普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

主编　田祥　冯巍

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育"十二五"规划教材

大学数学

主编 田祥 冯巍

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书包括微积分、概率统计初步与线性代数初步三篇，共计十二章，基本涵盖了大学数学的教学内容。本书选材精炼实用，讲解清新明快、通俗直观、循循善诱，在内容的讲解和编排上不落俗套，有其独到之处，在章节安排上，充分考虑了课堂教学的需要和内容的组织，主题鲜明，容量均匀，本书各节均配有适量习题。

本书可作为高等院校的农、林、管理、法学、经济等非数学专业的数学课程教材，也可供科技人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学 / 田祥，冯巍主编. -- 北京 ： 中国水利水电出版社，2014.4
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-1949-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①田… ②冯… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第086745号

书　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **大学数学**
作　者	主编　田祥　冯巍
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（发行部）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规　格	184mm×260mm　16开本　17.25印张　409千字
版　次	2014年4月第1版　2014年4月第1次印刷
印　数	0001—3000册
定　价	**36.00元**

前　言

数学在人类文明的发展中起着非常重要的作用，数学推动了重大的科学技术进步。但在历史上，限于技术条件，依据数学推理和推算所作的预见，往往要多年之后才能实现。数学为人类生产和生活带来的效益容易被忽视。进入20世纪，尤其是到了20世纪中叶以后，科学技术发展到这一步：数学理论研究与实际应用之间的时间差已大大缩短，特别是当前，随着电脑应用的普及，信息的数字化和信息通道的大规模联网，依据数学所作的创造设想已经达到可即时试验、即时实施的地步。数学技术将是一种应用最广泛、最直接、最及时、最富创造力的重要的实用技术。

一、数学与科学技术进步

20世纪科学技术进步给人类生产和生活带来的巨大变化确实令人赞叹不已。从远古时代起一直是人们幻想的“顺风耳”，“千里眼”，“空中飞行”和“飞向太空”都在这一世纪成为现实。回顾20世纪的重大科学技术进步，以下几个项目无疑是影响最大的，而数学的预见和推动作用是非常关键的。

(1) 先有了麦克斯韦方程，人们从数学上论证了电磁波，其后赫兹才有可能做发射电磁波的实验，接着才会有电磁波声光信息传递技术的发展。

(2) 爱因斯坦相对论的质能公式首先从数学上论证了原子反应将释放出的巨大能量，预示了原子能时代的来临。随后人们才在技术上实现了这一预见，到了今天，原子能已成为发达国家电力能源的主要组成部分。

(3) 牛顿当年已经通过数学计算预见了发射人造天体的可能性，差不多过了将近3个世纪，人们才实现了这一预见。

(4) 电子数字计算机的诞生和发展完全是在数学理论的指导下进行的。数学家图灵和冯·诺依曼的研究对这一重大科学技术进步起了关键性的推动作用。

数学是人类理性思维的重要方式，数学模型，数学研究和数学推断往往能作出先于具体经验的预见。这种预见并非出于幻想而是出于对以数学方式表现出来的自然规律和必然性的认识，随着科学技术的发展，数学预见的精确性和可检验性日益显示其重要意义。

二、数学是时代大潮的潮头

我们面临一个科学技术迅猛发展的时代。信息的数字化和信息的数学处理已经成为几乎所有高科技项目共同的核心技术。从事先设计、制定方案，到试验探索、不断改进，再到指挥控制、具体操作，处处倚重于数学技术。众多新闻报道反映出这一时代大潮汹涌澎湃的势头。下面列举的仅仅是其中一小部分。

(1) 数学技术已经成为工业新产品研制设计的重要关键技术。1994 年 4 月 9 日，被称为“百分之百数字化确定”的波音 777 型飞机举行盛大隆重的出厂典礼。在过去，进行新机型设计，必须对模型构件和样机反复作强度试验和空气动力学性试验。稍有不妥，就必须改变设计再来一轮试验。新机种的研制周期长达十余年，消耗大量原材料和能源，采用了数学技术以后，所有的试验可以通过精确设定的数学模型在计算机中进行，探索和修改都可以通过数学指令去实现。新机种的研制周期从十多年缩短到三年半，大幅度节约了原材料和能源。

