线性代数与空间解析几何

XIANXING DAISHU
YU KONGJIAN JIEXI JIHE

（第三版）

韩流冰　叶建军
何瑞文　秦应兵　编

西南交通大学出版社

线性代数与空间解析几何

（第三版）

韩流冰　叶建军　何瑞文　秦应兵　编

西南交通大学出版社

·成　都·

内容提要

本书阐述了线性代数与空间解析几何的基本理论和方法，共分为 7 章. 主要内容包括：行列式，矩阵，向量组的线性相关性与 n 维向量空间，线性方程组，特征值与特征向量，二次型，三维空间中的向量、平面与直线. 为了使学生加深对所学知识的理解，每节后都配有习题，并在书末给出了习题答案.

本书既可供高等院校各专业学生学习线性代数课程之用，也可作为工程技术人员参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何 / 韩流冰等编. —3 版.
—成都：西南交通大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5643-3234-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①线性代数②多维空间几何－解析几何 Ⅳ. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 172585 号

线性代数与空间解析几何
（第三版）

韩流冰　叶建军　何瑞文　秦应兵　编

*

责任编辑　张宝华
封面设计　墨创文化
西南交通大学出版社出版发行
四川省成都市金牛区交大路 146 号　邮政编码：610031
发行部电话：87600564
http: //www.xnjdcbs.com
成都中铁二局永经堂印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm × 230 mm　　印张：12.5
字数：223 千字
2014 年 8 月第 3 版　　2014 年 8 月第 11 次印刷
ISBN 978-7-5643-3234-1
定价：25.00 元

第三版前言

本书第三版是在第二版的基础上，根据我们多年的教学改革实践修改完成的，特作如下修改：

1．为使内容在编排上更加合理，现增加了“线性变换及其矩阵”一节，并作了前后调整．

2．为了更适合学生练习，调整了部分习题，并对原书中的个别错误作了纠正．

本次再版工作由秦应兵、何瑞文、韩流冰、叶建军完成．新版中存在的问题，欢迎广大同行和读者提出宝贵意见和建议，并表示感谢．

作　者

2014 年 5 月

第一版前言

本书是根据近几年本科数学教学改革实践中积累的经验和体会编写而成的，系统地阐述了线性代数与空间解析几何的基本概念、基本理论和基本方法．与传统的线性代数教材相比，本书具有如下特点：

1．围绕矩阵的初等变换方法在线性代数中的作用，在对行列式、矩阵、向量组的讨论中，强调了初等变换下诸多性质的不变性．

2．在向量组的讨论中，强调了向量组自身的性质、结构，并把矩阵和初等变换作为讨论．向量组的工具和方法．

3．在线性方程组的讨论中，强调了求解齐次线性方程组与非齐次线性方程组的异同．

本书在正式出版前，以《线性代数讲义》的形式在本科教学中已试用了两学期，反映良好．

书中内容经作者讨论决定后，由韩流冰、叶建军执笔完成．涂汉生教授、黄盛清教授认真阅读了书稿，并提出了许多修改意见，卿铭、秦应兵、蒲伟、徐跃良、任朝元、杨宁等数学系教师也提出了不少宝贵的建议，作者循此对书稿作了适当的修改和调整。在此，谨向他们致以诚挚的感谢．

限于编者水平，书中难免存在错误和疏漏，敬请读者批评指正．

作　者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是由 $n\times n$ 个数所确定的一个数，它决定了矩阵的许多性质，在数学的其他分支中也有着广泛的应用. 本章从解二元、三元线性方程组出发，给出二阶、三阶行列式的概念，再把它们加以推广，引入 n 阶行列式，并讨论行列式的基本性质和计算方法.

第一节　行列式的概念

1. 二阶行列式与三阶行列式

首先讨论二元线性方程组. 其一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

对方程组进行消元，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

从所得公式可以看出，形如 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 的数起着重要的作用. 为了便于记忆，下面引入二阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{ij}\,(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，其第一个下标表示该元素在行列式的第 i 行，第二个下标表示该元素在行列式的第 j 列.

利用二阶行列式，记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则关于二元线性方程组解的结论可以叙述为：若方程组的系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2)$是把系数行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 后所得的二阶行列式.

例 1　解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+2x_2=5, \\ 2x_1+5x_2=12. \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}=1,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=2.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2.$$

对于含有三个方程的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此方程组，可以得出与二元线性方程组相类似的结论，前提是引入三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

那么，结论叙述为：如果线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组(1.1)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列换成常数列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 后所得的三阶行列式.

例 2　解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times2\times2+1\times3\times1+1\times1\times1$$

$$-1\times3\times1-1\times1\times2-1\times2\times1=1\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=0.$$

2. n 阶行列式

从上面的例题可以看到，利用二阶、三阶行列式求解系数行列式不为零的二元、三元线性方程组是比较方便的. 但在实际应用中，遇到的方程组的未知元经常是多于三个，这就需要讨论 n 个未知数的线性方程组的求解问题，从而有必要把二阶、三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

n 阶行列式是 $n\times n$ 个数 a_{ij} 按给定法则决定的一个数，通常记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

下面介绍相关的一些概念：

数 a_{ij} 称为行列式 D 的位于第 i 行第 j 列的元素，而称

$$r_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

为行列式的第 i 行，称

$$\boldsymbol{c}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

为行列式的第 j 列.

把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式，二阶和三阶行列式可写成如下具有相同规律的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$

把以上二阶和三阶行列式的表达式加以推广，下面给出 n 阶行列式的如下定义：

定义 1.1 行列式 D 是一个数，定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}. \tag{1.2}$$

例 3 计算四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 D 的第一行元素的代数余子式依次为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=12,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4,\quad A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-12,$$

由行列式的定义计算得

$$D=1\times 12+1\times 0+1\times 4+1\times(-12)=4.$$

例 4 计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义计算得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再由 $n-1$ 阶行列式的定义计算得

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如此进行下去，可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 给出的行列式称为三角行列式. 从该行列式的计算可以看出，若行列式中有较多的零元素，则行列式的计算较为简便.

由于二阶行列式是 2！项的代数和，三阶行列式是 3！项的代数和，用数学归纳法容易证明：n 阶行列式是 n！项的代数和. 另外，由二、三阶行列式的计算可以发现，代数和的第一项除正、负号外，都是行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积，所以 n 阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}).$$

其中 $j_s\neq j_t, s\neq t$，且 $1\leqslant j_s\leqslant n, s=1,2,\cdots,n$.

为确定每项之“＋”、“－”号，引入如下概念：

通常把 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个排列，每一个数在排列中仅出现一次. 显然 $1,2,\cdots,n$ 可以组成 n！个不同的排列. 在一个排列中，如果有一对数的前后位置是大数排在小数之前，则称这一对数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$.

下面的例子给出了逆序数的一般计算方法.

例 5　求 5 元排列 52143 的逆序数.

解　在排列 52143 中，排在 5 之后，并小于 5 的数有 4 个；排在 2 之后，并小于 2 的数有 1 个；排在 1 之后，并小于 1 的数有 0 个；排在 4 之后，并小于 4 的数有 1 个. 所以

$$\tau(52143)=4+1+0+1=6.$$

例 6　交换一个排列中的两个数，称为一个对换，证明对换改变排列逆序数的奇偶性.

证明　不妨设排列中交换的两个数为 s,t. 当 s,t 在排列中的位置相邻时，称为一个相邻对换，此时排列为

$$\cdots s\ t\cdots$$

经过对换后变成

$$\cdots t\ s\cdots$$

这里"…"表示那些不动的数．在这两个排列中，这些不动的数之间的逆序情况是一致的，而 s 或 t 与这些数所构成逆序的情况也是一致的，不同的只是 s、t 的次序. 如果 $s<t$，那么 $\cdots t\ s\cdots$ 比 $\cdots s\ t\cdots$ 多一个逆序；如果 $s>t$，那么 $\cdots t\ s\cdots$ 比 $\cdots s\ t\cdots$ 少一个序列. 所以逆序数 $\tau(\cdots s\ t\cdots)$ 和 $\tau(\cdots t\ s\cdots)$ 的奇偶性相反.

一般设 s 和 t 相隔 k 个位置，此时排列为

$$\cdots s\ i_1\cdots i_k\ t\cdots$$

经过对换后变成

$$\cdots t\ i_1\cdots i_k\ s\cdots$$

注意到

$(\cdots s\ i_1\cdots i_k\ t\cdots)$ 经过 $k+1$ 次相邻对换变成 $(\cdots i_1\cdots i_k\ t\ s\cdots)$，

$(\cdots i_1\cdots i_k\ t\ s\cdots)$ 经过 k 次相邻对换变成 $(\cdots t\ i_1\cdots i_k\ s\cdots)$，

所以给定对换可以通过 $2k+1$ 次相邻对换来实现. 故逆序数 $\tau(\cdots s\ i_1\cdots i_k\ t\cdots)$ 和逆序数 $\tau(\cdots t\ i_1\cdots i_k\ s\cdots)$ 的奇偶性相反.

定理 1.1　用 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 所组成的所有排列求和，则 n 阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.3}$$

由于计算较复杂，通常不用(1.3)式计算行列式，所以对这一公式不予证明.

习　题　1.1

1. 求 t 使

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. 多项式

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13}+x & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32} & a_{33}+x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

问方程 $D(x)=0$ 最多有几个根?

3. 计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

4. 在 5 阶行列式的展开式中,$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}$ 的前面应带什么符号?

5. 一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 多,则此行列式等于零. 为什么?

6. 证明:在全部 n 元排列中,奇排列和偶排列的个数相等.

第二节　行列式的性质

本节讨论行列式的有关性质,希望利用所得结论,可以有效地简化行列式的计算.

1. 行列式的转置

行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行和列互换后，所得的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式，简称为 D 的转置，有时也记 D 的转置为 D^{T}.

定理 1.2　行列式转置其值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

不妨以三阶行列式为例来说明结论的正确性，这里略去严密的证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

而

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

根据定义写出二阶行列式的值. 因为 D 表示为 6 项代数和，将这个代数和重新组合后，再写成二阶行列式的形式，有：

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

该定理表明，在行列式中行与列地位对等，从而关于行成立的性质，对列也成立. 所以在今后的讨论中，主要对行列式的行的性质进行讨论分析，所得结论对列自然也成立. 我们把这一规律称为行列式的行列性质对等律.

2. 行列式的初等变换

我们把下面三种变换称为行列式的初等行变换：

(1) 对换行列式的 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

(2) 用数 k 乘行列式的第 i 行的所有元素，记作 kr_i；

(3) 把行列式第 i 行各元素的 k 倍加到第 j 行的对应元素上，记作 r_j+kr_i.

类似地，若把“行”换成“列”，就得到行列式的初等列变换，依次记为 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，c_j+kc_i.

对行列式 D 施行初等变换所得行列式简记为 $D(r_i \leftrightarrow r_j)$，$D(kr_i)$，$D(r_j+$