高等学校教材

高等数学(上)(经管类)

夏大峰 朱凤琴 陈纪波 冯秀红 符美芬

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学（上）

Gaodeng Shuxue

（经管类）

夏大峰　朱凤琴　陈纪波　冯秀红　符美芬

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是结合作者教学团队多年的教学实践经验编写成的。较同类教材不同，作者考虑到经济管理类学科中微分方程的广泛应用背景，特别增加了幂级数解法和常系数线性微分方程组等内容，并且提供了丰富的具有经济背景的案例。

全书共十章，分上、下两册。上册内容为函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分；下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，无穷级数，微分方程。另外，每节附有习题，每章附有总复习题。

本书可作为经济管理类学科的微积分或高等数学课程的教材，也可作为其他文科类专业的教材，还可作为硕士研究生入学统一考试数学三微积分部分的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：经管类．上/夏大峰等编．—北京：高等教育出版社，2014.8

ISBN 978-7-04-040602-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①夏…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 159441 号

策划编辑　张长虹　　责任编辑　田　岭　　特约编辑　王　琪　　封面设计　于文燕
版式设计　余　杨　　插图绘制　宗小梅　　责任校对　刘娟娟　　责任印制　毛斯璐

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　北京玥实印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　18.75
字　　数　350 千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2014 年 8 月第 1 版
印　　次　2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　29.50 元

物 料 号　40602-00

前　言

高等数学是经济管理类专业的重要基础课，除了要求学生掌握高等数学的有关知识外，还强调培养学生的抽象思维、逻辑思维和定量思维能力，以及运用数学的理论和方法解决实际问题的能力。

本书根据经济管理类专业的本科数学基础课程教学基本要求，参照硕士研究生入学统一考试数学三的考试大纲，以及我校经济管理类专业人才培养的要求，借鉴国内外其他高校高等数学教学改革的成功经验编写而成，具体有几个方面的特色：

1. 突出微积分的基本思想和方法。全书以高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握为宗旨，强调数学思维能力的渗透，强化理论知识的应用，力求使学生会运用所学的知识解决实际问题，尽量满足经济管理类专业后续课程的学习需要，以及将来从事实际工作的需要。

2. 充分考虑教学基本要求和新形势下硕士研究生入学统一考试数学三的要求，重新构建学生易于接受的微积分内容体系。例如，对极限概念，先介绍其描述性概念，再介绍精确定义，使学生便于接受并理解；对微分与积分概念采取由实际问题引入的方式，不仅介绍其几何意义还介绍其经济意义，使学生对所学知识有形象和具体的理解。

3. 精选例题，紧扣教学内容。题型多样，并且许多例题都是经济管理等方面的实际问题，既具有代表性又有一定的难度，适合经管类各专业读者的要求。

4. 按照分层次教学要求，对有关内容和习题进行了设计和安排。每节附有习题，每章附有总复习题。

5. 带有“*”的内容可以不作要求，不影响内容的整体结构，也不影响硕士研究生入学统一考试数学三的内容。建议对带有“*”的基本理论可在教学过程中简要介绍其应用。如归结原理在一般的高等数学教材中很少介绍，实际上归结原理在讨论函数的极限不存在、判别无界性等方面都有广泛的应用。

本书的作者团队集体讨论了全书的框架和教学内容的安排，其中上册由夏大峰统稿，下册由朱凤琴统稿，第一章、第二章、第三章、第十章由夏大峰编写，第四章、第五章、第八章、第九章由朱凤琴编写，第六章、第七章由冯秀红编写，陈纪波参与了习题的配置工作，符美芬参加了校稿工作。

本书获得南京信息工程大学教材建设基金项目的资助，编写得到了南京信息工程大学教务处、数学与统计学院有关领导的大力支持和帮助，南京信息工程

大学大学数学部的老师参与并提出了许多有益的建议。在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在一些不足之处,敬请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2014年3月