(2) 许多国家认识到，高清晰度电视是未来经济技术竞争的主战场之一。日本和美国都投入大量资金和人力进行有关研究，日本起步最早，但所研究的是模拟式的；美国虽然起步稍晚，但所研究的是数字式的。经过多年的较量，数字式研究以其高度优越性取得关键性胜利。数学技术在如此重要项目的激烈较量中起了决定作用。

(3) 1995 年 1 月，在阪神大地震之后，美国利用数学模型进行地震预测，预告了 20 世纪末加州南部可能发生大地震。

三、当代与未来的发展倚重数学

仅以几件事为例就能清楚地看到数学对当代人们的生产和生活所起的重要作用。当代的生产和生活离不开石油，石油勘探和生产需要了解地层结构。多年以来已经发展了一整套数学模型和数学程序。人们发射地震波，然后将各个层面反射回来的信息收集起来。以数学处理，就能将地层各个剖面的图像和地层结构的全貌展现出来。这已是目前石油勘探与生产普遍采用的数学技术。无独有偶，涉及到人的生命也有类似的情况，医生需要了解病人躯体内部和器官内部的状况与变异，以前的调光片将骨骼和各种器官全都重叠在一起，往往难以辨认。现在也有了一整套数学方案。借助了精密设备收集射线穿透人体或核磁共振带出的信息，以数学处理就能将人体各个削面的状况清晰地呈现出来，需要了解哪个层面就可以调出哪个层面的图片来。

在涉及生存与发展的关键时刻，特别是在涉及人类命运的紧要关头，数学也起着非常重要的作用。在进入 20 世纪最后 10 年的时候，美国国家研究委员会公布了两份重要报告《人人关心数学教育的未来》和《振兴美国数学

——90 年代的计划》。两份报告都提到：近半个世纪以来，有 3 个时期数学的应用受到特别重视，促进了数学的爆炸性发展。“第二次世界大战促成了许多新的强有力数学方法的发展……”，“由于受苏联人造卫星发射的刺激，美国政府增加投入促进了数学研究与数学教育的发展”，“计算机的使用扩大了对数学的需求”。在第二次世界大战太平洋战场的关键时刻，由于采用数学方法破译日军密码，美国海军才能在舰只力量对比绝对劣势的情况下，赢得中途岛海战的胜利，歼灭日本联合舰队的主力，扭转整个太平洋战局。在关系人类命运的第二次世界大战中，美国几乎是整个反法西斯战线的后勤补给基地。到了反攻阶段，要组织跨越两个大洋的大规模行动，物资调运和后勤支援成了非常关键的问题，这刺激了有关数学方法的迅速发展。这期间发展起来并且在战后迅速普及到各个方面的线性规划实用数学技术，为人类带来了数以千亿计的巨大效益。到了 1957 年，苏联将第一颗人造卫星送入太空，震撼了美国朝野，意识到有关数学应用方面的差距，美国政府加大投入，促进了数学研究与数学教育的迅速发展，随着计算机的发展，对数学有了空前的需求，刺激数学进入了第 3 个大发展的时期。在新世纪即将到来之前科学技术和生产的发展对数学提出了空前的需求，我们必须把握时机增大投入，加强数学研究与数学教育，提高全民族的数学素质，才能更好地迎接未来的挑战。

通过本课程的学习，使学生开阔眼界，对近代数学的概貌有一个粗略的了解，了解数学科学的精神实质和思想方法。基于上述考虑，本教材在内容选取和结构设计上都做了较为周密的考虑。当然由于受本人水平所限，其中难免有不妥甚至错误之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2014 年 1 月 1 日

目 录

上篇　微积分

我曾经说过，数学是一种方法，数学能使人们的思维方式严格化，养成有步骤的进行推理的习惯。人们通过学习数学，能使他们的理智获得逻辑推理的方法，由此他们就可能把知识进行推广和发展。对于种种推理而言，每个观点都要像数学证明那样去论证，弄明白各种观点之间的相互联系和相互依存关系，直到找出其中根源与本质所在为止。

——约翰·洛克

数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分就立刻成为必要的了。

——恩格斯

微积分学，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一，它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具。

——R. 柯朗

中、小学里介绍的算术、代数、几何知识，大多是人类在公元前 5 世纪左右到 17 世纪这两千多年里取得的成果，这些成果的共同特征是：所涉及的量在讨论的过程中都是不变的，因此叫做常量数学，也为初等数学。17 世纪，随着航海业的发展，要求精确的测定维度，描绘船体的曲线、曲面，计算不同形体的面积、体积，确定物体的中心；随着资本主义的迅速发展而地位越来越重要的力学，则要求确定物体的瞬时速度、运动的方向（曲线的切线）运动的路程等等，于是变量数学应运而生，其标志是笛卡尔和费马的解析几何，以及牛顿和莱布尼茨的微积分。微积分学运用极限方法来研究函数的变化率以及一类特殊形式的和的极限，并且建立它们之间的联系。

