现代数学基础

47 高等线性代数学

黎景辉　白正简　周国晖

高等教育出版社

现代数学基础

47

高等线性代数学

黎景辉　白正简　周国晖

GAODENG XIANXING DAISHUXUE

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是一本关于线性代数和多重线性代数的高级读本，其目的是把读者的线性代数水平从本科一、二年级提高到国内及欧美大学的研究生水平，让读者有实力利用线性代数学习其他学科并展开科研。全书内容包括线性代数的基本必需知识：张量、张量代数、交错型、行列式、双线性型、二次型、Clifford 代数、典型群、旋量、模理论、线性变换结构与 Jordan 典范型、数值线性代数关于复矩阵的基础理论、模的各种构造法、群表示理论、同调代数以及范畴学。

本书适合大学数学系、物理系、计算机系和工程系的本科生和研究生阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等线性代数学／黎景辉，白正简，周国晖编著. —北京：高等教育出版社，2014. 9

ISBN 978－7－04－041057－0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①黎… ②白… ③周… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 203355 号

策划编辑　赵天夫　　责任编辑　赵天夫　　封面设计　赵　阳　　责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	560 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　41057－00

序

本书是给学过初等线性代数后进一步学习线性代数的学生使用的. 在各种科研建模、金融产品及工程过程中的第一层逼近常见线性结构, 所以大学生需要使用的线性代数已超过念一年级时学的线性方程组求解, 这便有了在本科高年级开设高等线性代数学这一门课的需求.

本书为教学的需要而写, 内容虽然在一般的代数教科书内, 但在安排上是有区别的.

首先我们讲的是线性结构, 即向量空间和模, 所以我们没有环论、有限群论、域与伽罗瓦理论. 这对学生和老师来说是比较直接并且集中在线性结构上的.

在材料的次序上, 我们的做法是先从向量空间讲起, 因为对学生来说, "向量空间"是比较亲切的. 我们从向量空间的张量积开始, 事实上物理学或微分几何学的许多应用都是向量空间的张量. 差不多到本书的中间才讲模的张量积. 比起先讲模的张量积然后把向量空间的张量积看作特例, 我们认为这样的安排是比较容易学习的.

有部分概念我们在书中多次重复以加深读者的认识, 比如对称群, 从多项式到行列式都和对称有关.

在书中我们再谈行列式, 因为利用张量积我们可以看到一个 n 维向量空间线性映射 T 的行列式自然出现在它的外积 $\wedge^n T$ 中, 这样学生才能体会到在初等线性代数课所学的行列式的如此神奇的公式是怎样来的. 我们也讲到辛群和正交群等典型群, 原因是在力学、相对论和计算数学中常用到它们, 参见冯康先生的《哈密尔顿系统的辛几何算法》.

为了了解一个线性映射的结构和它的典范型, 我们引入模这个概念. 本来只用矩阵计算便可作出一个矩阵的若尔当典范型, 这样做实际上没有让学生了解背后的数学内容, 不知道这是体现主理想整环上的模的分解. 新科学的创立或工艺的突破常常都是因为对结构的基础有新的观点, 所以我们建议在学者多培养学习结构的基础理论的兴趣.

这本书是有一个中心思想的. 几乎所有构造方法都一样, 就是要求存在有某种性质的唯一态射, 用范畴学的语言, 就是寻求一个问题的"泛解". 比如我们讲了三次直积: 向量空间的直积、模的直积、范畴的直积. 这样, 一方面在范畴内谈直积我们不会觉得太抽象, 另一方面在最后一章我们将看到如何用范畴处理大数据 —— 它把所有类似的东西 (线性结构) 放在一起来研究.

七十年前我们从代数拓扑学家那里学到一个神技 ——就是怎样从一个线性结构得出由此线性结构所决定的一个称为"同调"的不变量. 在第十三章我们用全书所学的知识去讨论同调, 它可以看作是全书的大考!

最后一章是给能力比较好的学生的, 让他们以比较高的观点看全书——从向量空间到同调. 范畴学现在已是广泛应用的数学工具, 比如在电脑软件工程里的超大程序验收测试时便有使用. 国外计算机系常开设范畴学的课程, 数学系本科生毕业前学点范畴学是很好的.