目　录

第一章　函数的极限与连续

事物的发展与变化可以归结为变量之间的依赖关系，高等数学研究的对象是变动的量，函数就是变量之间的依存关系．极限是研究变量的基础，极限方法也是研究变量的基本方法．本章作为微积分的准备，主要掌握的内容有函数及相关概念、数列与函数的极限及相关概念、无穷小量和无穷大量、函数的连续性及有关性质、函数的间断点等，并着重介绍其基本思想与方法，为学习微积分打好基础．

第一节　函　数

一、变量与常用数集

事物及其变换过程是高等数学研究的对象，数学则是把事物与变量联系起来，也就是把事物及其变化过程进行量化．人们在观察事物的变化过程中，会遇到很多量，这些量一般可分为两类：一类是在该过程中保持不变的量，称为**常量**；另一类是在该过程中不断变化着的量，称为**变量**．例如在商场购买东西时，某商品的价格是常量，花的钱与购买量是依存关系的变量．一般地，常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示变量．在高等数学中，通常把常量作为变量的特殊情况来处理．

讨论变量间的关系时，必须明确变量的取值范围，每个变量的取值范围常用数集来表示．本书讨论的变量在没有特别说明的情况下都是指在实数范围内变化的量．常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还常用区间和邻域来表示．

区间是用得较多的一类数集，设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则数集

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b,\ x \in \mathbf{R}\}$$

称为**开区间**；数集

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b,\ x \in \mathbf{R}\}$$

称为**闭区间**；数集

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b,\ x \in \mathbf{R}\},$$

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b,\ x \in \mathbf{R}\}$$

均称为**半开半闭区间**．

上述区间的 a 与 b 称为这些区间的**端点**,其中 a 称为区间的**左端点**,b 称为区间的**右端点**;$b-a$ 称为这区间的**区间长度**.

以上四种区间均为有限区间,其区间长度 $b-a$ 是有限的数值. 此外还有下列五种无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\},\ [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\},\ (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

这些区间的区间长度都为无穷大. 其中记号"$+\infty$"读作正无穷大,"$-\infty$"读作负无穷大.

为了讨论函数在一点邻近的某些性态,下面引入邻域的概念.

定义 1 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$,数集

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(a-\delta,a+\delta)$$

称为**点 a 的 δ 邻域**,其中点 a 与数 δ 分别称为这邻域的**中心与半径**(图 1-1-1(a)). 当不强调邻域的半径时,可用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的任意开区间.

数集

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称为**点 a 的去心 δ 邻域**(图 1-1-1(b)). 当不强调去心邻域的半径时,可用记号 $\mathring{U}(a)$ 表示以点 a 为中心的任意去心邻域.

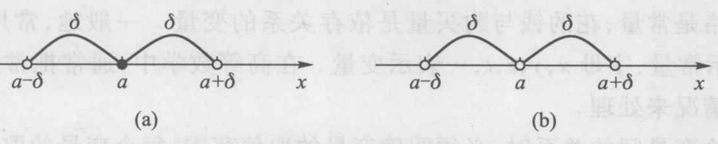

图 1-1-1

二、函数的基本概念

为了简便起见,先介绍数学上一些常用的数学符号:符号"$\forall$"表示"任意(确定)的"或者"每一个";符号"$\exists$"表示"存在"或者"有". 例如"$\forall x$"表示"任意(确定)的 x",而"$\exists x$"表示"存在 x".

函数研究的是变量之间的对应关系,在事物的变化过程中,经常会遇到两个或更多个变量之间的互相依赖关系. 例如,投入与产出之间的关系,利润与成本之间的关系,价格与产量之间的关系等.

以销售额为例,在单价 p 固定的情况下,销售额 y 与销售量 x 之间有如下关系:

$$y = px \quad (x = 0,1,2,\cdots).$$

由上例可知，当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一变量的值就随之确定，数学上把这种对应关系称之为函数关系，其定义如下.