第一章　极 限 与 连 续

本章主要介绍极限的概念和运算，在此基础上研究函数的一个重要特性——连续性。

第一节　预 备 知 识

这一节我们主要复习一下高中所学的关于函数的有关内容，也有些内容是在以前没学的。

一、区间与邻域

高等数学中研究的函数是建立在实数域上的，区间和邻域是其中用得较多的数集。

定义 1　设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$。

类似的有**半开半闭区间**

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},\qquad (a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

引进记号 $+\infty$（正无穷大）及 $-\infty$（负无穷大），则可类似地表示无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}；(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}；$$

$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}；\quad (-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$$

全体实数的集合 R，记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间。

定义 2　称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为以点 x_0 为中心，δ 为半径的**邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$。若把邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心点 x_0 去掉，就称之为**去心邻域**，记作 $U^0(x_0,\delta)$，如图 1-1 所示。

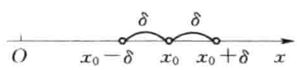

图 1-1

实际上，$U(x_0,\delta)=\{x \,\|\, x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$U^0(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

二、函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义 3　若对非空数集 D 内的每一个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$。其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。数集 D 称为函数的定义域，所有函数值组成的集合称为函数的值域，常记为 R。

注意：若函数在定义域的不同范围内，其解析式用不同的式子来表示，这样的函数称为**分段函数**。

下面举几个例子。

例 1　旅客携带行李乘飞机旅行时，行李的质量不超过 20kg 时不收运费，若超过 20kg，每超过 1kg 收运费 a 元。试建立运费 y 与行李质量 x 的函数关系。

解 当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；当 $x>20$ 时，运费 $y=a(x-20)$，所以运费 y 与行李质量 x 的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & x>20\end{cases}$$

例 2 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，它的图形如图 1-2 所示。

例 3 符号函数 $f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，它的图形如图 1-3 所示。

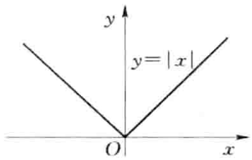

图 1-2

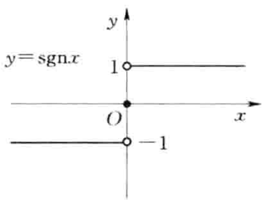

图 1-3

注意：不能因为分段函数在不同的区间是由不同的解析式来表示，就误认为是几个函数。

2. 函数的性质

(1) **单调性** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2)\ [\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)]$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增（或单调递减）。

(2) **奇偶性** 若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称且任意 $x\in D$ 有

$$f(-x)=f(x)\quad [\text{或}\ f(-x)=-f(x)\ ]$$

则称函数 $f(x)$ 为**偶函数（或奇函数）**。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，如图 1-4 (a) 所示；奇函数的图形是关于原点对称的，且若 $0\in D$，则必有 f (0) =0，如图 1-4 (b) 所示。

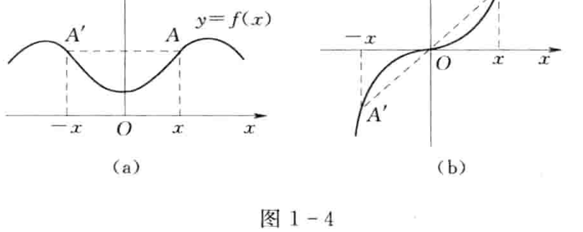

图 1-4

(3) **周期性**　设函数 $f(x)$ 的定义域 D，若存在一个不为零的常数 T，使得对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为函数 $f(x)$ 的周期。

若 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T$ 也为函数 $f(x)$ 的一个周期。事实上

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x)$$

类似地可以说明 kT（k 为任意整数）也为函数 $f(x)$ 的周期。通常说函数的周期是指最小正周期。例如函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

在几何上，周期函数在定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状，如图 1-5 所示。

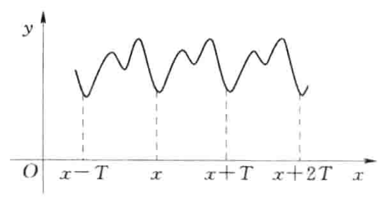

图 1-5

(4) **有界性**　设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在 $M\geqslant 0$，对任意 $x\in D$ 恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

就称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称为**无界**。

例如，函数 $y=\sin x$ 在任意区间上都是有界的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是有界的，在区间 $(0,1]$ 上是无界的。

3. 反函数与复合函数

定义 4（反函数的概念）　若对函数 $f(x)$ 值域内的任意一点 y，在其定义域内都存在唯一的一点 x，使得 $f(x)=y$ 成立，那么将 y 当作自变量，x 当作因变量，得到一个新函数，称之为函数 $f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$。通常将函数 $y=f(x)$ 称作**直接函数。**

习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对换，将反函数记作 $y=f^{-1}(x)$。例如，函数 $y=3x+4$ 的反函数为 $x=\dfrac{1}{3}(y-4)$，又记作 $y=\dfrac{1}{3}(x-4)$。

注意：在同一坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，而 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示同一条曲线。

并非每一个函数都有反函数，判断函数的反函数是否存在，有以下定理：

定理 1　单调函数一定有反函数，且反函数与直接函数有相同的单调性。

定义 5　（复合函数的概念）设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，若函数 $u=\varphi(x)$ 值域为 R_2，且 $R_2\subset D_1$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**。

注意：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是由使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于函数 $y=f(u)$

定义域的那些 x 组成的。

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成。例如由

$$y=\sqrt{u},\quad u=\cos v,\quad v=x^2+1$$

复合而成的函数为 $y=\sqrt{\cos(x^2+1)}$。

例 4　指出下列函数的复合过程。

（1） $y=5^{(2x-1)^3}$；　　（2） $y=\ln(1+\tan x^2)$。

解　（1） $y=5^{(2x-1)^3}$ 是由 $y=5^u$，$u=v^3$，$v=2x-1$ 复合而成的。

（2） $y=\ln(1+\tan x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=1+\tan v$，$v=x^2$ 复合而成。

例 5　设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\varphi(x)$。

解　令 $x+1=t$，即 $x=t-1$，可得

$\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1), 2<t\leqslant 3\end{cases}$，即　$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), 2<x\leqslant 3\end{cases}$

三、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**。

1. 幂函数

$y=x^a$（a 为任何实常数）其定义域受 a 的影响，但不论 a 取何值，幂函数 $y=x^a$ 在区间（0，$+\infty$）内总有定义，且图像过（1，1）点。

常见的幂函数有：$y=x, y=x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，图像如图 1－6 所示。

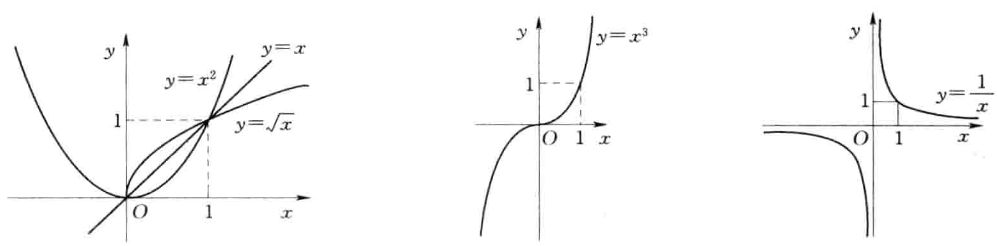

图 1－6

2. 指数函数

$y=a^x$（a 为常数，$a>0$，$a\neq 1$）其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$）。

当 $a>1$，函数 $y=a^x$ 是单调递增函数；当 $0<a<1$，函数 $y=a^x$ 是单调递减函数。因 $a^0=1$，所以图像过（0，1）点，如图 1－7 所示。

3. 对数函数

$y=\log_a x$（a 为常数，$a>0$，$a\neq 1$）其定义域为（0，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$）。

函数 $y=\log_a x$ 是函数 $y=a^x$ 的反函数。故当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 是单调递增的；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 是单调递减的，如图 1－8 所示。

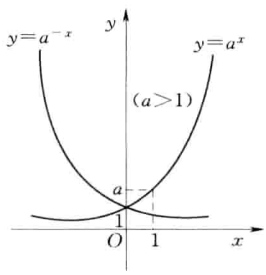

图 1-7

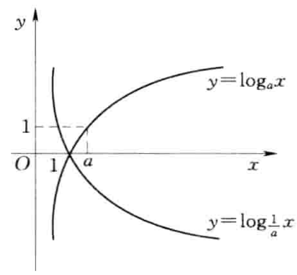

图 1-8

对数函数的常见运算公式：

(1) $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$；

(2) $\log_a AB=\log_a A+\log_a B$，$\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$，$A$、$B$ 均大于零；

(3) $\log_a A^{\alpha}=\alpha\log_a A$，$A$ 大于零。

4. 三角函数

(1) **正弦函数**　$y=\sin x$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，如图 1-9 所示。

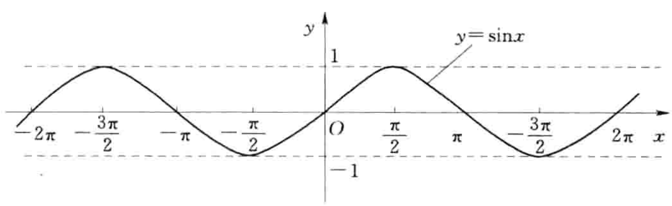

图 1-9

(2) **余弦函数**　$y=\cos x$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，如图 1-10 所示。

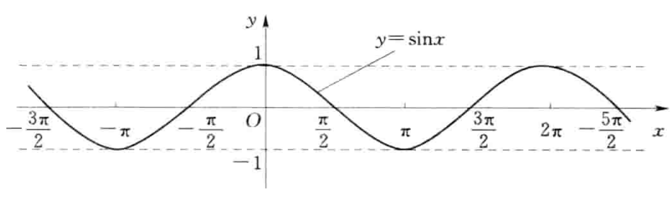

图 1-10

(3) **正切函数**　$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 其定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，如图 1-11 所示。

(4) **余切函数**　$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 其定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，如图 1-12 所示。

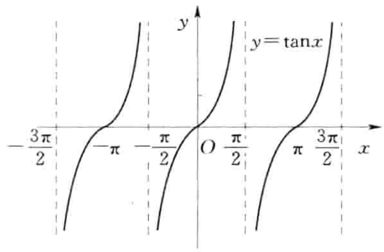

图 1-11

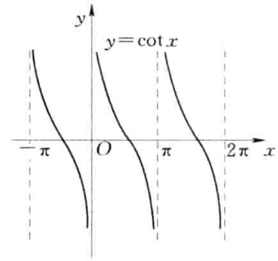

图 1-12

正弦函数和余弦函数的周期为 2π，正切函数和余切函数周期为 π。正弦函数、正切函数、余切函数都是奇函数，余弦函数为偶函数。

(5) **正割函数**　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 其定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。

(6) **余割函数**　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 其定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数统称为三角函数。

三角函数有以下平方关系：

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$；(2) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$；(3) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$。

5. 反三角函数

(1) **反正弦函数**　正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，如图 1-13 (a) 所示。

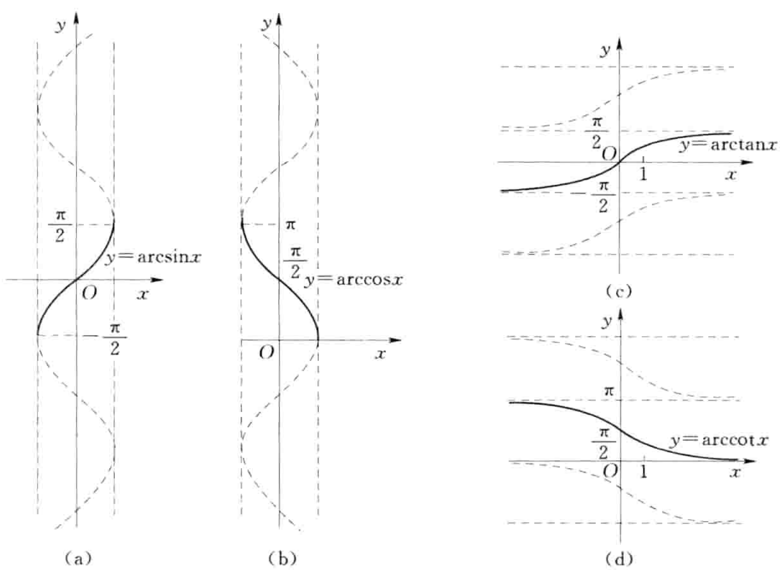

图 1-13