

气动研究与发展

空气动力学中的 数值计算方法

译文选

(三)

前 言

本期继续介绍国外在“有限基本解方法”方面的有关重要文章，其中绝大部分都是在1970年以后发表的。这些译文是“空气动力学中数值算法”第一集、第二集的续篇。

流体动力学中的数值算法主要分成两大类，有限基本解法和有限差分法。前者适用于求解线性的流场主管方程——在空气动力学范畴内，这包括亚音速流场和小扰动的超音速流场。但是边界条件和唯一性条件仍可是非线性的。后者可用于求解任意非线性的流场偏微分方程，甚至最复杂的 Navier-Stokes 气流方程。从当前的电子计算机发展水平看来，有限基本解方法已可用于工程实际，而有限差分法还只能用于计算一些简单物体的粘性流场和跨音速流场。我们准备在第四集译文选中着重介绍国外在有限差分法方面所做的工作。

直到目前为止，国外在有限基本解方法的名称上仍然没有统一；除了在译文选第一集前言中所提到的几种外，还有称之为气动影响系数法 (Method of Aerodynamic Influence Coefficients)、有限奇异性法 (Method of Finite Singularities) 以及离散法 (Method of Discretization) 的；虽然名目繁多，但本质上基本相同。从这些国外论文和报告可以看出，近几年来国外在有限基本解的应用方面进展很快，不仅用来计算飞机部件、组合体及全机的位流，而且还与附面层计算相配合后计算复杂的增升装置、与飞行力学方程相配合后计算外挂物的抛离轨迹、与结构力学相配合后计算颤振及结构弹性变形效应等等。然而也应当指出，在这方面本身的物理机理和数学基础方面，国外发表的材料还是非常有限的，例如对于流场的唯一性以及选择基本解和控制点的正确位置等重要问题，主要还是凭经验判断，没有严格的理论分析。

毛主席教导我们“洋为中用”，我们遵照这一指示继续编辑了这第三集译文选，而且准备不断地选译国外有关的重要文章，分集编印出版，供国内有关部门参考。

译文中除两篇文章由复旦大学忻孝康同志供稿外，均由一七〇二所同志供稿并校对。

本期由上海商务印刷厂负责制版印刷，在此特表谢意。

《气动研究与发展》编辑组

1976年1月

目 录

一、计算亚音速飞行器压力分布的格网法	(1)
二、关于薄翼理论中离散涡格法的高精度分析	(18)
三、设计任意平面形状超音速机翼中弧面的数值方法	(59)
四、计算任意平面形状超音速平板机翼升压分布的数值方法	(72)
五、轴对称环翼的位流计算	(89)
六、绕轴对称机身、环翼及发动机进气道的位流计算	(98)
七、机翼-机身气动力干扰	(107)
八、用有限元素法求解气动力干扰问题的新经验	(136)
九、机翼-机身组合体的升力面理论	(141)
十、用表面分布四边形涡环的方法计算非共面升力机翼和机翼-机身组合体的 三元位流	(175)
十一、亚音速和超音速流中机翼-机身-尾翼组合体气动力分析的改进方法	(225)
第一部分：理论和应用	(225)
十二、运输机涵道风扇干扰理论研究	(267)
十三、飞机外挂物上干扰载荷的理论计算	(277)
第一部分：亚音速气流	(277)
十四、飞机外挂物上干扰载荷的理论计算	(303)
第二部分：超音速气流	(303)
十五、飞机外挂物的亚音速干扰力及力矩的一种计算方法	(326)
十六、在临界速度以下，决定外挂物脱离轨迹的计算方法	(334)
十七、用线化理论计算飞机 / 外挂物干扰的评价	(347)
十八、用表面源汇法求解位流问题的积分方程方法的评论	(361)

一、计算亚音速飞行器压力分布的格网法

W. 克劳斯, P. 萨舍尔

摘 要

本文概述了 Messerschmitt-Bölkow-Blohm 公司所进行的亚音速格网法研究。综合的程序系统能够计算在附体亚音速流域中任意形状有和无升力的粗厚体及组合体上的压力分布。除简短叙述位势理论的基本方程外,还表明了在所研究的全部流域中对于各种外形的理论结果和风洞测量之间很好的一致性。用修正 Göthert 法则考虑可压缩性。以过去未曾达到的精度计算翼身组合体的干扰效应。最后,对压力分布进行积分得到当地的和总的系数。

1. 引 言

用位势理论计算绕任意翼身组合体的流动是很久以来空气动力学一再追求的目的。然而迄今为止即便是对线化的位势方程求解析(“精确”解也只限于简化的物体形状。以前,若千个物体的干扰问题通过对在极端情况下单独计算的部件作简单迭加来迭代逼近。这种研究方法的最熟知的例子是计算薄的升力机翼(“升力问题”)和粗的无升力机身(“排开问题”)的干扰。

最近,随着高速电子计算机的应用,位势方程的“数值”解法越来越重要了;它具有不必对物体外形作过多的几何限制的优点。

开始,二维物体的截面轮廓曲线用一个多边形代替。在多边形直线段上分布等强度的奇点。A. M. O. Smith 和 J. Pierce(Douglas 公司, 1958 年)^[1]及 J. P. Giesing(Douglas, 1965 年)^[2]表明了把这种计算方法用于亚音速有和无升力单独翼型和翼栅的可靠性。J. L. Hess 和 A. M. O. Smith(1962 年)通过划分整个物体表面为许多单个的平面块,即所谓格网,把这种方法逻辑推广到无升力三维物体的情况^[3]。

与亚音速范围内同时和平行发展的是 1962 年 F. A. Woodward(Boeing 公司)发表的机翼超音速格网法^[4]和从 1966 年起 F. A. Woodward 与 R. L. Carmichael(NASA, Ames)发表的翼身组合体超、亚音速格网法^[5]。1968 年 P. E. Rubbert 和 G. R. Saaris(Boeing)^[6]把这些研究成果推广到有襟翼和风扇布局的亚音速机翼情况。在欧洲第一次发表亚音速格网法的是 Th. E. Labrujere, W. Loeve 与 J. W. Sloff(1970 年)^[7]。

对已发表的三种亚音速格网法结果^[5, 6, 7]的评比指出,它们的差别在于对奇点类型和分布的假设,在考虑(满足运动学流动条件的点的)位置和考虑可压缩性时的假设以及对 Kutta 脱体条件的假设的不同。由于很难见到别的程序,为比较起见,编制了新的格网法程序,它在几个重要问题上和以前的公式不同。在[8]到[11]中,叙述了关于新编程序的各种特

殊情况。

2. 符 号

2.1 空气动力学量

Φ	位势
φ	扰动位势
σ	源汇强度
μ	偶极子强度
γ	环量
E	流通量
u, v, w	速度分量
U_∞	无穷远处来流速度
V	速度矢量
Ma	Mach 数
c_p	压力系数
α	攻角
β	压缩性因子
A_{ij}	第 j 个奇点对第 i 个控制点的表面法向影响系数
B_i	第 i 个控制点处的边界值
C_{ij}	第 j 个奇点对第 i 个控制点的影响系数矢量

2.2 几何量

Λ	展弦比
φ	后掠角
λ	尖削比
ε	机翼相对于机身轴的安装角
D	机身直径
b	展长
s	半展长
F	面积
$x_N(y)$	当地中性点位置
$l(y)$	当地机翼弦长
η	翼截面展向位置 ($=y/s$)
S	物体表面
R, r	到点的距离

2.3 系数

c_A	总升力系数
c_N	总法向力系数
c_M	总俯仰力矩系数

$c_a(y)$	当地升力系数
$c_m(y)$	当地俯仰力矩系数
$c_w(y)$	当地阻力系数
$c_t(y)$	当地切向力系数

2.4 坐标

x, y, z	} 直角坐标系
ξ, η	
i, j, k	坐标系单位矢量
n, r	法向和径向坐标

2.5 下标

P	点
QS	源汇
D	偶极子
i	内部
r	径向
id	理想
00	前缘
25	机翼弦长的 25% 处
50	机翼弦长的 50% 处
α	对攻角 α 的导数
bez	参考值

3. 理 论

3.1 基本方程

从三维, 不可压缩, 定常位势方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

出发, 这里, 流场位势 Φ 的导数等于速度矢量 V :

$$\nabla \Phi = V \quad (2)$$

同时满足流动连续性条件

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3)$$

及无旋条件

$$\nabla \times V = 0, \quad (4)$$

流场的位势 $\Phi(x, y, z)$ 由来流 U_∞ 的贡献和一个附加的扰动场 $\varphi(x, y, z)$ 组成:

$$\Phi(x, y, z) = U_\infty [ix + jy + kz] + \varphi(x, y, z) \quad (5)$$

所加的边界条件是在无穷远处扰动为零:

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{当 } (x, y, z) \rightarrow \infty \text{ 时}, \quad (6)$$

物体表面 S 上的运动学流动条件是

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = -nU_\infty, \quad (7)$$

此处, n 是物体表面上的法向矢量,

当物体表面 S 上连续分布强度 $\sigma(S)$ (按单位面积) 的源汇时, 在距离为 $r(S, P)$ 的流场任一点 (P) 的扰动位势 $\varphi_{qs}(P)$ 可以写成下式:

$$\varphi_{qs}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma(S)}{r(S, P)} dS, \quad (8)$$

这种扰动位势足以描述粗厚物体的纯粹排开效应。要想计算有升力的物体, 必须附加奇点, 其强度由脱体流条件确定。

空间偶极子的扰动位势 $\varphi_D(P)$ 通过在轴方向微分源汇分布而得到

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \mu(S_i) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(S_i, P)} \right) dS_i \quad (9)$$

此处, $\mu(S_i)$ 表示偶极子强度 (按单位面积), S_i 表示在物体内部尚待选定的表面。

总的扰动位势是 (8) 式和 (9) 式的迭加

$$\varphi(P) = \varphi_{qs}(P) + \varphi_D(P) \quad (10)$$

对 Laplace 方程 (1) (它同样适用于单独扰动位势 φ) 应用 Green 定理, 得到

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (11)$$

利用连续方程 (3), 求得源汇分布的总流量 $E(S)$, 即为

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{E}{4\pi R^2}, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_s = \left(\frac{E}{F} \right)_s = \sigma(S) \quad (13)$$

通过 (13) 式, 表明了 (10) 式——加上 (8) 式和 (9) 式——与 (11) 式等同, 因此 (10) 式是方程 (1) 的一个解。

由于在物体表面附加运动学流动条件 (7), 对于 (10) 式, 必须解下列边值问题:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} \right)_s &= -nU_\infty = -\frac{1}{4\pi} n \nabla \iint_S \frac{\sigma(S)}{r} dS \\ &+ \frac{1}{4\pi} n \nabla \iint_{S_i} \mu(S_i) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_i, \\ \frac{\partial}{\partial n} &= n \nabla \end{aligned} \quad (14)$$

此处

指沿法向的微分。

在 (14) 式中, $\sigma(S)$ 表示未知的单位面积源汇强度, $\mu(S_i)$ 表示未知的单位面积偶极子强度。把 (8) 式和 (9) 式代入 (10) 式 (即有升力粗厚体的总扰动位势), 运用一种适当的解法 (3.2 节) 可以一起求得两个强度。利用 (5) 式, 然后用 (2) 式计算流场任一处的速度就没有太大困难了。按照等熵公式考虑压缩性 (3.3 节) 计算物体表面上的压力系数:

$$C_p = f(k, Ma, |V|)。$$

3.2 求解方法

3.2.1 数学模型

数值求解关于 $\sigma(S)$ 和 $\mu(S_i)$ 的积分方程 (14) 是通过把物体外形分解成若干个离散的

平面四边形即所谓格网块的元素来实现的。对此, 在无升力物体情况下只划分外表面就够了。而单个格网块的奇点 j (空间源汇) 的强度在其平面上等值分布。图 1 表示一个翼身组合体算例的这种布置。

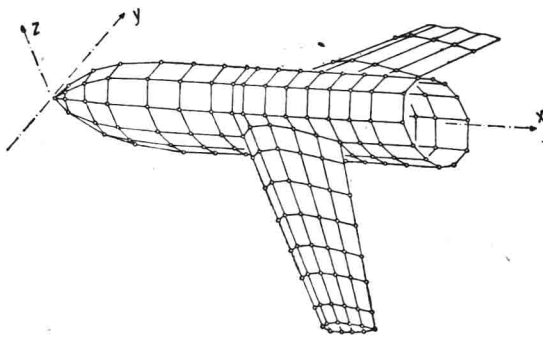


图 1 翼身组合体的表面

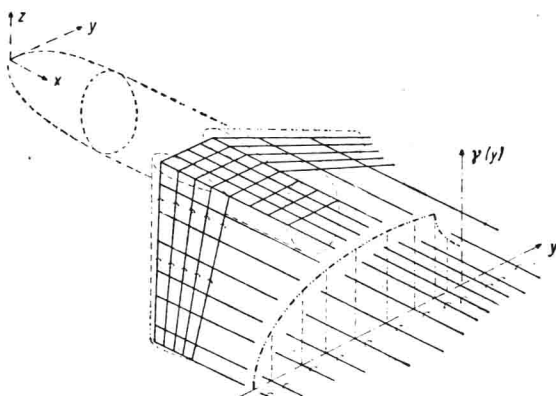


图 2 翼身组合体的内表面

在有升力物体情况下, 定义一个附加“内表面”(图 2)(中弧面加尾流), 在它上面布置附加的奇点(空间偶极子)。这种内表面, 和外表面相似, 仍划分“内”格网, 这里, 一个格网块上的偶极子强度是常数。于是得到象图 3 那样的偶极子强度的阶梯形结构。用涡环代替偶极子最后归结为熟知的由一个个马蹄涡画成的涡梯图, 在“梯柱”和“横撑”上环量如图 4 那样变化。和过去的形式^[5, 6, 7]不同, 本文旋涡分布从前缘伸展到后缘, 而分布函数形式仅根据

数值观点确定。在后缘脱体的总环量强度以通常的方法借助脱体流条件求得, 当然在这里“Kutta 点”——从数值原理出发——不位于后缘上。控制点位置(向下游)移动对计算结果的影响已详细研究过^[7]。

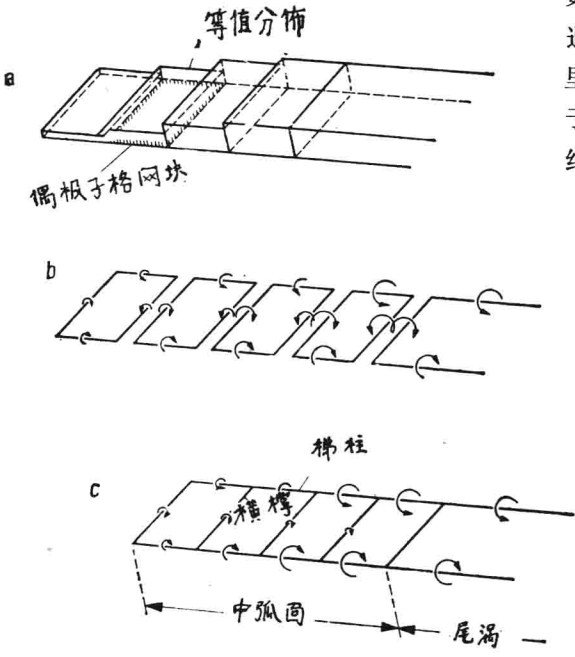


图 3 机翼划分为表面和“中弧面”上的格网
a) 一个条带的偶极子分布 b) 用涡代替偶极子格网(格网边缘分布等效强度的集中涡) c) 合成的涡梯

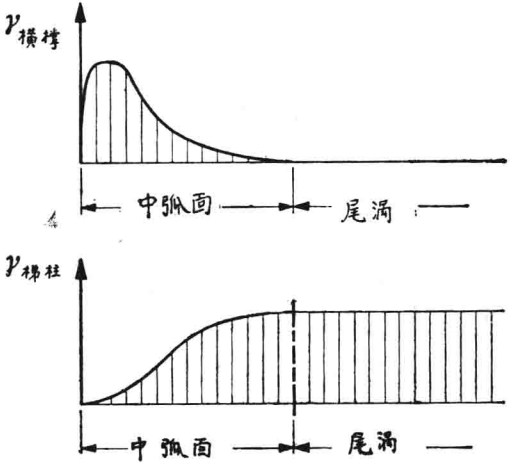


图 4 “涡梯”的环量分布曲线

按上述假定得到如图 5 的总格网模型。值得注意这样的事实，即在机身中的旋涡分布延续下来，因此不得不引入对于机身的“Kutta 点”。在翼根部分则仅从数值原理出发强行

延续机身内部的涡模型。可在实验中测出的展向的和机身部分的环量梯度必须以存在脱体环量（即尾流中的涡层）为条件。因此，所采用的涡分布数学模型有了物理基础。更详细情况见^[8, 9, 10]。

3.2.2 方程组的建立

机身划分为格网使得数值求解积分方程 (14) 的问题归结为确定有限个奇点的强度。由于假设了平面格网块，并且在每块平面上奇点强度为常数，因此对于每个格网块能够最终“精确”求出 (13) 式的解。为此，在每个格网块的一个点即“控制点” (3.2.4 节) 处满足运动学流动条件。从关于积分方程应该在所有控制点和在对于涡梯附加的 Kutta 点处得到满足的要求列出形如下式的线性方程组：

$$\sum_j A_{ij} x_j = B_i \quad (15)$$

其中 A_{ij} 是第 j 个奇点 (强度 x_j) 对第 i 个控制点 (在该处流动边界值为 B_i) 的影响系数。

在每个格网块上分开对源汇和对偶极子积分 (13) 式。如令 v_{ij} 为格网块 j 对控制点 i 的无量纲诱导速度， x_j 是奇点 j 的未知的规范化强度， C_{ij} 是格网块 j 的单位奇点 (汇或偶极子) 对控制点 i 的影响系数矢量，即可得到

$$v_{ij} = x_j C_{ij} \quad (16)$$

对于源汇

$$x_j = \frac{\sigma_j}{4\pi U_\infty},$$

$$C_{ij} = -\nabla \iint_{(j)} \frac{1}{r} dS,$$

对于偶极子

$$x_j = \frac{\mu_j}{4\pi U_\infty},$$

$$C_{ij} = \nabla \iint_{(j)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS,$$

这里，积分必须遍及格网块 j 。于是，从 (14) 式得到两个二重积分：

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla \iint_s \frac{\sigma(S)}{r} dS = U_\infty [\sum_j C_{ij} x_j]_s \quad (17)$$

以及

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{s_i} \mu(S) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = U_\infty [\sum_j C_{ij} x_j]_{s_i} \quad (18)$$

然后，按照 (14) 式，(17) 式和 (18) 式，由所有奇点引起的控制点 i 的总扰动速度为

$$\frac{\nabla \varphi_i}{U_\infty} = [\sum_j C_{ij} x_j] s + s_i \quad (19)$$

或者,考虑了(7)式之后变为

$$-n_i \frac{U_\infty}{U_\infty} = \sum_j n_i C_{ij} x_j \quad (20)$$

把方程组(15)与(20)式进行比较,即可求得(15)式中的矩阵 A_{ij} 和右端项 B_i

$$A_{ij} = n_i C_{ij} \quad (21a)$$

$$B_i = -n_i \frac{U_\infty}{U_\infty} \quad (21b)$$

为了计算压力分布,从(5)式得到控制点 i 的总速度:

$$\sum_j C_{ij} x_j + \left(\frac{U_\infty}{U_\infty} \right)_i = v_i \quad (22)$$

3.2.3 影响系数的计算

第 j 个奇点对第 i 个控制点的影响依赖于几何关系并用影响系数矢量 C_{ij} 表示。

对于源汇,如用 F 表示格网块面积(图6),则是

$$C_{ij} = iV_x + jV_y + kV_z = -\nabla \int_F \frac{1}{r} dF \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \iint_F \frac{(x-\xi) d\xi d\eta}{r^3}, \\ V_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \iint_F \frac{(y-\eta) d\xi d\eta}{r^3}, \\ V_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \iint_F \frac{z d\xi d\eta}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

在[8]中叙述这些二重积分的计算。

对于涡梯(代替偶极子)则是

$$C_{ij} = -\nabla \int_F \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dF \quad (25)$$

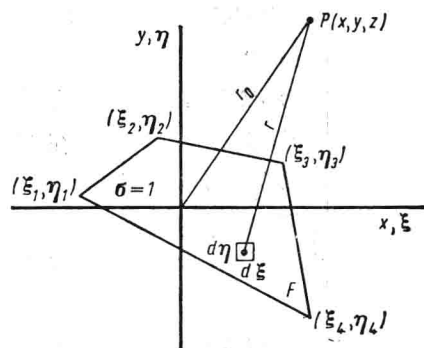


图6 计算影响系数的示意图

在具有等强度偶极子分布的格网块上的积分等于沿分布旋涡面边界的线积分。对于保持单位环量不变的涡梯线元素,从 Biot-Savart 法则得到

$$C_{\text{线}} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (26)$$

并且

$$C_{ij} = \sum C_{\text{线}} \quad (27)$$

3.2.4 控制点

平面格网块的控制点(在该点满足位势方程的边界条件)取这样的位置,即在该点面对其本身的沿格网块平面切向的诱导速度为零。控制点的坐标可借助(24)式解两个联立非线性方程

$$V_x(x, y) = 0, V_y(x, y) = 0 \quad (28)$$

而得到,方程组(28)须迭代求解,为此,面积重心点取作第一次近似($x=y=0$)。

涡梯控制点(在该处满足 Kutta 脱体流条件)可用来确定所考虑截面的总环量。可以按

图 4 选取一个当地翼弦环量分布的适当的公式。根据深入的数值研究,控制点位置选择在后缘角平分线上后缘以后当地翼弦长的 1% 处。

3.2.5 方程组的求解

写出 FORTRAN-IV 计算程序以便数值求解本问题。由于这种计算方法的程序设计技巧对结果有重要的影响,所以在这里对程序作一些补充说明。

计算时把问题分为三部分:

第一部分:划分表面为许多单个格网块元素,同时确定“内”涡面并分割格网块。

第二部分:通过计算规范化影响系数列好待解的方程组并求解。

第三部分:对已求出的压力分布作积分以确定当地气动力系数和总系数。

由于第一部分和第三部分是通常的空气动力学问题,这里只详细研究第二部分。计算过程可用下图说明:

```

READ:      Mach 数
READ:      N (格网块数)
DO1  i=1, N
  READ:      格网块坐标(第一部分的结果)
  COMPUTE:   控制点  $x_n, y_n, z_n$ , 方向矢量  $i, j, k, n=f$  (格网块坐标)
  STORE:     在 HSC1) 内
DO2  i=1, N
  COMPUTE:   格网块相似尺寸  $=f(\text{Mach 数})$  (Göthert 法则)
  STORE:     在 HSC 内
DO3  i=1, N
  DO4  j=1, N
    COMPUTE:  影响系数  $iC_{ij}, jC_{ij}, kC_{ij}, nC_{ij}=f$ 
              (格网块坐标,控制点)
  STORE:     在 LSC2) 内(成行地)
  READ:      攻角和侧滑角
  COMPUTE:    $U_\infty/U_\infty=f$  (攻角和侧滑角)
DO5  i=1, N
  COMPUTE:   边界条件  $n_i U_\infty/U_\infty$ 
  STORE:     在 HSC 内
  COMPUTE:   按(20)式计算奇点强度  $x_i$ 

```

(用迭代法解方程组(20),每次迭代从 LSC 中成行地取出矩阵 $n_i C_{ij}$, 存储在 HSC 中)

```

DO6  i=1, N  从 LSC 中成行地取出矩阵  $C_{ij}$ , 存储在 HSC 中
DO7  j=1, N
  COMPUTE:   按(22)式计算表面速度  $v_i, C_{pi}=f(v_i, \text{Mach 数})$ 

```

在上面写出的程序图中,执行的关键是解出综合方程组(20),即确定奇点强度 x_i 。

在详细研究精确解法前,先来说明方程组系数矩阵的构成。

¹⁾ HSC=High Speed Corage (中心存储器),饱和容量 25,600 字,平均存取时间 ≈ 2 微秒/字。

²⁾ LSC=Low Speed Corage (磁鼓,磁带),实际上容量不限,平均存取时间 $\approx 5 \sim 17$ 毫秒/字。

在中弧面格网的影响系数矩阵 C_{ij} 中, 一部分对角元素不占优势, 或者不如表面格网那样占优势。由于在 Gauss-Seidel 法中, 使用已算出的 $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ 近似值计算未知的 x_j 近似值, 所以, 只要把具有弱优势对角元素的行放在矩阵中尽可能下面, 迭代即可加速。

为此, 应把方程组 (20) 或简化写法 (15) 式看作如下矩阵:

$$[A_{ij}] = \begin{array}{|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \hline \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \hline \end{array}, \quad [B_i] = \begin{array}{|c|} \hline \textcircled{5} \\ \hline \textcircled{6} \\ \hline \end{array}$$

其中

$$\textcircled{1} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{2} = \begin{bmatrix} A_{1,k+1} & \dots & A_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k,k+1} & \dots & A_{k,N} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{3} = \begin{bmatrix} A_{k+1,1} & \dots & A_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{N,1} & \dots & A_{N,k} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{4} = \begin{bmatrix} A_{k+1,k+1} & \dots & A_{k+1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{N,k+1} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{5} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{6} = \begin{bmatrix} B_{k+1} \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}$$

下标 $1 \cdots k$ 指外表面, $k+1 \cdots N$ 指“内表面”。各个块的物理意义为:

- ① = 表面源汇对表面控制点的影响,
- ② = 中弧面涡层对表面控制点的影响,
- ③ = 表面源汇对内控制点 (Kutta 脱体流控制点) 的影响,
- ④ = 中弧面涡层对内控制点的影响,
- ⑤ = 表面控制点的边界条件,
- ⑥ = 内控制点的边界条件。

场 ① 是对物体的“纯”(无升力)位势理论的绕流,

场 ② 是涡层对源汇的影响,

场 ③ 和 ④ 是附加的 Kutta 脱体流条件。

如已熟知的,这种方程组的求解强烈地依赖于对角元素数量级占优势的程度。

至少对于区域 ① 所采用的最简单的办法是达到两个要求:

——从一个格网块平面到邻近格网块平面的角度变化应该尽可能小。

——从一个元素到另一元素格网块尺寸的改变应该尽可能小。

利用了对称条件可以使计算时间显著减少。飞机机身对于 z, x ——平面几乎总是对称的。机身的这种对称性可在列出或求解方程时有益地利用;对来流的限制(攻角,侧滑角)则不必加上。

a) 使来流矢量平行于 zx ——平面(在此平面中任意取向),这样,基准元素和对称元素的待求奇点强度的大小相等符号相同。

b) 使来流矢量平行于 y 轴,这样,就使得基准元素和对称元素的待求奇点强度的大小相等符号相反。

假如在方程组中仅有一半影响系数,那应矩阵只有原来的四分之一:

方程组:
$$\sum_{j=1}^{2N} A_{ij} x_j = B_i \quad (i=1, 2, \dots, 2N),$$

基准元素: $1, \dots, N,$

对称元素: $N+1, \dots, 2N,$

即: $x_{N+1} = x_1, x_{N+2} = x_2, \dots, x_{2N} = x_N$, 这样,方程组就成为:

$$\sum_{k=1}^N (A_{ik} + A_{i, N+k}) x_k = B_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

利用修正的 Gauss-Seidel 迭代可进一步降低计算费用。众所周知,当对角元素不占优势时,这种标准过程用于③和④部分是收敛的,只是收敛特性很不好。这方法可作改变如下:

A) Gauss-Seidel 法用在 ①, ②, ⑤ 部分的方程组上。

一直用到第一次迭代循环后,求得第一次近似值 $\sigma_j^{(1)}$ 为止。

B) 用 $\sigma_j^{(1)}$ 计算 ③, 并利用直接 Gauss-Jordan 法解部分方程组 ③, ④, ⑥ 以确定 $\mu_j^{(1)}$ 。

C) 用 $\mu_j^{(1)}$ 计算 ② 并重复步骤 A 以确定 $\sigma_j^{(2)}$, 等等。

利用这种迭代——直接求解的结合方法, 必需的迭代次数比原来 Gauss-Seidel 法减少了过半。

3.3 可压缩性和流动介质的影响

通常利用著名的 Göthert 法则考虑绕流三维物体时的可压缩性。但这法则仅对小扰动即细长物体的结果较好。而计算翼身组合体则要求把这一法则同样应用于粗厚物体。与测量结果相比在翼剖面头部或机身前体有过高的吸力峰, 其原因是在一个相似的(畸变了)比较图形(对此图形作不可压缩流动计算)中满足运动学流动条件。在以往各种方法中, 应用半经验公式([14]中的 Weber-Wilby 修正, [7]中的非线性修正项)作出了改进, 而本文则在满足真实的(不畸变的)物体的边界条件时使用 Göthert 法则的一种变化形式。

对此, 可按如下步骤处理:

- 利用 Göthert 变换, 计算相似物体的形状。
- 建立方程组, 按(14)式计算相似物体的扰动位势。
- 在变换到真实物体形状后, 反算未知的扰动位势梯度 $\nabla\varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi_a}{\partial x} \cdot \frac{1}{\beta^2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi_a}{\partial y} \cdot \frac{1}{\beta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{\partial\varphi_a}{\partial z} \cdot \frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

——在同时满足真实物体的边界条件(7)情况下解方程组。

——按(2)式计算总速度矢量 $\mathbf{V}$, 并按等熵关系计算压力系数 c_p 。

在和许多粗厚体及翼身组合体的测量结果作深入比较后指出^[8, 9, 10], 使用这种和过去的 Göthert 法则表达形式不同的公式, 得到可适用于表面曲率很大的区域的重要改进。在变化较缓的区域中, 可压缩性法则的两种表达式可互相转化。

3.4 气动力系数的计算

为了确定当地气动力及总的量, 对算出的压力分布进行积分。在格网法中只须通过适当方式简单求每个格网块的单项规范化力或力矩分量的和即可得到。因为在每个表面元素上都是等载荷分布, 所以当足够精细地划分格网时, 和式相当于一个梯形积分。^[11]

4. 结 果

4.1 压力分布

对于无升力粗机身和对于升力细长机翼用比本文所述方法费用更少的方法也能得到可用的结果, 但那些方法对考虑了干扰的翼身组合体不适用。

在下述算例中, 翼身配置, 即机翼相对于机身轴的高度和前后位置, 作系统的改变。DFVLR^[12, 13] 比较了计算与测量的结果。

H. Körner 对不可压缩流动的多项测量^[12]用作比较的基础。

图 7 为矩形翼——机身组合体。划分 778 个表面元素和 204 个内部附着马蹄涡元素进

行计算, 结果见图 8, 9, 10, 特别注意翼根部分。测量和理论的偏差很小。这里正的或负的攻角相应于低翼或高翼布局。

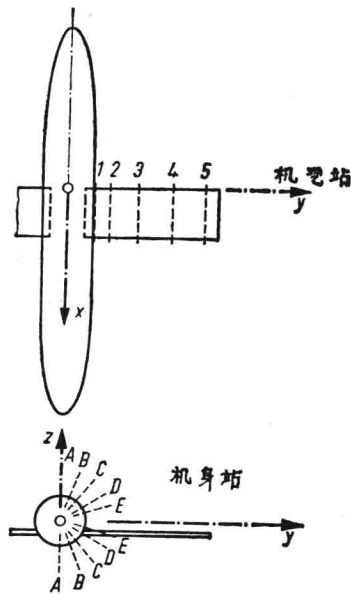


图 7 低(高)翼布局的翼身组合体(几何形状)
(取自 H. Körner^[12]) 低翼, $z_0/D = -0.25$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\varepsilon = 0^\circ$, $\Delta = 6$, 修正 RAE101 翼型, 9%

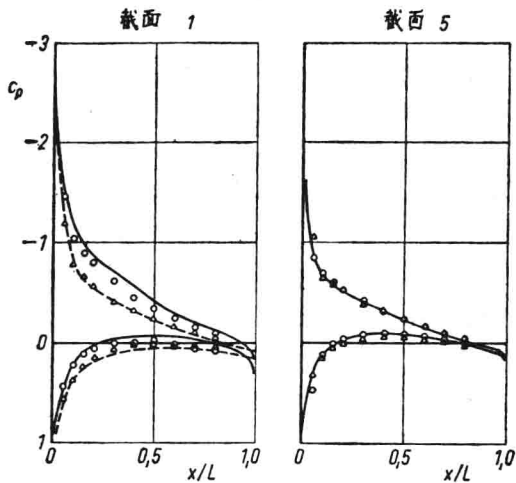


图 8 $M_\infty = 0$ 时在图 7 所示两个翼剖面上的
测量和计算压力分布的比较

测量[12]	计 算	α
○	—	5.8°
△	---	-5.8°

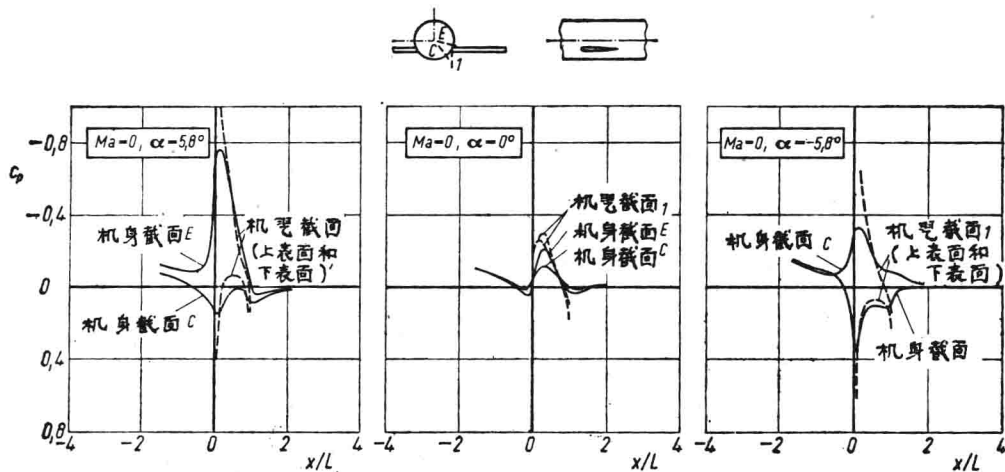


图 9 图 7 所示翼身贯通处的压力分布

翼身贯通区域在图 9 中另作描绘。比较了最里面的机身纵截面和机翼第一个截面的计算压力分布。要看清机身压力分布的趋势, 它接近机翼压力分布, 这暗示机翼的 Kutta 条件“印”在机身上了。

把同样机翼的位置移前得到的结果见图 10。这里, 测量和计算令人满意地一致。

为了在可压缩流域中检验这种计算方法, 与 Schneider 的测量^[13]作了比较。图 11 表示

所研究的翼——身组合体的形状,图 12 是 $Ma=0.7$ 及 $\alpha=6^\circ$ 时的比较。这时,在机翼上计算值超过 c_p 临界,如前所述,理论压力分布的偏差是预料中的。但是这是局部的,只发生在压力峰值的附近。在 Mach 数较高时,机身结果的符合也很好。

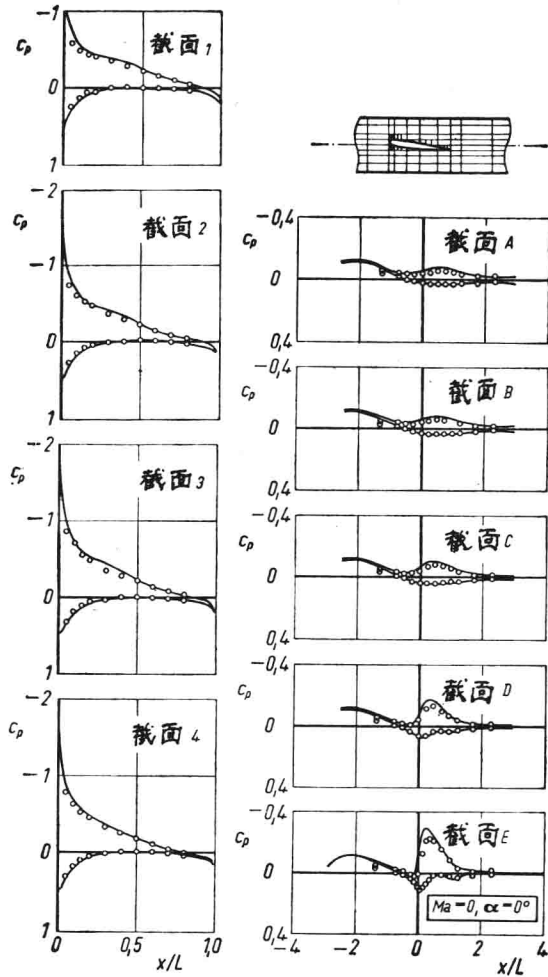


图 10 图 7 所示翼身组合体的机翼相对于机身轴前移。测量和计算压力分布的比较
 $Ma=0.7, \alpha=0^\circ, \varphi=45^\circ, \varepsilon=6^\circ,$
 ○ 测量^[12], — 计算

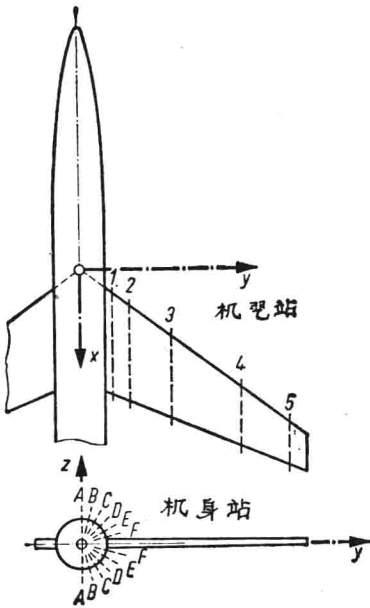


图 11 可压缩流域中的翼身组合体(几何形状)(取自 W. Schneider^[13])后掠翼,
 $\Delta_{td}=6, \varphi_{50}=30^\circ, \lambda=0.33, \varepsilon=0^\circ, D/b=0.111$, 修正 RAA101 翼型, 9%

把经前述例子检验过的这种方法使用在整架飞机模型上(图 13)除了格网块数显著增加外没有很大的困难。机身上及进气口附近的压力分布对于总体设计是极为重要的资料。考虑所有干扰效应以及机翼厚度和弯度后的机翼压力分布的校核计算作为布局概念的重要检验。对翼——身——进气道集合体的深入研究表明了应用这种方法的可能性。

最后提及,格网法决不限于确定压力分布。求出物体表面以及整个外部空间的速度值和方向的分布(图 14)后,即得到绕流过程的细节,并可为计算表面边界层提供依据,以及说明下游流场中柱杆、外挂物和尾翼的一些问题。