高等数学学习辅导

Gaodeng Shuxue Xuexi Fudao

主　编　张兴永
副主编　杨宏晨　王彩侠　逄世友
王萃琦　吴宗翔

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

高等数学学习辅导

主　编　张兴永
副主编　杨宏晨　王彩侠　逄世友
　　　　王萃琦　吴宗翔

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等数学课程教学大纲基本要求编写的学习辅导书，全书有十二章内容，而每一章由基本内容、疑难问题、典型例题分析、专题讨论和习题与解答所组成，对精选的疑难问题、典型例题分析、专题讨论都做了详尽的分析和解答，最后给出了高等数学四套试题与解答。

本书可作为学生学习《高等数学》和备考研究生的参考书，也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导 / 张兴永主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2013.9

ISBN 978-7-5646-2060-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 232732 号

书　　名　高等数学学习辅导
主　　编　张兴永
责任编辑　潘俊成
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 34.25　**字数** 652 千字
版次印次　2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　30.00 元

前　言

高等数学是高等工科院校大学生重要的基础理论课程，也是研究生入学数学考试必考的主要基础课程之一，为了提高高等数学的教学质量与水平，我们根据高等数学教学大纲的基本要求，通过总结多年的教学经验及长期搜集和积累的教学资料，编写了高等数学学习辅导书。其目的在于能及时解惑答疑，同步辅导，全面提高大学生的数学素养。

本书共十二章内容，每章包括以下五个方面：

1. 基本内容：简明扼要地对本章内容作了归纳总结，对教材内容作了进一步剖析、讲解，并作了适当的深化和扩充。

2. 疑难问题：针对读者在学习过程中不易理解和难掌握的一些概念、方法，选编了若干问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难，并加深对教学内容的理解。

3. 典型例题分析：每一章列举了大量的典型例题，并予以分析解答。例题紧扣本章内容，由浅入深，并归纳总结解题方法，开拓解题思路。

4. 专题讨论：每一章针对某些典型内容进行专题讨论，通过专门研究使这些内容得到更好的理解和掌握。

5. 习题与解答：每一章最后给出一些习题及解答，包括填空题、选择题、证明题和计算题，学生通过这些练习，对本章内容的掌握更加牢固。

本书第一、八章由吴宗翔执笔编写，第二、九章由王彩侠执笔编写，第三、十章及四套试题与解答由张兴永执笔编写，第四、十二章由杨宏晨执笔编写，第五、十一章由逄世友执笔编写，第六、七章由王萃琦执笔编写。在编写过程中经过编者集体多次讨论修改，全书由张兴

永统稿。

本书编写过程中，中国矿业大学理学院数学系的广大教师提出了许多宝贵意见，特别是得到了担任高等数学课程教学教师的积极支持，他们还提出了不少改进建议，在此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2013 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

一、基本内容

1. 函数

y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为自变量，y 称为因变量，D 为定义域，f 为对应规律，相应 y 的取值范围称为函数的值域.

这里要注意：函数的定义域 D 和对应规律 f 是构成函数的两要素.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性；(2) 函数的单调性；(3) 函数的奇偶性；(4) 函数的周期性.

3. 反函数

已知 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，若将 y 当作自自变量而将 x 当作因变量，由此确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为原函数 $y=f(x)$ 的反函数，相应地把原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数，函数 $y=f(x)$ 的反函数也可记作 $y=\varphi(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_2 及值域为 W_2，且 $W_2\subset D_1$，则对任一 $x\in D_2$ 有确定 y 与之对应，称函数 $y=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 的复合函数，u 称为中间变量.

5. 初等函数

由常数和基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6. 非初等函数

分段函数(符号函数，取整函数等).

7. 数列的极限(ε—N **语言**)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $x_n\to a(n\to\infty)$. 如果数列没有极限，就说数列是发散的.

8. 数列子列的收敛性

若$\{x_n\}$收敛于a,则它的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于a.