定义 2 设 x,y 为某一变化过程中的两个变量，如果 x 在非空数集 D 内任意取定一个值，y 按照某对应法则 f，总有唯一确定的值与之相对应，则称 y 是 x 的**函数**，并称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，记作

$$y = f(x)(x \in D),$$

其中数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**.

一般地，在函数 $y=f(x)$ 中，使得式子 $f(x)$ 有意义的 x 的集合是该函数的定义域，这时也称为该函数的**自然定义域**. 但在实际问题中，函数 $y=f(x)$ 的定义域还要根据问题中的实际意义来确定.

由定义 2 可知，$f(x)$ 也表示与 x 对应的函数值，因此对应于 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 全体函数值构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}.$$

符号 $f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 之间的对应关系，故 f 仅仅是一个函数对应法则的记号，它也可用其他符号如 g 或 h 等代替，这时，函数 $y=f(x)$ 就写成 $y=g(x)$ 或 $y=h(x)$.

例 1 求函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 的定义域.

解 由题意可得不等式

$$\sin x \geqslant 0,$$

解得

$$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

则该函数的定义域为 $D=\{x \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

例 2 设 $f(x)=x^2-x$，求 $f(x+1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 将 $f(x)$ 中的变量 x 分别用 $x+1$，$\frac{1}{x}$ 代替，得

$$f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) = x^2 + x,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{x^2}.$$

由函数的定义可知，若两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则称这两个函数相同. 例如函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$，它们的对应法则相同，但定义域不同，所以它们不是相同的函数. 又如函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$，它们的对应法则相同，定义域也相同，因此它们是相同的函数.

函数的表示方法有多种形式，常见的主要有表格法、图示法、解析法.

表格法:就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出,对应法则由表格所确定.

例 3　某商场 2012 年 3 月从 1 日到 7 日的销售额(单位:万元)列表如下:

日期	2012.3.1	2012.3.2	2012.3.3	2012.3.4	2012.3.5	2012.3.6	2012.3.7
销售额	256	260	250	254	259	270	276

对这 7 天中的任何一天,按上表的对应法则可唯一确定该天的销售额,即销售额是日期的函数.

图示法:把变量 x 与 y 对应的有序数组 (x,y) 看作直角坐标平面内点的坐标,y 与 x 的函数关系就可用坐标面上的曲线来表出,这种表示函数的方法称为图示法(或图像法).

例 4　函数 $y=|x|+1$ 的图像(如图 1-1-2):

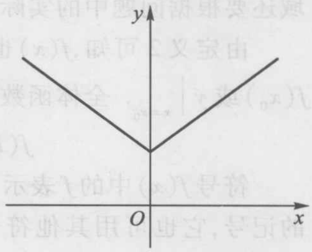

图 1-1-2

解析法(或公式法):如果函数的对应法则由一个数学解析式表示,则称这种表示函数的方法为解析法(或公式法).

例 5　函数 $f(x)=|x|$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,称为绝对值函数.

有些函数在不同的定义范围内对应的函数关系并不相同,这时就要用几个不同的式子分段来表示该函数,例如函数

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leqslant 0, \\ e^x, & x>0 \end{cases}$$

与符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

像上面两个这样在不同的范围内用不同的式子分段表示的函数称为**分段函数**. 在许多学科领域中经常用到分段函数.

必须指出,分段函数是用不同的式子表示一个(而不是几个)函数. 因此对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

例如常用记号 $[x]$ 表示“小于或等于 x 的最大整数”,显然 $[x]$ 是由 x 唯一确定的,如

$$[-1.001]=-2,\ [0.87]=0,\ [1.79]=1,\ [2.43]=2.$$

称函数 $y=[x]$ 为**取整函数**,取整函数 $y=[x]$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$,它表示 y 是不超过 x 的最大的整数,该函数为分段函数.

