 设  $|f(x)|$  在  $x = x_0$  连续, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  必连续.  
 ② 设  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  必连续.  
 ③ 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续,  $g(x)$  在  $x = x_0$  不连续, 则  $f(x)g(x)$  在  $x = x_0$  必不连续.  
 ④ 设  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x = x_0$  都不连续, 则  $f(x) + g(x)$  在  $x = x_0$  必不连续.
- 其中正确的命题个数为
- (A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 至少 3 个.
4. 设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  与  $g(x)$  均为  $(x - x_0)$  的同阶无穷小, 则
- (A)  $f(x) - g(x)$  必是  $x - x_0$  的同阶无穷小. (B)  $f(x) - g(x)$  必是  $x - x_0$  的高阶无穷小.  
 (C)  $f(x)g(x)$  必是  $x - x_0$  的高阶无穷小. (D)  $f(x)g(x)$  必是  $x - x_0$  的同阶无穷小.
5. 设  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{\ln x} - e^x$  与  $x^n$  是同阶无穷小, 则  $n$  为
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
6. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \\ 1, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$ , 则在点  $x = 0$  处有间断点的函数是
- (A)  $\max\{f(x), g(x)\}$ . (B)  $\min\{f(x), g(x)\}$ .  
 (C)  $f(x) - g(x)$ . (D)  $f(x) + g(x)$ .
7. 函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$
- (A) 不存在间断点. (B) 存在间断点  $x = 1$ .  
 (C) 存在间断点  $x = 0$ . (D) 存在间断点  $x = -1$ .
8. 设  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$ , 则  $f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x+1}{3x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x}$ .

**基础综合训练**

难度: ★★☆☆

通关称号: 小达人

1. 下述命题正确的是

- (A) 设  $f(x)$  与  $g(x)$  均在  $x_0$  处不连续, 则  $f(x)g(x)$  在  $x_0$  处必不连续.
- (B) 设  $g(x)$  在  $x_0$  处连续,  $f(x_0) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .
- (C) 设在  $x = x_0$  的去心左邻域内  $f(x) < g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$ , 则必有  $a < b$ .
- (D) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$ ,  $a < b$ , 则必存在  $x = x_0$  的去心左邻域, 使  $f(x) < g(x)$ .

2. 设  $f(x)$  为当  $x \neq 0$  时  $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ , 且  $f(0) = -1$ , 则

- (A) 有可去间断点.
- (B) 有跳跃间断点.
- (C) 有无穷间断点.
- (D) 连续.

3. 在区间  $[0, 1]$  上函数  $f(x) = nx(1-x)^n$  的最大值记为  $M(n)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $y = y(x)$  满足  $y'' + (x-1)y' + x^2y = e^x$  且  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^2 \arctan(nx) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 设  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}$ , 则  $f(x)$  有间断点  $x = \underline{\hspace{1cm}}$ , 是  $\underline{\hspace{1cm}}$  型, 间断点  $x = \underline{\hspace{1cm}}$ , 是  $\underline{\hspace{1cm}}$  型.

8. 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2} - 1}$ .

9. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos 3x}{e^x - 1 - x}$ .



10. 求  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ .

11. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{x} + \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$ .

12. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right]$ .

13. 设  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

14. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)}$ .

15. 设对任意  $x$  和  $y$ , 函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . 试证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

## 思维拓展训练

难度：★★★★

通关称号：小牛人

1. 设  $f(x) = \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ ,  $a_i > 0, a_i \neq 1, i = 1, 2, \dots, n; n \geq 2$  为确定的整数. 求

①  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;      ②  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;      ③  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

2. 已知常数  $a > 0, b \neq 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt[3]{1+bx} - 2}{x^2} = -\frac{3}{2}$ , 求  $a$  与  $b$ .

3. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) - 1 - ax}{x^4}$  存在, 求常数  $a, b, c$  的值, 并求此极限值.

4. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x^2} - 1} = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

5. 设当  $0 < x \leq 1$  时  $f(x) = x^{\sin x}$ , 对于其它  $x$ ,  $f(x)$  满足  $f(x) + k = 2f(x+1)$ , 求常数  $k$  使  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

6. 设  $x_1 > 0, x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限值.

7. 设常数  $a \neq -1, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$ , 讨论  $a$  的取值, 确定  $f(x)$  的间断点及其类型.