9. 函数的极限(ε一语言)

表达式(记号)	任意给定	存在	当…时	恒有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
右极限 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0<x<x_0+\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
左极限 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0-\delta<x<x_0$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x<-X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
(无穷大) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|>M$
(无穷小) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|<\varepsilon$
显然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)$,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow f(+\infty)=f(-\infty)=A$				

10. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性;

(2) 函数极限的局部有界性;

(3) 函数极限的局部保号性;

(4) 函数极限与数列极限的关系:

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$存在,任意数列$x_n\neq x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

11. 无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大互为倒数,即

若$\lim f(x)=0$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$($f(x)\neq 0$);若$\lim g(x)=\infty$,则$\lim\dfrac{1}{g(x)}=0$.

12. 无穷小的性质(在同一变化过程中)

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;

(3) 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小;

(4) 常数与无穷小的乘积是无穷小;

(5) 有限个无穷小的乘积也是无穷小;

(6) 函数、极限和无穷小三者的关系

$$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim \alpha(x)=0$.

13. 极限的运算法则

定理 1 (极限的四则运算法则)设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

推论 1 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,则 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$.

推论 2 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

推论 3 如果 $\lim f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 存在,而 n 是正整数,则

$$\lim\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lim f_i(x).$$

推论 4 设 $f(x)\geqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则 $A\geqslant B$.

定理 2 (复合函数的极限法则)设 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成,$f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,且存在 $\delta_1>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时,有 $\varphi(x)\neq a$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

14. 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则)　如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$;

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′　设 $g(x)$, $f(x)$, $h(x)$ 满足条件

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;

(2) $\lim g(x)=a$, $\lim h(x)=a$;
则$\lim f(x)$存在，且$\lim f(x)=a$.

准则Ⅱ(单调有界极限存在准则) 单调有界数列必有极限.

15. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；一般地 $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；一般地 $\lim\limits_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}$.

16. 无穷小的比较

设 α,β 是同一过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{就说 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 高阶的无穷小，记作 }\beta=o(\alpha)\text{；}\\ \infty & \text{就说 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 低阶的无穷小；}\\ C(C\neq 0) & \text{就说 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是同阶的无穷小；}\\ 1 & \text{就称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是等价的无穷小，记作 }\beta\sim\alpha.\end{cases}$$

定理(等价无穷小的替代定理)

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

常用等价无穷小(当 $x\to 0$ 时)：

$$\sin x\sim x,\qquad \arcsin x\sim x,$$
$$\tan x\sim x,\qquad \arctan x\sim x,$$
$$\ln(1+x)\sim x,\qquad \mathrm{e}^x-1\sim x,$$
$$a^x-1\sim x\ln a,\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$
$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\qquad \sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}.$$

利用等价无穷小的替代定理是求极限的重要方法，因此不但要记住以上各组等价无穷小，而且要记住它们的一般形式.

如

$$\ln[1+f(x)]\sim f(x)\quad (f(x)\to 0).$$

这里要注意，在用无穷小等价代替中，一般情况下，整个分子，整个分母，或分子、分母的乘积的因子可以用等价无穷小代替，不要对加、减中的某一项用等价无穷小代替.

17. 函数的连续性

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点 x_0 处连续. 即有

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$（左、右连续）.

注　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$在点 x_0 处既左连续又右连续.

18. 连续函数的运算及其初等函数的连续性

定理 1　（连续函数的四则运算）　若函数 $f(x)$、$g(x)$在点 x_0 处连续，则

$$f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续.

定理 2　单调的连续函数必有单调的连续反函数.

定理 3　（连续函数的复合极限运算）　若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $f(u)$在点 a 连续，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理 4　（连续函数的复合函数的连续性）

设函数 $u=\varphi(x)$在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 $x=x_0$ 也连续.

定理 5　基本初等函数在定义域内是连续的.

定理 6　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

19. 函数的间断点及其分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点（可去间断点和跳跃间断点）}\\ \text{第二类间断点（无穷间断点和振荡间断点等）}\end{cases}$$

20. 闭区间上连续函数的性质

(1) **最大值和最小值定理**　在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

(2) **有界性定理**　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

(3) **零点定理**　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号（即$f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$，也就是方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少存在一个实根.