上述用公式所表示的函数,都是直接用一个或几个关于自变量的式子来表

示的，这样的函数也称为**显函数**．除此以外，变量之间的函数关系也常用方程来表达，例如在直线方程 $x+2y=1$ 中，给定任意一个实数 x，都有唯一确定的 y 值 $\left(y=\dfrac{1-x}{2}\right)$ 与之相对应，因此在方程 $x+2y=1$ 中隐含了一个函数关系 $y=\dfrac{1-x}{2}$．又如圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了两个函数

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a],$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a].$$

在 xOy 平面上，函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 表示上半圆周，$y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 表示下半圆周，这两个函数都是由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的．在这种情况下，确定的是哪一个函数要根据条件而定，如方程所确定的函数满足 $y\geqslant 0$，则方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的函数是 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，$x\in[-a,a]$．

如果由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数（满足函数的定义），则称函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**．

有时变量 x,y 之间的函数关系还可以通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} (t\in I)$$

给出，这样的函数称为**由参数方程确定的函数**，简称**参数式函数**，t 称为**参数**．

对于函数 $y=f(x)$，当 x,y 表示不同的经济变量时得到不同的经济函数．例如：

当 x 为产品的价格，y 为需求量时，$y=f(x)$ 为**需求函数**；

当 x 为产品的销售量，y 为成本时，$y=f(x)$ 为**总成本函数**，且 $\overline{y}=\dfrac{1}{x}f(x)$ 为**平均成本函数**．

三、函数的基本特性

有界性、单调性、奇偶性、周期性是函数的四个基本特性，下面分别对它们作简要介绍．

1. 函数在指定数集上的有界性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 若存在数 M_1，使得当 $\forall x\in I$ 时，恒有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有上界，M_1 为 $f(x)$ 在 I 上的一个上界；若存在数 M_2，当 $\forall x\in I$ 时，恒有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有下界，M_2 为 $f(x)$ 在 I 上的一个下界；若 $f(x)$ 在数集 I

上既有上界,又有下界,则称$f(x)$在I上**有界**.

否则就称函数$f(x)$在I上**无界**,即对$\forall M>0$,都$\exists x_0\in I$,使得$|f(x_0)|>M$.无界函数是指无上界或无下界的函数.

显然,若$f(x)$在I上有界,则必存在数M_1,M_2,使得对$\forall x\in I$,恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,$$

取$M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则容易证明

$$|f(x)|\leqslant M.$$

因此函数$f(x)$在数集I上有界的充要条件为存在正数M,对$\forall x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$.

在几何上,若函数$f(x)$在数集I上有上界M_1,则表示函数$y=f(x)$在数集I上的图形均位于直线$y=M_1$的下方;若函数$f(x)$在数集I上有下界M_2,则表示函数$y=f(x)$在数集I上的图形均位于直线$y=M_2$的上方;若函数$f(x)$在数集I上有界,则表示必存在一个正数M,函数$y=f(x)$在数集I上的图形位于直线$y=M$与$y=-M$之间.

例 6 讨论下列函数的有界性:

(1) $y=\sin x$; (2) $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$.

解 (1)函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界,大于且等于1的数都是它的上界,小于且等于-1的数都是它的下界.

(2)函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上是无界的,因为对$\forall M>0$,取$x_0=\dfrac{1}{2M}$,则$y(x_0)=2M>M$.

2. 函数在指定区间上的单调性

定义 4 设函数$f(x)$在区间I上有定义,$\forall x_1, x_2\in I$,若当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则称函数$f(x)$在I上**单调增加(减少)**.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例 7 余弦函数$y=\cos x$在$(0,\pi)$内是单调减少的,而在$(\pi,2\pi)$内是单调增加的,但在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3. 函数的奇偶性

定义 5 设函数$f(x)$的定义域D是关于原点对称的区间(即$\forall x\in D$,必有$-x\in D$),对$\forall x\in D$,若等式$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称$f(x)$为**奇函数**;若等式$f(-x)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为**偶函数**.