高等线性代数学的取材一定是因人而异的. 这本书是一个实验, 我们希望将来有更多不同的高等线性代数学教材出现, 让有不同数学知识的学生都可以学习这门非常有用的数学.

根据以往的教学经验, 教师面对一般能力的学生时, 除去最后一章, 每周讲三小时的课, 要讲两个学期才能讲完全书. 最佳的安排是除授课外组织研讨班, 由能力较好的学生讲解所学章节中比较难的部分, 并把这些较难的部分排除在考试之外, 这会减轻学生的压力.

目前, 我们的研究生考试题中线性代数部分的内容是比较初等的. 随着我国人力市场的成熟, 市场对研究生的要求提高, 研究生的入学水平也会相应提高. 希望不久的将来, 本书的内容可以成为研究生考试的内容, 这就说明我们进步了.

线性代数学是指研究线性结构的代数方法. 向量空间 V 中的两个向量可以相加, 此外 V 还有"线性结构" ——就是有一个"系数"域 F. 对 F 中的元素 c 和 V 内的向量 v, 我们要知道 V 内的向量 cv, 并且如果 u 也是 V 内的向量, 且 b 属于 F, 则我们要求

$$c(v+u)=cv+cu, \quad (b+c)v=bv+cv, \quad (bc)v=b(cv).$$

设 $T:V\to V$ 是线性映射. 对 $v\in V$ 记 $T(v)$ 为 Tv. 所有从 V 到 V 的线性映射组成的环记为 $\mathscr{R}$. 若 $T,S\in\mathscr{R}$, 则记映射的合成 $S\circ T$ 为 ST. 现取 $v,u\in V$, 则

$$T(v+u)=Tv+Tu, \quad (T+S)v=Tv+Sv, \quad (ST)v=S(Tv).$$

这就是说 V 有以环 $\mathscr{R}$ 为"系数"的"线性结构". 当然现在的系数是指 $\mathscr{R}$ 的元素. 它们是映射不是"数"了. 这已经是"模"了.

本书假定读者学过大学本科一年级的初等线性代数, 已经学过线性方程组、矩阵、行列式、向量空间、子空间、商空间和线性映射等概念及其基本性质. 在第一章我们为读者温习了这些性质. 我们还假定读者念过本科二年级或三年级的一个学期的基本代数课, 学过群、环、域的定义和例子以及同态的性质.

除第一章外, 全书分为四个部分. 第一部分从张量到各种利用张量构造的代数. 第二部分用张量来讲多重线性函数, 特别是双线性函数和二次型, 也讨论了相关的典型群, 即酉群、辛群和正交群. 第三部分讲述一个线性映射的结构, 为此我们引入模的概念. 选

定基底之后, 一个线性映射便是一个矩阵, 第十章讲述了矩阵的特征值的性质及应用. 第四部分我们讲的是模——从模的各种构造方法推广到以模为最基本例子的 Abel 范畴, 中间加了群表示一章作为模的最重要例子.

1978 年夏天, 黎景辉教授在广州中山大学为来自各地的老师开了一门模论的课, 参加学习的老师们把讲义编为一本小册. 三十年后张寿武教授告诉黎教授: 他在大学时念的便是这个讲义. 1979 年, 黎景辉为上海师范大学写了一份同调代数的讲义. 也是三十年后, 黎教授就这份讲义与吴可教授共同商讨同调代数的教学. 为了学生学习冯康先生的算法做好准备, 金小庆教授 2012 年邀请黎教授在澳门大学讲授高等线性代数.

本书的主要内容来自黎景辉 1978 年在广州中山大学、1979 年在上海师范学院、2001 年在北京大学、2010 年在高雄中山大学、2012 年在澳门大学和在悉尼大学二十年间讲学的讲义.

本书前半部分由白正简整理, 后半部分由周国晖整理, 黎景辉负责统筹全书. 这个统筹工作量之大是远超过预期的. 本书是用公开免费的 Texmaker 写的, 中文编码是 UTF8. 感谢澳门镜平学校中学部的苏淑仪老师帮助解决 Texmaker 的问题, 同时感谢她和澳门大学 2012 年硕一的同学 (汪志波为组长) 为本书编写了部分交换图表. 其余的交换图表由黎景辉编写. 因为技术水平不足, 所以同时使用 Tikz 和 xymatrix. 希望下一版陈志杰等老师的 LaTeX 课本附带的光盘能包含一个像 Texmaker 的公开免费的编写软件, 以及文章、图书和 Beamer 的模板, 足够多的 UTF 中文字体库, 更多 xymatrix 和作图例子, 并且能一键安装. 如果这能成为各出版社的标准, 可以免去许多如 Windows 和 Mac, GBK 和 UTF8, WinEdt 收费, WinEdt 的 UNIX 版不稳定等因素引起的排版困难.