(4) **介值定理**　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那么介于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上最大值 M 和最小值 m 之间的任意数 C,在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=C$.

二、疑难问题

【问题 1.1】 单调函数必有单值反函数,而不单调的函数一定没有单值反函数吗?

答 不一定.

例如,$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上不单调,但它存在单值反函数:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

一个函数是否有单值反函数,取决于函数的对应法则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系.如果是一一对应,那么必有单值反函数;否则就没有单值反函数.

函数在定义区间上的单调性只是一种特殊的一一对应关系,因此单调性只是存在单值反函数的充分条件,而不是必要条件.

【问题 1.2】 下面关于极限的论述是否正确?

(1) 当 n 充分大以后,数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a,则 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(2) 如果 $\forall\,\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,总有无穷多个 x_n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) 若对于任意给定的正整数 k,总存在正数 N,当 $n>N$ 时,所有的 x_n 均满足 $|x_n-a|<10^{-k}$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

答 (1) 不正确.当 n 充分大以后,数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a,仅表示 x_n 与 a 之间的距离逐渐减少,即 $|x_n-a|$ 越来越小,而并非意味着 $|x_n-a|$ 趋于 0.例如,$x_n=1+\dfrac{100}{n}$ 与数 0 或 1 之间的距离都可以说逐渐减少,也可以说 $x_n=1+$

$\frac{100}{n}$越来越接近于 0 或 1，显然 0 不是 $x_n=1+\frac{100}{n}$的极限. 应当说：当 $n\to\infty$时，x_n 与 a 无限接近，要多么接近就有多么接近，则数列$\{x_n\}$以 a 为极限. 因此“越来越接近”与“无限接近”是不同的.

(2) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的几何意义表示必须满足以下两点：

① $\forall\varepsilon>0$，在 $U(a,\varepsilon)$内都有数列$\{x_n\}$的无限多个点；

② $\forall\varepsilon>0$，在 $U(a,\varepsilon)$以外最多只有数列$\{x_n\}$的有限多个点.

而题设的条件仅满足①而不满足②，故不能说数列$\{x_n\}$以 a 为极限.

例如，取 $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$ $\forall\varepsilon>0$，在 $U(0,\varepsilon)$内都有数列$\{x_n\}$的无限多个点，而 $\forall\varepsilon>0$，在 $U(0,\varepsilon)$以外也有数列$\{x_n\}$的无限多个点. 所以 0 不是数列的极限值. 其实$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为 $\forall\varepsilon>0$，总可以取适当的正整数 k 使 $10^{-k}<\varepsilon$，对于上述的 k，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【问题 1.3】 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 定义中的 $N=N(\varepsilon)$是不是 ε 的函数？

答 这里 $N=N(\varepsilon)$仅表示 N 与 ε 有关，并不表示 N 是 ε 的函数. 因为对于给定的 ε，如果存在一个满足条件的 N，就必然有无数多个满足条件的 N，不存在 N 与 ε 之间的对应规律，$N=N(\varepsilon)$不是 ε 的函数.

【问题 1.4】 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 对吗？

答 不一定. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$.

当 $a\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}=\frac{a}{a}=1$，结论成立；

当 $a=0$ 时，结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 不一定成立.

例如，数列 $x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n[2+(-1)^{n+1}]}{(n+1)[2+(-1)^n]}$$

不存在；

又如，数列 $x_n=\frac{1}{a^n}(a>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\neq1.$$

注 以上各例表明，当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$不一定存在；既使存在，也未必都等于1.

【问题1.5】 设$x_1=1$，$x_{n+1}=1+2x_n(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 有人求解如下：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对等式$x_{n+1}=1+2x_n$两边求极限，得$a=1+2a$，于是$a=-1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$，对吗？

答 不对.

因为$x_1=1$，$x_2=1+2\times1=3$，$x_3=1+2\times3=7$，$x_4=1+2\times7=15$，…，易知数列$\{x_n\}$单调增加，且$x_{n+1}>x_n>1$，显然不可能有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$.