8. 设  $f(x)$  是周期为 2 的连续函数, 证明: 方程  $f(x) - f(x-1) = 0$  在任何一个长度为 1 的闭区间  $[a, a+1]$  上至少有一个实根.

## 第二章 一元函数微分学

基础单项训练

难度：☆☆

通关称号：菜鸟

1. 设  $f(x)$  连续,  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x-t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} =$
- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $\frac{1}{3}$ . (C)  $\frac{1}{4}$ . (D)  $\frac{1}{5}$ .
2. 设  $f(x)$  满足  $f''(x) + x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ , 且  $f'(0) = 0$ . 则
- (A)  $x = 0$  是  $f(x)$  的极小值点.  
 (B)  $x = 0$  是  $f(x)$  的极大值点.  
 (C) 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  左侧邻近是凹的, 右侧邻近是凸的.  
 (D) 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  左侧邻近是凸的, 右侧邻近是凹的.
3. 曲线  $y = \frac{1+x}{1-e^{-x}}$  有渐近线
- (A) 0 条. (B) 1 条. (C) 2 条. (D) 3 条.
4. 下述论断正确的是
- (A) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 除  $x = 0$  外均可导, 且  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是严格单调增加的.  
 (B) 设  $f(x)$  为偶函数且  $x = 0$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $f'(0) = 0$ .  
 (C) 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处二阶导数存在, 且  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x = x_0$  是  $f(x)$  的极小值点.  
 (D) 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处三阶导数存在, 且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , 则  $x = x_0$  一定不是  $f(x)$  的极值点.
5. 设函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处二阶导数存在, 且  $f''(x_0) < 0, f'(x_0) = 0$ , 则必存在  $\delta > 0$ , 使得
- (A) 曲线  $y = f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上是凸的.  
 (B) 曲线  $y = f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上是凹的.  
 (C) 函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0]$  是严格单调增, 在区间  $[x_0, x_0 + \delta)$  是严格单调减.  
 (D) 函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0]$  是严格单调减, 在区间  $[x_0, x_0 + \delta)$  是严格单调增.
6. 设  $f(x)$  二阶导数存在, 下述结论正确的是
- (A) 若  $f(x)$  只有 2 个零点, 则  $f''(x)$  必定没有零点.  
 (B) 若  $f''(x)$  至少有 1 个零点, 则  $f(x)$  必至少有 3 个零点.  
 (C) 若  $f(x)$  没有零点, 则  $f''(x)$  至多有 2 个零点.  
 (D) 若  $f''(x)$  没有零点, 则  $f(x)$  至多有 2 个零点.
7. 下述命题
- ① 设  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$  均存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处必连续.  
 ② 设  $f'_-(x_0)$  与  $f'_+(x_0)$  均存在, 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处必连续.  
 ③ 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  存在等于  $A$ , 则  $f'(x_0)$  存在等于  $A$ .  
 ④ 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  的某邻域可导, 且  $f'(x_0) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  存在等于  $A$ .
- 则正确的是
- (A) ① 与 ②. (B) ③ 与 ④. (C) ② 与 ③. (D) ① 与 ④.
8.  $f(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} |x^3 - x|$  的不可导的点的个数为
- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ . 则下述命题不正确的是
- (A) 至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使  $f(x_0) > f(a)$ .  
 (B) 至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使  $f(x_0) > f(b)$ .  
 (C) 至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使  $f'(x_0) = 0$ .  
 (D) 至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使  $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ .
10. 设  $x = \int_0^t 2e^{-s^2} ds, y = \int_0^t \sin(t-s)^2 ds$ , 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\pi}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
11. 设  $f''(a)$  存在,  $f'(a) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f(x)-f(a)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
12. 设曲线  $y = ax^2 + bx + c$  与曲线  $\begin{cases} x = \frac{4}{\pi} \arctan t \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$  在  $t = 1$  处相切并有相同的曲率圆, 则常数  $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
13. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = A (A \neq 0)$ , 则  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}, f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
14. 椭圆  $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4y = 0$  与直线  $x + y - 6 = 0$  之间的最短距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
15. 曲线  $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$  的渐近线方程为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$  及  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .
16. 设  $y = y(x)$  由  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  确定, 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
17. 设  $f(u)$  连续,  $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^{x^2} tf(x^2 - t)dt$ , 并设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n}$  存在且不为零, 求  $n$  及此极限值.

## 基础综合训练

难度: ★★☆☆

通关称号: 小达人

## 1. 下列 4 个命题

- ① 若  $f(x)$  在  $x = a$  处连续, 且  $|f(x)|$  在  $x = a$  处可导, 则  $f(x)$  在  $x = a$  处必可导.  
 ② 设  $\varphi(x)$  在  $x = a$  的某邻域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$  存在, 则  $f(x) = (x-a)\varphi(x)$  在  $x = a$  处必可导.  
 ③ 设  $\varphi(x)$  在  $x = a$  的某邻域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$  存在, 则  $f(x) = |x-a|\varphi(x)$  在  $x = a$  处可导.  
 ④ 若  $f(x)$  在  $x = a$  的某邻域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$  存在, 则  $f(x)$  在  $x = a$  处必可导.

正确的命题为

- (A) ① 与 ②.                      (B) ③ 与 ④.                      (C) ① 与 ③.                      (D) ② 与 ④.

2. 设函数  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界且可导, 则

- (A) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .    (B) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .  
 (C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ .    (D) 当  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ .

3. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内存在二阶导数, 且  $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = a, a > 0$ , 则

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值.

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值.

(C) 在点  $(0, f(0))$  的左侧邻近, 曲线  $y = f(x)$  是凹的, 右侧邻近是凸的.

(D) 在点  $(0, f(0))$  的左侧邻近, 曲线  $y = f(x)$  是凸的, 右侧邻近是凹的.

4. 设  $f(x) = x^2 \sin ax, a > 0$ , 则对于  $n \geq 1, f^{(2n+1)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $f(x)$  有任意阶导数, 且  $f'(x) = [f(x)]^2, f(0) = 2, n \geq 2$ , 则  $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 在曲线  $y = 1 - x^2$  上在第一象限内的点作该曲线的切线, 使该切线与两坐标轴围成的三角形面积为最小, 求切点坐标.

7. 在极坐标曲线  $r = e^\theta$  的  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  范围内曲线上找一点, 使经过它的切线与  $x$  轴、 $y$  轴的正向所围成的三角形的面积为最小, 并求出此面积的值.

8. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(x) > 0$ . 在曲线  $y = f(x)$  上任意一点  $(x, f(x))$  ( $x \neq 0$ ) 处作此曲线的切线, 交  $x$  轴于点  $(u, 0)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(u)}{uf(x)}$ .

9. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有定义, 且对于任意  $x \in (0, +\infty), y \in (0, +\infty)$  有  $f(xy) = f(x) + f(y) + (x-1)(y-1)$ , 又  $f'(1) = a \neq 1$ . 证明对任意  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f'(x)$  存在并求之.

10. 设  $b > a > 0$ , 证明:  $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$ .

11. 证明: 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ , 且仅当  $x = 1$  时成立等号.

12. 设  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内存在二阶导数, 且  $f''(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , 证明: 当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时,  $f(x) \leq 2x$ , 且仅在  $x = 0$  时成立等号.

13. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内存在二阶导数, 且  $f''(x) < 0$ ,  $f(0) = 0$ . 证明: 对任意  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , 有  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ .

14. 设  $x > 0$ , 证明:  $(x-4)e^{\frac{x}{2}} - (x-2)e^x + 2 < 0$ .

15. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内可导, 且  $f(0) < 0$ ,  $f'(x) \geq k > 0$ . 试证明存在唯一的  $\xi \in (0, +\infty)$  使  $f(\xi) = 0$ .

16. 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)} \arctan x dx = \frac{1}{2}$ ,  $f(1) = 0$ , 试证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使  $(1 + \xi^2) \arctan \xi \cdot f'(\xi) = -1$ .



17. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在一阶导数, 在  $(a, b)$  内存在二阶导数, 且  $f(a) = f(b)$ ,  $f'(a)f'(b) > 0$ . 试证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使  $f''(\xi) = 0$ .

## 思维拓展训练

难度: ★★★★★

通关称号: 小牛人

1. 设  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上存在二阶导数,  $f(0) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ . 试证明: (1) 在  $(-\infty, +\infty)$  上  $f(x)$  至多有两个零点, 至少有一个零点; (2) 若的确有两个零点  $x_1$  与  $x_2$ , 则  $x_1 x_2 < 0$ .

2. 讨论当  $x > 0$  时, 方程  $kx + \frac{1}{x^2} = 1$  的根的个数.

3. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内存在二阶导数, 且与某直线至少交于 3 个点. 试证明, 至少存在一点  $\xi$  使  $f''(\xi) = 0$ .