白正简感谢他太太高春玲的支持. 另外, 赵志在准备手稿时给予了很大帮助, 陈梅香提出了许多宝贵意见. 在此向他们表示感谢! 周国晖感谢家人及太太黄恬恬. 黎景辉感谢他的两位合作者, 广州中山大学的梁之舜教授, 上海师范大学的孔仲文教授, 高雄中山大学的黄毅青教授, 台南成功大学的柯文峰教授, 澳门大学的金小庆教授和谭锡忠教授, 首都师范大学的李庆忠教授、李克正教授和徐飞教授, 北京师范大学的王昆扬教授和张英伯教授, 北京大学的赵春来教授和张继平教授及清华大学的冯克勤教授. 他们都在这部书的写作过程中给予帮助和鼓励. 感谢澳门大学提供经费, 支持黎景辉于 2012 年 4 月至 6 月访问澳门大学开始写这部书.

感谢高等教育出版社陆珊年编审的出版邀请. 感谢赵天夫编辑的全程支持, 使得本书成功出版, 特别是他在最后定稿时所做的大量工作, 提高了本书的可读性.

小学、中学、大学的数学教育是一个连在一起的有机体. 我们可以把从小学到大学的数学教育看作一个知识传递链, 也可以把这个知识传递链比喻成一根水管, 数学知识就在这水管流着. 在科学与工业技术中不停地有新知识出现, 就像在水管的源头不停有水涌出来要灌入这水管里. 若是水在水管里不流动, 新灌入的水就会把水管撑爆, 所以水一定要流. 这样看, 在这个小学、中学、大学的知识传递链里, 我们每个阶段要教的数

学都会改变! 20 世纪初是大学数学的内容, 现在已经流到中学去了. 我们现在大学本科数学的主干课程是矩阵线性代数、欧拉 – 黎曼式微积分、微分方程, 这些是 19 世纪的数学. 我们支持在 21 世纪把这些课程下移, 让我们可以在大学本科多讲授一些 20 世纪的数学, 因此我们希望更多大学能在数学系本科开设 "高等线性代数" 这一门课. 本书只是一个尝试. 希望其他老师能创作编写更多更好的教材, 让我们的数学教育更进步.

目 录

序

第一章 线性代数预备知识 **1**

第一篇 张量 **11**

第二章 张量积 **13**

2.1 双线性映射和张量积 14

2.2 张量积的存在性 17

2.3 线性映射的张量积 20

2.4 张量积的另一种构造方式 22

2.5 正合序列 24

2.6 混合张量 27

习题 30

第三章 张量代数 **35**

3.1 代数 35

3.2 对称群 38

3.3 张量代数 42

3.4 对称代数 43

3.5 外代数 43

3.6 斜称张量 46

习题 47

第二篇 型 **49**

第四章 交错型 **51**

4.1 多重线性映射 52
4.2 交错映射 53
4.3 行列式 57
4.4 经典行列式公式 59
4.5 判别式和结式 67
4.6 对偶空间的外积 72
习题 77

第五章 双线性型 **81**

5.1 双线性型 81
5.2 内积和酉群 84
5.3 辛型 94
5.4 辛群 98
习题 100

第六章 二次型 **103**

6.1 Witt 理论 103
6.2 代数 112
6.3 Clifford 代数 121
6.4 正交和旋群 130
6.5 旋量 133
习题 141

第三篇 线性映射 **143**

第七章 模 **145**

7.1 模和同态 145
7.2 商模 147
7.3 循环模 149
7.4 有限直和 151

7.5 Artin 模和 Noether 模 152
习题 155

第八章 主理想整环上的模 **159**
8.1 主理想整环 159
8.2 主理想整环上的矩阵 161
8.3 有限生成模 163
8.4 挠模 165
习题 168

第九章 典范型 **171**
9.1 Jordan 典范型 171
9.2 线性映射所决定的模 176
9.3 典范型 178
习题 182

第十章 复矩阵 **183**
10.1 谱定理 183
10.2 范数 186
10.3 极大极小定理 189
10.4 共轭梯度法 193
习题 200

第四篇 模 **203**

第十一章 构造 **205**
11.1 直积和直和 206
11.2 张量积 216
11.3 纤维积和纤维和 219
11.4 逆极限和正极限 223
11.5 分级和过滤 228
习题 230

第十二章 表示 **233**
12.1 群表示 233
12.2 不可分模 234
12.3 不可约模 239
12.4 有限群的表示 241
12.5 对称群的表示 251
习题 257

第十三章 同调 **261**
13.1 正合序列 261
13.2 投射模与内射模 269
13.3 平坦模 278
13.4 同调 282
13.5 导出函子 287
13.6 群同调 299
13.7 非交换上同调群 310
习题 317

第十四章 范畴 **321**
14.1 函子 322
14.2 例子: 箭图表示 326
14.3 可表函子 331
14.4 伴随函子 335
14.5 极限 340
14.6 纤维范畴 344
14.7 Abel 范畴 346
14.8 三角形 354
14.9 复形 357
习题 368

索 引 **373**

第一章　线性代数预备知识

本书假定读者有初等线性代数的知识, 一方面学过矩阵和行列式在解多元线性方程组的应用, 另一方面亦了解向量空间和线性映射的基本结构. 因为本书注重使用图表来表达关系, 利用图表从视觉上帮助认知, 所以我们提供本章. 一方面作为介绍图表这个方法, 另一方面亦作为初等线性代数的复习, 让读者知道我们对于线性代数所要求的预备知识. 读者们, 请不要因为认不出本章的定理便放弃本书. 事实上只要拿一部你念过的线性代数教科书比较一下, 就不难看出本章是个好的复习了. 作为一个复习, 本章的安排与其余各章完全不同, 习题是放在行文之中而不是全章之后, 目的是希望读者边看边做习题, 这就把已经学过的初等线性代数全回忆起来, 完全进入挑战高等线性代数的准备状态.

本章主要回顾向量空间之间的线性映射的核、像、商空间、同构及基变换. 我们给出了线性映射的基变换矩阵和线性映射之间的关系, 还讨论了向量空间的对偶空间和零化子的同构性质.

以 $\mathbb{Q}$ 记有理数域, 以 $\mathbb{R}$ 记实数域, 以 $\mathbb{C}$ 记复数域, 以 $\mathbb{Z}$ 记整数环, 以 $\mathbb{N}$ 记非负整数集合.

为简便起见, 本章所涉及的域 F 特征为零, 复数域 $\mathbb{C}$ 的所有子域的特征为零. 设 p 是素数, n 是正整数, 则有 p^n 个元素的有限域 $\mathbb{F}_{p^n}$ 的特征为 p.

以下常用几个逻辑符号: $\forall x$ 是对所有的 x; $\exists x$ 是存在 x; $A \Rightarrow B$ 是如果 A 则 B; $A \Leftrightarrow B$ 是 A 当且仅当 B.

映射 (map) $f: V \to W: v \mapsto w$ 的意义为 f 是从 V 到 W 的映射并且 $f(v) = w$. 如有映射 $f: V \to W$ 和 $g: W \to U$, 则 g 和 f 的**合成** (composition) 是映射 $g \circ f: V \to U$, 这是指 $(g \circ f)(v) = g(f(v))$.

如常 $\delta_{ij} = \delta^i_j = 1$ 若 $i = j$, 否则 $= 0$.

矩阵 $A = (a_{ij})$ 是说矩阵 A 的第 i **行** (row), j **列** (column) 的元素是 a_{ij}. 这样**单位矩阵** (identity matrix) $I = (\delta_{ij})$ 的**对角线** (diagonal) 上的元素是 1, 所有其他元素是 0. 把矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行和列对换得 A 的**转置矩阵** (transposed matrix) A^T, 即若 $A^T = (b_{ij})$ 则 $b_{ij} = a_{ji}$. 若 $A = (a_{ij})$, a_{ij} 是复数, 则以 $\bar{A}$ 记矩阵 $(\bar{a}_{ij})$.

当我们说 V 是域 F 上的**向量空间** (vector space) (或称 F 向量空间) 是指向量空

间 V 容许以域 F 的元素 a 数乘 V 内的向量 v 而得向量 av.

如果 V 的子集 W 以 V 的向量加法和以 F 数乘构成一个 F 向量空间, 则称 W 为 V 的 F **子空间** (subspace).

设 V 和 W 是域 F 上的向量空间, 又设有从 V 到 W 的映射 $\varphi : V \to W$. 如果对任意的 $u, v \in V$ 和 $a \in F$ 以下公式成立

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v), \quad \varphi(av) = a\varphi(v),$$

则称 φ 为F **线性映射** (F-linear map) 或**线性变换** (linear transformation) 或**线性算子** (linear operator). 最常用的线性映射是零映射

$$0 : V \to V : v \mapsto 0$$

和恒等映射

$$\mathrm{Id}_V : V \to V : v \mapsto v.$$

常把 Id_V 简写为 Id 或 I.

习题 1.1 设

$$M_{n\times m}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F \right\}.$$

记 $M_{n\times m}(F)$ 为 $M(n\times m, F)$, 又记 $M_{n\times n}(F)$ 为 $M_n(F)$ 或 $M(n, F)$. 定义 $n\times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的**迹** (trace) 为 $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. 证明: (1) $M_{n\times m}(F)$ 构成一个 F 向量空间; (2) 迹 $\mathrm{Tr} : M_n(F) \to F : A \mapsto \mathrm{Tr}\, A$ 是 F 线性函数.

我们令

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{\varphi : V \to W, \varphi \text{ 是 } F \text{ 线性的}\}$$

表示从 V 到 W 的所有 F 线性映射构成的 F 向量空间.

习题 1.2 对任意 $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$, $a \in F$, 我们定义

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) := a(\varphi(v)) \quad \text{对所有 } v \in V.$$

证明: $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 关于以上加法和数乘构成一个 F 向量空间.

定义 1.3 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. 定义 φ 的**核** (kernel) 为

$$\mathrm{Ker}\, \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\},$$

并且定义 φ 的**像** (image) 为

$$\mathrm{Img}\, \varphi = \{\varphi(v) \in W : v \in V\}.$$

设有集合的映射 $\phi: X \to Y$. 如果对 $x, x' \in X$ 从 $\phi(x) = \phi(x')$ 可得出 $x = x'$, 则称 ϕ 为**单射** (injection). 设 $\phi(X) = \{\phi(x) : x \in X\}$. 如果 $\phi(X) = Y$, 则称 ϕ 为**满射** (surjection). 如果集合映射 ϕ 同时为单射和满射, 则称 ϕ 为**双射** (bijection).

习题 1.4　设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$.

(1) 证明: $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是 V 的 F 子空间, $\mathrm{Img}\,\varphi$ 是 W 的 F 子空间.

(2) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ 是**线性单射** (linear injection 或 monomorphism).

(3) $\mathrm{Img}\,\varphi = W \Leftrightarrow \varphi$ 是**线性满射** (linear surjection 或 epimorphism).

设 $\phi: V \to W$ 是 F 向量空间的 F 线性映射, 并且 ϕ 是双射, ϕ 的逆映射 $\phi^{-1}: W \to V$ 是 F 线性映射. 则称 ϕ 为 F **线性同构** (isomorphism). F 向量空间的 F 线性映射 ϕ 是 F 线性同构当且仅当 ϕ 是线性单射和线性满射.

由所有从 V 到 V 的 F 线性同构组成的集合记为 $GL(V)$ 或 $\mathrm{Aut}_F(V)$. 设 $\phi, \psi \in GL(V)$. 利用映射的合成 $\psi \circ \phi$ 定义 $GL(V)$ 的元素的积. 不难证明 $GL(V)$ 满足群的定义. 称 $GL(V)$ 为**一般线性群** (general linear group).

如果 V 是有限维 F 向量空间和 $\phi \in \mathrm{Hom}_F(V, V)$, 可以定义 ϕ 的行列式 $\det \phi$. 设

$$SL(V) = \{\phi \in GL(V) : \det \phi = 1\}.$$

则不难证明 $SL(V)$ 是 $GL(V)$ 的子群. 称 $SL(V)$ 为**特殊线性群** (special linear group).

定义 1.5　设 W 是 V 的一个子空间. 对于 $v \in V$, v 的 W **陪集** (coset) 为 V 的子集 $v + W = \{v + w : w \in W\}$. 由 V 的所有 W 陪集所组成的集合记作

$$V/W := \{v + W : v \in V\}.$$

习题 1.6　证明: $v + W = v' + W \Leftrightarrow v - v' \in W$.

习题 1.7　对任意 $v_1 + W, v_2 + W \in V/W$, $a \in F$, 我们定义

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) := v_1 + v_2 + W, \quad a(v + W) := av + W.$$

证明: 集合 V/W 构成一个 F 向量空间.

提示: 首先必须证明上述加法是定义明确的, 即

$$v_1 + W = v_1{}' + W, \quad v_2 + W = v_2{}' + W \Rightarrow v_1 + v_2 + W = v_1{}' + v_2{}' + W.$$

定义 1.8　我们称 V/W 为 V 模 W 的**商空间** (the quotient space).

习题 1.9　定义 $\pi: V \to V/W : v \mapsto v + W$. 证明: π 是一个线性满射. 我们称 π 为**自然投射** (natural projection).

定义 1.10　设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. 定义 φ 的**余核** (cokernel) 为 $\mathrm{Cok}\,\varphi = W/\mathrm{Img}\,\varphi$.

习题 1.11 证明: (1) 余核 $\operatorname{Cok}\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi$ 是线性满射;
(2) $\operatorname{Ker}\varphi = 0 = \operatorname{Cok}\varphi \Leftrightarrow \varphi$ 是一个线性同构.

习题 1.12 设 $\varphi \in \operatorname{Hom}_F(V, W)$. 证明: 存在一个自然同构

$$V / \operatorname{Ker}\varphi \approx \operatorname{Img}\varphi.$$

这就是**线性映射同构定理** (isomorphism theorem of linear map). (提示: 考虑映射 $v + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(v)$.)

定义 1.13 设 S 是 F 向量空间 V 的一个子集. S 的一个有限线性组合是指 V 中的一个如下形式的向量: $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, 其中 n 是一个正整数, $a_i \in F$, $v_i \in S$. 所有 S 的有限线性组合构成的集合记作 $\langle S \rangle$, 称为 S 的线性**生成空间** (span). 如果 $\langle S \rangle = V$, 则称 S 生成 V.

习题 1.14 证明: $\langle S \rangle$ 是 V 的一个子空间.

定义 1.15 F 向量空间 V 的一个子集 S 称为**线性相关的** (linearly dependent), 如果存在集合 S 的一个**有限**子集 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 和不全为零的数 $a_1, \cdots, a_n \in F$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0.$$

如果 S 不是线性相关的, 则称它是**线性无关的** (linearly independent).

习题 1.16 设 F 向量空间 V 存在一个线性无关的有限子集 S 使得 $V = \langle S \rangle$. 证明: S 中元素的个数 $\#S$ 由 V 唯一决定, 即如果 S' 是另外一个生成 V 的线性无关的有限子集, 则 $\#S = \#S'$.

定义 1.17 一个生成向量空间 V 的线性无关的有限子集 S 称为 V 的一个**基** (basis). S 的基数称为 V 的**维数** (dimension), 记为 $\dim_F V$.

习题 1.18 设 V, W 是有限维 F 向量空间.

(1) 设 $\varphi \in \operatorname{Hom}_F(V, W)$. 证明: $\dim_F V = \dim_F \operatorname{Img}\varphi + \dim_F \operatorname{Ker}\varphi$.
(2) 证明: 如果 $\varphi : V \to V$ 是线性单射, 则 φ 是线性同构.

习题 1.19

(1) 设 F^n 是元取值于域 F 的所有 $n \times 1$ 矩阵 (列向量) 构成的集合. 证明: F^n 是域 F 上的一个向量空间. 有时把 F^n 中的元素记作 $[a_1, \cdots, a_n]^T$, $a_i \in F$, 其中 T 表示一个矩阵的**转置** (transpose).
(2) 证明: V 的一个给定的基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 定义一个 F 线性同构映射:

$$V \to F^n : v \mapsto [v] := [v_1, \cdots, v_n]^T,$$

其中 v_i 由下式决定

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

我们称 $[v] = [v_1, \cdots, v_n]^T$ 为 v 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的**坐标** (coordinate).

下面 $M_2(\mathbb{C})$ 中的矩阵称为 Pauli 矩阵

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathscr{H}$ 是复 Hermite 矩阵的集合,

$$\mathscr{H} = \{s \in M_2(\mathbb{C}) : s^\dagger s = I\},$$

其中 $s^\dagger = (\bar{s})^T$ 表示矩阵 s 的复共轭转置.

习题 1.20

(1) 证明: $\mathscr{H}$ 是 4 维 $\mathbb{R}$ 向量空间. $\mathscr{H}$ 的任一向量可以唯一地表达为 $\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, 其中 σ_μ 是 Pauli 矩阵.

(2) 证明:

$$\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu \to \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}$ 线性同构 $\mathscr{H} \leftrightarrow \mathbb{R}^4$.

习题 1.21　设 $\dim_F V = n$, $\dim_F W = m$. $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基, 并且 $f = \{f_1, \cdots, f_m\}$ 是 W 的一个基.

(1) 证明: 如下定义的映射是一个 F 线性同构映射:

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) \to M_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto [\varphi] = (a_{ij}),$$

其中映射 φ 在基 e, f 下的矩阵 $[\varphi]$ 由下式决定

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

(2) 从矩阵和坐标的角度, 证明: 对任何 $v \in V$, 有 $\varphi(v) = w \Leftrightarrow [\varphi][v] = [w]$.

(3) 证明: 线性映射 $\varphi : V \to W$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 同构于 F^n 的子空间:

$$\{x \in F^n : [\varphi]x = 0\}.$$

(4) 设 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(F)$. A 的第 j 列记作 $c_j=[a_{1j},\cdots,a_{mj}]^T$. 向量空间 F^m 的子集 $\{c_1,\cdots,c_n\}$ 生成 F^m 的一个子空间, 称为 A 的**列空间** (column space), 记作 Col (A). 证明: 映射 φ 的像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 同构于 F^m 的子空间 Col $([\varphi])$.

下面我们了解一下基变换如何影响上述映射 $\varphi\mapsto[\varphi]$. 我们假设 V,W 为域 F 上的有限维向量空间.

给定 V 的一个基 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 以及 W 的一个基 $f=\{f_1,\cdots,f_m\}$, 线性映射 $\varphi\in\mathrm{Hom}_F(V,W)$ 在基 e,f 下的矩阵记作 $[\varphi]_{e,f}$, 以表示它对基的依赖性.

设 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $e'=\{e'_1,\cdots,e'_n\}$ 为 V 的两个基. 根据基的定义, 存在某个矩阵 $P=[p_{ij}]$, 使得

$$e'_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i.$$

这里 P 称为**基变换矩阵** (the change of basis matrix).

首先考虑 V 上的恒等映射 Id_V, 即 $\mathrm{Id}_V(v)=v$ (对任意 $v\in V$). $\mathrm{Id}_V:V\to V$ 关于基 e',e 的矩阵是什么? 这可以通过基变换矩阵获得

$$\mathrm{Id}_V(e'_j)=e'_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i.$$

这就是说, $\mathrm{Id}_V:V\to V$ 关于基 e',e 的矩阵 $[\mathrm{Id}_V]_{e',e}$ 就是基变换矩阵 P.

现在我们假设 $f=\{f_1,\cdots,f_m\}$ 和 $f'=\{f'_1,\cdots,f'_m\}$ 为 W 的两个基. 设 $Q=[q_{ij}]$ 是关于基 f',f 的基变换矩阵, 即

$$f'_j=\sum_{i=1}^n q_{ij}f_i.$$

同样可知 W 上的恒等映射关于基 f',f 的矩阵是 $[\mathrm{Id}_W]_{f',f}=Q$. 验证矩阵 Q 是可逆的.

习题 1.22 按照如上的定义, 给定一个 F 线性映射 $\varphi:V\to W$. 证明

$$[\varphi]_{e',f'}=Q^{-1}[\varphi]_{e,f}P.$$

这就是对应于向量空间 V,W 的基变换的矩阵变换方程.

习题 1.23 我们用 V,e 来表示我们要考虑的向量空间和它的一个基. 证明: 下图是交换的, 即如果我们任意选取图中的两个顶点, 则由连接这些顶点任意边序列所得到的全部映射都是相同的.