利用递推公式表达的数列求极限，其步骤为：

① 确定数列$\{x_n\}$收敛；

② 假设数列$\{x_n\}$以a为极限.

事实上：
$$\begin{aligned}x_n&=1+2x_{n-1}=1+2(1+2x_{n-2})=1+2+2^2x_{n-2}\\&=1+2+2^2(1+2x_{n-3})\\&=1+2+2^2+2^3x_{n-3}\\&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$
易知$\{x_n\}$无界，故$\{x_n\}$发散，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，把发散数列当做敛数列，结果自然会发生错误.

【问题1.6】 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$的收敛性是否相同？

答 不一定.

当数列$\{x_n\}$收敛时，则数列$\{|x_n|\}$收敛，而且当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；

事实上：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，必然有$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.

而数列$\{|x_n|\}$收敛时，数列$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散.

例如，$x_n=(-1)^n$，数列$\{|x_n|\}$收敛，而数列$\{x_n\}$发散.

【问题1.7】 数列$\{x_n\}$与其子数列$\{x_{n_k}\}$的极限有何关系？

答 一般地，在数列$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_n,\cdots$中，任意抽取的数列$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,x_{n_k},\cdots$（其中$n_1<n_2<n_3\cdots<n_k<\cdots$）为数列$\{x_n\}$的子数列，简称为子列. 显然$n_k\geqslant k$，且
$$\lim_{k\to\infty} n_k=\infty.$$
$\{x_{2n}\}$是数列$\{x_n\}$的子数列，例如$\{x_{2n-1}\}$，$\{x_{3n-1}\}$，$\{x_{n^2}\}$等都是数列$\{x_n\}$的子数列，数列$\{x_n\}$本身也是数列$\{x_n\}$的子数列.

数列的子数列的极限有下述定理：

定理(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的充分必要条件是数列$\{x_n\}$的任何子数列都以 a 为极限.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$的充分必要条件是数列$\{x_n\}$的任何子数列都有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty$.

证明　充分性是显然的，因为数列$\{x_n\}$本身也是数列$\{x_n\}$的子数列. 下面证明必要性.

(1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，又因$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的一子数列，于是当 $k>N$ 时，有 $n_k\geqslant k>N$，$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ 成立，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$.

(2) 类似可证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，必有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty$.

注　此定理的必要条件是判别数列$\{x_n\}$发散(或不是∞)的一种有效方法.

例如，数列 $x_n=(-1)^n$ 发散，是因为子列$\{x_{2n}\}$收敛于 1，而子列$\{x_{2n-1}\}$收敛于-1.

【问题 1.8】　如果数列$\{x_n\}$的子列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$有相同的极限 a，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=a$，那么是否必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

答　必有. 我们还可以有一般性的结论：

设$\{x_{p_k}\}$，$\{x_{q_k}\}$都是$\{x_n\}$的子列，且$\{p_k\}\cup\{q_k\}=N^+$，若$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{q_k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

证　$\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1\in N^+$，当 $k>K_1$ 时(必有 $p_k>k>K_1$)，有

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon.$$

$\exists K_2\in N^+$，当 $k>K_2$ 时(必有 $q_k>k>K_2$)，有

$$|x_{q_k}-a|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{K_1,K_2\}$，当 $n>N$ 时，$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$ 与$|x_{q_k}-a|<\varepsilon$ 同时成立，即有$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【问题 1.9】　怎样证明数列发散？

答　证明数列发散的常用方法有两种：

(1) 找出数列$\{x_n\}$的一个发散的子列；

(2) 找出数列$\{x_n\}$的两个具有不同极限的子列，即

$$\lim_{k\to\infty} x_{p_k}=a,\lim_{k\to\infty} x_{q_k}=b,\text{且 } a\neq b.$$

例如，讨论数列 $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$的收敛性.

解　因为$x_{4k}=\sin\dfrac{4k\pi}{4}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}=0$，而