在几何上,由于奇函数$f(x)$满足条件$f(-x)=-f(x)$,因此若点$A(x,f(x))$在曲线$y=f(x)$上,则A的关于原点中心对称的点$A'(-x,-f(x))$也在该曲线上,因此奇函数的图像关于原点中心对称.

类似地,由于偶函数$f(x)$满足条件$f(-x)=f(x)$,因此,若点$A(x,f(x))$在

曲线 $y=f(x)$ 上，则 A 的关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$ 也在该曲线上，所以，偶函数的图像关于 y 轴对称．

例 8　判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{b}(a>0$ 且 $a\neq 1,\ b\neq 0)$；(2) $f(x)=x^3+1$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解　(1)因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{b}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{b}$ 是偶函数．

(2) 因为

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1,$$

所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，故 $f(x)=x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数．

(3) 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数．

4. 函数的周期性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在非零定值 $T(T\neq 0)$，使得对 $\forall x\in D$，都有 $x+T\in D$，且等式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 是它的一个**周期**．易知 T 的整数倍 nT 也一定是 $f(x)$ 的周期．在 $f(x)$ 的所有周期中，若存在最小的正数，则称这个数为 $f(x)$ 的**最小正周期**．值得注意的是并不是所有的周期函数都有最小正周期．

例 9　$y=x-[x]$ 是周期函数，其最小正周期为 1；三角函数中 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数．

例 10　证明狄利克雷(Dirichlet)函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

是周期函数，但无最小正周期．

证　设 $\forall x\in\mathbf{R}$,当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,对 $\forall r\in\mathbf{Q}$,有 $x+r\in\mathbf{Q}$,因此有

$$f(x+r)=f(x)=1;$$

当 $x\notin\mathbf{Q}$ 时,即 x 为无理数,则 $x+r$ 也为无理数,因此有

$$f(x+r)=f(x)=0.$$

综上可知,对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall r\in\mathbf{Q}$,恒有

$$f(x)=f(x+r),$$

所以,任一有理数 r 均为 $f(x)$ 的周期,因此 $f(x)$ 是以任一有理数为其周期的周期函数. 但由于正有理数无最小值,所以 $f(x)$ 是周期函数但无最小正周期.

另外,常值函数都是周期函数,但没有最小正周期.

四、初等函数

1. 反函数及其基本性质

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $f(D)$,如果对于 $\forall y\in f(D)$,在 D 内总有唯一确定的 x 与之对应,使得 $f(x)=y$ 成立,那么就得到一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称该函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),$$

其定义域为 $f(D)$,值域为 D.

一般地,函数 $y=f(x)$ 不一定存在反函数. 例如函数 $y=x^2$ 就没有反函数. 只有一一对应的函数存在反函数,例如,当 $x\geqslant 0$ 时,$y=x^2$ 对应的反函数为 $x=\sqrt{y}$,当 $x\leqslant 0$ 时 $y=x^2$ 对应的反函数为 $x=-\sqrt{y}$.

定理 1　如果函数 $y=f(x)$ 是单调的,那么其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 必存在,且有相同的单调性.

证　假设 $y=f(x)$ 是单调增加函数,设 $\forall y_1,y_2\in f(D)$,且 $y_1<y_2$. 又设

$$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2),\quad x_1,x_2\in D,$$

则必有 $x_1<x_2$(否则与函数 $y=f(x)$ 是单调增加的相矛盾),因此 $x=f^{-1}(y)$ 也是单调增加函数.

同理可证,若 $y=f(x)$ 是单调减少的函数,则其反函数必存在,且也是单调减少的. 综上所述,该结论成立.

设函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,则满足 $f^{-1}(f(x))=x$. 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 反函数的实质体现在它所表示的对应法则上,与原来的函数相比,自变量与因变量的地位对调了. 至于用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量并不重要. 习惯上把自变量记作 x,因变量记作 y,则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也写作 $y=f^{-1}(x)$. 即自变量与因变量的记号可以变,但对应法则与定义域不能变. 例如: