

清华大学出版社“十二五”规划教材

数学物理方程

姜玉山 徐延钦 王晓敏 张庆灵 刘超 李明维 编

清华大学出版社

数学物理方程

姜玉山 徐延钦 王晓敏 张庆灵 刘超 李明维 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是为国内理工类数学相关各专业普遍开设的“数学物理方程”课程编写的教材。其内容包括数学物理定解问题；常用定解问题解法（分离变量法，行波法，积分变换法，格林函数法）；特殊函数（主要是贝塞尔函数），极值原理及应用。每节后附有习题并在书末给出了部分答案。全书按方程解法分章，层次分明，深入浅出，便于教学。

经适当章节取舍，本书也可作为工科相关专业开设的“数理方程与特殊函数”课程的教材，并可供从事偏微分方程研究的科技工作者参考。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/姜玉田等编. —北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-37443-8

I. ①数… II. ①姜… III. ①数学物理方程 IV. ①O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第17797号

责任编辑：陈 明 赵从棉

封面设计：傅瑞学

责任校对：赵丽敏

责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社总机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：三河市君旺印务有限公司

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：170mm×230mm 印 张：9.5 字 数：180千字

版 次：2014年9月第1版 印 次：2014年9月第1次印刷

印 数：1~3000

定 价：19.00元

产品编号：060055-01

前 言

偏微分方程在物理学、工程技术和其他科学的许多领域都有着十分广泛的应用。在上述研究领域中经常出现很多描述某些物理规律的方程,统称为数学物理方程。通过对这些方程的求解,一方面可以得到极有实用价值的结论,另一方面又可以促进这些领域的发展。因此,数学物理方程这个学科应运而生。数学物理方程既可以作为一门纯数学学科来研究,也可以作为一门应用数学学科来研究。对广大科技工作者及理科学生来说,学习数学物理方程的目的在于应用。因此,本书为了适应这些读者的需要,从选材上就有侧重,主要涉及的不是一般数学理论,而是尽量为读者提供与数学物理方程有关的基本概念、基本原理和解题的各种方法及技巧。

2004年以来,本课程组一直为本校通信工程和功能材料等工科专业及数学相关专业本科生讲授“数学物理方程”课程,深深感到编写一本既符合专业需要,又具有较广泛适应性的书是多么迫切。基于这种共同的认识,本书根据实践教学的经验,结合国内外经典教材的优秀特点,经过修改补充后编写而成。尽管数学物理方程是一门数学专业基础课,本书并不一味追求教学理论上的严密和完备,而把重点放在问题的物理含义和基本解题方法上。有些数学原理(定理)只作些说明就可使用,省略的证明部分在参考书籍中可查到。适当增加应用举例部分,综合应用数学物理方法去解决实际问题,使学生开阔眼界,进一步提高处理实际问题的能力。另外,计算机模拟已经成了现代科学研究中的重要手段,本书在适当部分加入了可视化模拟,如:波的传播、电场分布、热运动的变化趋势等。可视化模拟更能激发学生的学习兴趣,调动学生的创造力,发挥学生的想象力,帮助学生更好地完成学习任务。

数学物理方程这门课程用到的基础知识较为广泛,如果将它们统统集中安排在前面叙述,这样学起来感到枯燥无味,因此本书将所涉及的基础知识分别插入到相应的解法中去叙述。本书中主要用到数学分析、线性代数和常微分方程的知识,有些段落也用到复变函数的知识,在第7章还用一些泛函分析的知识。因此,本课程安排在数学相关专业第三学年为宜。本书内容包括数学物理定解问题的常用

解法：分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、特殊函数（着重是贝塞尔函数和勒让德函数）、极值原理及应用。作为教材使用时可根据具体情况加以取舍。对于工科相关专业学生建议重点学习第1~6章，而数学相关专业的学生学习第1~5,7章。

作为东北大学秦皇岛分校校级立项教材，本书得到东北大学秦皇岛分校给予的经费资助，同时在清华大学出版社及本书编辑陈明、赵从棉的支持推动下，本书得以顺利出版，作者对他们的支持和帮助表示衷心感谢。

编 者

2014年7月秦皇岛

目 录

1 偏微分方程模型与定解问题	1
1.1 弦振动方程模型及定解条件	3
1.1.1 弦振动方程的导出	3
1.1.2 定解问题与定解条件	5
习题 1.1	6
1.2 其他典型方程模型与叠加原理	7
1.2.1 热传导方程模型	7
1.2.2 调和方程模型	8
1.2.3 交通流模型	9
1.2.4 叠加原理	10
习题 1.2	12
2 特征线法与行波法	13
2.1 特征线法	13
2.1.1 一阶常系数线性方程求解	13
2.1.2 一维波动方程的通解	16
习题 2.1	19
2.2 达朗贝尔公式	20
2.2.1 达朗贝尔公式的导出	20
2.2.2 传播波	21
2.2.3 依赖区间、决定区域和影响区域	24
习题 2.2	25
2.3 三维波动方程的柯西问题	25
2.3.1 三维波动方程的泊松公式	26
2.3.2 泊松公式的物理意义	28

2.3.3	降维法求解二维波动方程的柯西问题	28
习题 2.3		30
2.4	齐次化原理及应用	30
2.4.1	齐次化原理	30
2.4.2	齐次化原理应用	32
2.4.3	高维非齐次波动方程的柯西问题	33
习题 2.4		34
3	分离变量法	36
3.1	直角坐标系下的分离变量法	36
3.1.1	有界弦的自由振动问题	36
3.1.2	有限长杆的热传导问题	41
3.1.3	分离变量法总结及固有值问题	43
习题 3.1		46
3.2	极坐标下的分离变量法	46
习题 3.2		49
3.3	非齐次方程问题与非齐次边界问题	50
3.3.1	非齐次方程的特征函数法	50
3.3.2	非齐次边界问题	53
习题 3.3		55
4	格林函数法	56
4.1	狄拉克函数与基本解	56
4.1.1	狄拉克函数	56
4.1.2	泊松方程的基本解	59
习题 4.1		60
4.2	格林公式及格林函数	61
4.2.1	散度定理与格林公式	61
4.2.2	泊松方程狄利克雷问题的格林函数	62
习题 4.2		64
4.3	特殊区域上的格林函数及应用	64
4.3.1	格林函数的求法	64
4.3.2	格林函数应用	67
习题 4.3		69

5 积分变换法	71
5.1 傅里叶变换与拉普拉斯变换	71
5.1.1 傅里叶变换及其性质	71
5.1.2 拉普拉斯变换及其性质	73
5.1.3 典型函数的积分变换	74
习题 5.1	77
5.2 傅里叶变换应用举例	77
习题 5.2	81
5.3 拉普拉斯变换应用举例	82
习题 5.3	88
6 特殊函数	89
6.1 贝塞尔函数的推导	89
6.1.1 幂级数解法	89
6.1.2 贝塞尔函数	90
习题 6.1	93
6.2 贝塞尔函数的性质	93
6.2.1 贝塞尔函数的递推公式	93
6.2.2 贝塞尔函数的零点与正交模	95
6.2.3 函数按贝塞尔函数系展开	96
习题 6.2	97
6.3 贝塞尔函数的应用	97
习题 6.3	101
6.4 勒让德函数	101
6.4.1 勒让德方程的求解	101
6.4.2 勒让德多项式	103
习题 6.4	105
6.5 勒让德多项式应用	105
6.5.1 函数按勒让德多项式展开	105
6.5.2 球形区域上调和方程边值问题求解	107
习题 6.5	109

7 极值原理与能量估计	110
7.1 泊松方程的极值原理	110
7.1.1 极大值原理	110
7.1.2 泊松方程边值问题解的最大模估计	112
7.1.3 强极值原理	112
习题 7.1	114
7.2 热传导方程的极值原理	115
7.2.1 极值原理	115
7.2.2 第一边值问题解的唯一性	116
7.2.3 解的最大模估计	117
习题 7.2	118
7.3 波动方程的能量估计	118
7.3.1 振动的动能和位能	118
7.3.2 初边值问题解的唯一性与稳定性	120
习题 7.3	122
附录 A 傅里叶变换函数表	123
附录 B 拉普拉斯函数表	126
附录 C 高斯函数和误差函数	129
附录 D Γ 函数	131
部分习题答案及提示	134
参考文献	140

偏微分方程模型与定解问题

在许多数学模型的建立中,需要用偏导数来表示物理量. 物理量的自变量有多个,例如,一般空间自变量 $x, y, \dots$ 和时间变量 t . 包含未知多元函数的偏导数的等式称为**偏微分方程**. 通常用这些方程及初始条件、边界条件表示物理现象. 许多工程和自然科学领域中,偏微分方程的研究占有重要的地位. 很多领域都高度依赖于偏微分方程的研究,例如,声学、空气动力学、弹性力学、电动力学、流体力学、地球物理学、热学、气象学、海洋学、光学和量子力学等.

偏微分方程的**阶、线性、齐次和解**的定义与常微分方程的定义类似. 偏微分方程的阶定义为: 方程中出现的未知函数的最高阶偏导数的次数. 以前学过的函数 u 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在本文中有时分别用 $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ 来表示. 含有两个自变量 x, y 的一阶偏微分方程的一般形式为

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

一般的二阶偏微分方程形式为

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

如果偏微分方程中未知函数 u 与它各阶偏导数之间为线性相加的形式,则称偏微分方程为**线性的**(或**线性方程**). 例如,含有两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f,$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ 为系数项, f 为自变量 x, y 的二元函数, $u(x, y)$ 为未知函数. 若 $f=0$ 则称上式为**齐次线性方程**, 否则称**非齐次线性方程**. 因此, 若 $u(x, y)$ 为线性齐次方程的解, 则 $cu(x, y)$ 亦为线性齐次方程的解. 将函数 $u=\varphi$ 及偏导数 $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}, \varphi_x, \varphi_y$ 代入方程, 使其成立的 φ 为偏微分方程的解.

考虑方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 的解

$$u(x, t) = t + 0.5x^2,$$

满足 $u_t = 1 = u_{xx}$, 另外一个非常有实用的解为

$$u(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

读者自行验证它的正确性. 那么偏微分方程的解有多少? 通常来说有很多. 如同常微分方程的通解一样, 偏微分方程的通解是包含若干个任意函数的方程所有解的组合. 偏微分方程的特解为不含有任意函数和任意常数的解.

对二阶齐次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0, \quad (1.0.1)$$

分别将 $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ 替换为 $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2, \alpha, \beta$, 式(1.0.1)就化为有关 α, β 的二阶多项式

$$P(\alpha, \beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + b_1\alpha + b_2\beta + c = 0. \quad (1.0.2)$$

由解析几何理论可知: 根据判别式 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ 取正值、0 或负值, 二次方程 $P(\alpha, \beta) = 0$ 在平面上分别代表双曲线、抛物线或椭圆. 因此, 方程(1.0.1)按

$$\begin{cases} a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \end{cases}$$

分为双曲型、抛物型和椭圆型三类. 下列是在物理学中常见的偏微分方程.

(1) $\mathbb{R}^1$ 上的波动方程: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, 其中 u 为位移(例如, 弦振动关于平衡位置的位移), a 为波传播速度.

(2) $\mathbb{R}^1$ 上的热传导方程: $u_t = a^2 u_{xx}$, 其中 u 为温度分布函数, a 为温度扩散系数.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上的拉普拉斯(Laplace)方程: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, 其中 Δ 为拉普拉斯算子.

(4) $\mathbb{R}^1$ 上的交通流(Transport)方程: $u_t + a(u)u_x = 0$.

(5) $\mathbb{R}^1$ 上的伯格(Berger's)方程: $u_t + uu_x = 0$, 在无粘质流的研究中经常出现.

(6) $\mathbb{R}^2$ 上的程函(Eikonal)方程: $u_x^2 + u_y^2 = 0$, 在几何光学研究中经常出现.

(7) $\mathbb{R}^n$ 上的泊松(Poisson)方程: $\Delta u = f$, 也称为非齐次拉普拉斯方程, 在场论和电学理论中经常出现.

(8) $\mathbb{R}^3$ 上的亥姆霍兹(Helmholtz)方程: $\Delta u + k^2 u = 0$, 用来描述水下扩散过程.

(9) $\mathbb{R}^3$ 上的克莱因-戈登(Klein-Gordon)方程: $u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0$, 在量子场论中出现, m 为质量.

(10) $\mathbb{R}^3$ 上的电报方程: $u_{tt} - c^2 \Delta u + \alpha u_t + m^2 u = 0$.

(11) $\mathbb{R}^3$ 上的薛定谔(Schrödinger)方程: $i u_t + \Delta u + a u + b |u|^2 u = 0$, 在量子力学中出现.

(12) $\mathbb{R}^3$ 上的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程: $u_t + u \cdot \nabla u = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta u$.

1.1 弦振动方程模型及定解条件

1.1.1 弦振动方程的导出

弦振动方程是在 18 世纪由达朗贝尔(D'Alembert)等人首先研究的, 它是一大类偏微分方程的代表. 给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦, 其长度为 l , 在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动(图 1.1), 下面分析弦上各个点的运动规律.

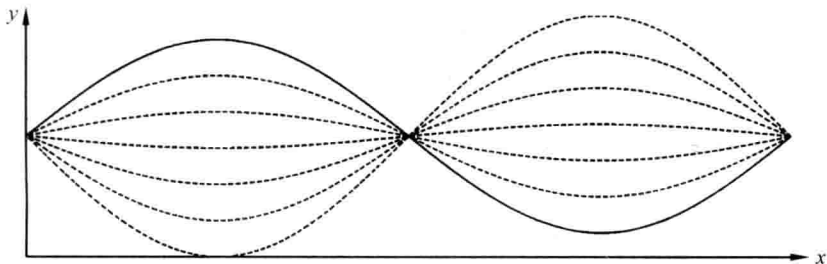


图 1.1 弦振动图形

将实际问题归结为数学模型时, 必须做一些理想化的假设, 以便抓住问题的本质特征. 我们假设:

(1) 弦是均匀的, 弦的截面与弦长相比可以忽略. 因此, 弦可视为一条曲线, 它的线密度 ρ 为常数.

(2) 弦是柔软的, 它在形变时不抵抗弯曲, 弦上各个质点间的张力方向与弦的切线方向一致, 而弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律. 弦的重力大小相对张力可以忽略不计.

假设弦的平衡状态位于 x 坐标轴. 令 $u(x, t)$ 表示 t 时刻 x 位置上弦的位移. 图 1.2 是固定某个时刻 t 时弦的振动形状.

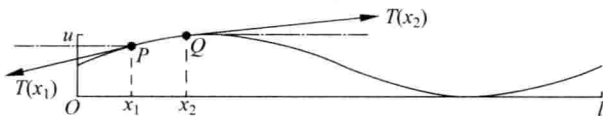


图 1.2 某一时刻弦振动的位移与水平位置的关系图

假设弦在平面内作微小的横振动,这意味着 $u(x, t)$ 及它的偏导数 $u_x(x, t)$ 非常小,它们的平方项可以忽略不计. 取 x 轴上 (x_1, x_2) 对应的弦的一小段弧 $\widehat{PQ}$ (图 1.2), 则 t 时刻 $\widehat{PQ}$ 长为

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2} dx \approx x_2 - x_1. \quad (1.1.1)$$

即在微小的振动条件下弦长没有发生改变. 根据胡克定律, 弦上每一点的张力 T 不依赖于时间 t , 在振动过程中每一点张力的大小与其在平衡位置时近似相等.

下面我们说明张力也不依赖于位置 x . 事实上, 由图 1.2 张力在 x 轴方向上的合力为零, 换言之, P, Q 两点上张力 $T(x_1), T(x_2)$ 在水平方向上的分力大小相等, 即

$$T(x_1) \cos \alpha(x_1) = T(x_2) \cos \alpha(x_2),$$

其中 $\alpha(x)$ 表示 t 时刻张力方向与 x 轴正向在 x 处的夹角. 因为振动微小, 故

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

所以 $T(x_1) \approx T(x_2)$. 由 x_1, x_2 的任意性可知张力也不依赖于位置 x . 因此, 对任意 x 和 t , 有 $T(x) \approx T_0$ (常数) 成立.

张力在位移方向的合力为

$$\begin{aligned} & T_0 \sin \alpha(x_2) - T_0 \sin \alpha(x_1) \\ &= T_0 \left[\frac{\tan \alpha(x_2)}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha(x_2)}} - \frac{\tan \alpha(x_1)}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha(x_1)}} \right] \\ &= T_0 \left[\frac{u_{x_2}}{\sqrt{1+u_{x_2}^2}} - \frac{u_{x_1}}{\sqrt{1+u_{x_1}^2}} \right] \\ &\approx T_0 [u_{x_2} - u_{x_1}] = T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

$\widehat{PQ}$ 段产生的惯性力为

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (1.1.3)$$

根据牛顿第二定律有

$$T_0 \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt} dx = 0. \quad (1.1.4)$$

由 x_1, x_2 的任意性, 等式 (1.1.4) 蕴含着

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx}, \quad (1.1.5)$$

或者

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1.1.6)$$

其中 $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. 式(1.1.6)称为弦的**自由横振动方程**.

假设沿着 u 轴的方向有外力作用在弦上, 其外力密度为 $g(x, t)$, 则 $\widehat{PQ}$ 段所受外力为

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, t) dx.$$

式(1.1.6)变为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.1.7)$$

其中 $f(x, t) = \frac{g(x, t)}{\rho}$. 式(1.1.7)称为弦的**强迫横振动方程**. 由于式(1.1.6)和式(1.1.7)描述的是弦的振动或波动现象, 因而又称它们为**一维波动方程**. 类似地, 可以导出**二维波动方程**(例如薄膜振动)和**三维波动方程**(例如电磁波、声波的传播), 它们的形式分别为

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (1.1.8)$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t). \quad (1.1.9)$$

波动方程还有更多的应用, 例如: 超声气流的运动, 低阻电缆的电力传输, 杆的纵振动等.

1.1.2 定解问题与定解条件

在上述弦振动问题中, 弦的两端被固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点, 因此有**边界条件**

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (1.1.10)$$

或记为

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

此外, 设弦在初始时刻 $t=0$ 的位移和速度为

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

或称其**初始条件**(也称为**柯西条件**)为

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.1.11)$$

初始条件与边界条件统称为**定解条件**. 把方程(1.1.7)与定解条件(1.1.10)和(1.1.11)合起来, 就得到如下弦振动方程的**定解问题**:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

对一个描述物理问题的偏微分方程或者**数学物理方程**求解, 条件与方程是同等重要的. 偏微分方程定解问题通常会满足不同初始条件和边界条件.

如果上述弦振动定解问题的初始条件(1.1.11)中 $\varphi(x)=\psi(x)=0$, 则称其为齐次初始条件. 而与时间无关的定解问题不含有初始条件, 例如拉普拉斯方程的定解问题只含有边界条件.

边界条件一般有三类:

(1) **狄利克雷(Dirichlet)条件**(亦称第一类边界条件): 在考虑的区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上未知函数已知. 如上述弦振动问题中式(1.1.10).

(2) **诺伊曼(Neumann)条件**(亦称第二类边界条件): 在边界 $\partial\Omega$ 上未知函数沿法线方向的导数已知.

(3) **罗宾(Robin)条件**(亦称第三类边界条件或混合边界条件): 在边界 $\partial\Omega$ 上未知函数与其沿法线方向的导数的线性组合已知.

习题 1.1

1. $f(x)$ 为一次连续可微的任意函数. 证明: $u=f(xy)$ 满足方程 $xu_x - yu_y = 0$.

2. 按双曲型、抛物型或椭圆型为下列方程分类.

(1) $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;

(2) $4u_{xx} - 7u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;

(3) $u_{xx} + a^2 u_{yy} = 0 (a \neq 0)$;

(4) $4u_{tt} - 12u_{xt} + 9u_{xx} = 0$.

3. 细纤维(或弹簧)受某种外界原因而产生纵向振动. 以 $u(x, t)$ 表示静止时在 x 点处的点在时刻 t 相对原来位置的偏移. 假设振动过程中所发生的张力服从胡克定律, 试证明 $u(x, t)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

其中 $\rho(x)$ 为杆的密度, E 为杨氏模量.

4. 试证: 圆锥形枢轴(图 1.3)的纵振动方程为

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中 h 为圆锥的高.

5. 柔软均匀的细弦一端固定, 在本身重力作用下, 此线处于垂直平衡位置. 试导出此弦微小横振动方程及定解条件.

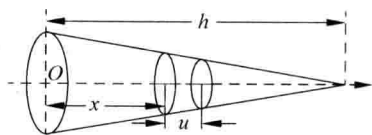


图 1.3

1.2 其他典型方程模型与叠加原理

1.2.1 热传导方程模型

考虑质地均匀、横截面积为常数 A 、长度为 l 的金属杆(图 1.4). 令 $e(x, t)$ 为单位体积内金属杆储存的热量(或热密度). 假设金属杆的侧面绝热良好, 即侧面没有热量流失. 截取厚度为 Δx 的一截金属片. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 金属片上总的热量为这一段圆柱体积 $A\Delta x$ 与热密度 $e(x, t)$ 的乘积, 即 $e(x, t)A\Delta x$.

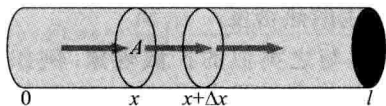


图 1.4 横截面为常数的细金属杆

考虑金属片上热量的变化率为 $(e(x, t)A\Delta x)_t$, 根据热能守恒定律, 单位时间内此段上热量的变化量等于单位时间内流进流出两个截面的热量之差, 即

热量的变化量 = 热流进 - 热流出.

假设 $\varphi(x, t)$ 为单位时间流经单位截面上的热量(即热流速度), 则热守恒定律可描述为

$$(e(x, t)A\Delta x)_t = \varphi(x, t)A - \varphi(x + \Delta x, t)A.$$

两边除以 $A\Delta x$ 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得

$$e_t(x, t) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = -\varphi_x(x, t). \quad (1.2.1)$$

根据热量与温度的关系, 热密度 $e(x, t)$ 可表示为

$$e(x, t) = c(x)\rho(x)u(x, t), \quad (1.2.2)$$

其中 $c(x)$ 为比热容系数, $\rho(x)$ 为金属杆的密度, $u(x, t)$ 为温度. 而根据傅里叶(Fourier)热传导定律

$$\varphi(x, t) = -K(x)u_x(x, t), \quad (1.2.3)$$

其中 $K(x)$ 为热传导系数. 将式(1.2.1)、式(1.2.2)和式(1.2.3)合起来, 得到

$$c(x)\rho(x)u_t(x, t) = (K(x)u_x(x, t))_x.$$

在特殊条件下, 比如 $c(x), \rho(x), K(x)$ 均为常数, 有

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (1.2.4)$$

其中 $a^2 = \frac{K}{c\rho}$. 式(1.2.4)称为无热源一维热传导方程. 同样, 考虑侧面绝热的薄片

(图 1.5)的热传导,可得二维热传导方程

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (1.2.5)$$

以及空间温度分布不均匀物体的三维热传导方程

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \quad (1.2.6)$$

如果所考察的物体内部有热源(例如物体内部有电流等),式(1.2.4)、式(1.2.5)和式(1.2.6)相应地改为

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.2.7)$$

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (1.2.8)$$

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad (1.2.9)$$

其中, f 为物理内部热源产生的热密度.

热传导方程还可以描述与之类似的扩散现象. 例如, 湖泊、大气的污染, 此时 $u(x, y, z, t)$ 代表相应的液体或者气体污染物的浓度分布.

方程(1.2.4)还不能完全描述金属杆热量传播的过程. 还需知道初始时刻金属杆上温度的分布情况, 即初始条件; 金属杆两端温度分布情况(对于二维, 三维情形对应边界上温度分布情况), 即边界条件.

初始条件描述为

$$u(x, 0) = f(x).$$

边界条件通常有两种:

(1) 已知边界上的温度分布(狄利克雷边界条件)

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t).$$

(2) 边界上绝热(诺伊曼边界条件)

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0.$$

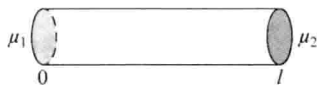


图 1.6 金属杆两端温度分别为 $\mu_1(t), \mu_2(t)$

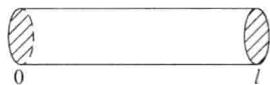


图 1.7 金属杆两端绝热

1.2.2 调和方程模型

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1.2.10)$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z). \quad (1.2.11)$$

式(1.2.10), 式(1.2.11)分别称为拉普拉斯(Laplace)方程(或调和方程)和泊松(Poisson)方程. 对于二维情形, 调和方程和泊松方程的形式分别为

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.2.12)$$



图 1.5 侧面绝热的薄金属片