

初中各科知识精解丛书

数 学

Shuxue

刘绍贞 主编

包惠出版社

初中各科知识精解丛书

學 學

Summary

初中各科知识精解丛书

数 学

刘绍贞 主编

气象出版社

(京) 新登字046号

内 容 简 介

本书是《初中各科知识精解丛书》中的一个分册。它以国家教委新颁布的《中学各科教学大纲》和《考试说明》为纲，以新编通用教材为依据编写而成。

本书共分四个部分，第一部分代数；第二部分几何；第三部分综合题精解；第四部分数学常用解题方法。每部分都由“知识精解”、“重点”、“难点”、“考点精解”、“习题精练”、“参考答案”所组成，对本部分的重点知识，作了极其精当的提示、介绍、以及对重点、难点、考点进行典型题的精要分析，并选编了一些综合性较强的习题。

本书可供初中在校学生和自学者阅读，也可供初中教师参考。

初中各科知识精解丛书

数 学

刘绍贞 主编

责任编辑：陈爱丽 终审：周诗健

封面设计：牛涛 责任技编：岳景增 责任校对：白璐

气象出版社出版

(北京西郊白石桥路46号)

北京密云华都印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销
开本：787×1092 1/32 印张：12.375 字数：272千字

1994年4月第一版 1994年4月第一次印制

印数：1—4500 定价：6.50元

ISBN 7-5029-1501-X/G · 0364

《初中各科知识精解丛书》编写说明

一、编写指导思想

本丛书以国家教委新颁《中学各科〈教学大纲〉》和《考试说明》为纲，以新编通用教材为依据，紧紧围绕各门课程的重点、难点与考点，进行知识梳理、能力分解、规律总结，以提高学生的智能和学习考试成绩。这是本丛书的编写宗旨。

二、编写体例

本丛书各分册的每一章(或单元)，一般由三大部分组成。即：“知识精要”；“重点、难点、考点精解”；“习题精练”。在“知识精要”部分，主要对本章的重点知识，作极其精当的提示、介绍，以帮助学生从宏观上能把握本章的重点知识以及整个知识网络的关系；在“重点、难点、考点精解”部分，主要结合《教学大纲》和《考试说明》规定的知识能力要求，对本章的学习重点、难点、考点通过“典型题例”的精要分析，以帮助学生从正反两个方面全面、深入地理解知识的实质、深层结构及相互关系，从而提高其运用知识解决问题的能力；在“习题精练”部分，应本着“少而精”的原则，选编一些能够“举一反三”、概括某些学习规律的练习，使学生通过练习，自觉地总结出学习规律，提高思维能力和解题能力。

三、本书编写特点

本书编写除以新颁《教学大纲》为纲，以通用教材为依

据外，在编写上围绕一个“精”字。其显著特点：(1)知识要点“精”；(2)重点、难点、考点解析“精”；(3)自测练习“精”。

《初中各科知识精解丛书》编委会

1994年7月

《初中各科知识精解丛书》编委会名单

主 编：渝 江

副主编：希艳琴 李之绥

委 员：（按姓氏笔画为序）

乔根慧 刘绍贞 李之绥

李隆顺 张永昌 希艳琴

赵淑莲 渝 江 蔡建权

《数学》分册编写组名单

主 编：刘绍贞

编写者：（按姓氏笔画为序）

王秋芳 刘绍贞

李东升 盛德先

出版说明

本书编写的目的是深入贯彻国家教委新颁布的数学教学大纲,为面临初三毕业的考生提供少而精的学习、复习用书,为家长辅导提供可靠的依据,为在校学习的初中学生提供学习数学的方法,查找知识的课外读物。

参加本书编写的是北京西城区、海淀区的四位中学数学高级教师,他们将几十年积累的教学经验及宝贵的资料奉献给读者。

为适应学习、复习方便,本书的结构分为知识精要、重点、难点、考点精解、习题精选等,特别精选了近60例综合题解。最后,有开阔思路的数学常用解题方法。

本书若有不妥之处请批评指导。

《数学》分册编写组

目 录

第一部分 代 数

第一章 数与式	(1)
一、知识精要	(1)
二、重点、难点、考点精解	(1)
三、习题精练	(29)
第二章 方程和方程组	(49)
一、知识精要	(49)
二、重点、难点、考点精解	(49)
三、习题精练	(92)
第三章 一元一次不等式和不等式组	(113)
一、知识精要	(113)
二、重点、难点、考点精解	(113)
三、习题精练	(127)
第四章 函数	(134)
一、知识精要	(134)
二、重点、难点、考点精解	(134)
三、习题精练	(151)
第五章 统计初步	(158)
一、知识精要	(158)
二、重点、难点、考点精解	(158)
三、习题精练	(161)

第二部分 几 何

第一章 三角形、四边形	(163)
-------------	-------

一、知识精要.....	(163)
二、重点、难点、考点精解.....	(165)
三、习题精练.....	(179)
第二章 相似形、解直角三角形.....	(186)
一、知识精要.....	(186)
二、重点、难点、考点精解.....	(186)
三、习题精练.....	(202)
第三章 圆.....	(213)
一、知识精要.....	(213)
二、重点、难点、考点精解.....	(213)
三、习题精练.....	(226)

第三部分 综合题精解

第四部分 数学常用解题方法

一、换元法.....	(309)
二、配方法.....	(325)
三、待定系数法.....	(347)
四、方程分析法.....	(368)
五、直接证法——综合法与分析法.....	(381)
六、间接证法——反证法.....	(384)

第一部分 代 数

第一章 数 与 式

一、知 识 精 要

1. 了解：实数及代数式的分类，因式分解的概念。

2. 理解：数轴、相反数、倒数、立方根、表算、分式、最简分式、繁分式、二次根式、最简二次根式、同类二次根式等概念。

3. 掌握：有关数的绝对值、比较大小、平方根及算术平方根；代数式的值、同类项、整式运算法则、添去括号法则、分式基本性质、运算法则及繁分化简；二次根式的性质、运算法则及分母有理化，零指数、负整数指数、分数指数及其运算法则和科学记数法。

4. 灵活运用：有理数运算法则、运算律及运算顺序；乘法公式及提取公因式法、运用公式法、十字相乘法、分组分解法等分解因式的方法。

二、重点、难点、考点精解

例1 若 a 为整数且 $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{7}$ ，求 a 。

解： $a = \pm 2$

例2 求 $\sqrt{9}$ 的平方根和算术平方根。

解：因为 $\sqrt{9} = 3$ ，所以 $\sqrt{9}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$ ，算术平方根是 $\sqrt{3}$ 。

例3 用科学记数法表示下列各数：

(1) 0.00207；(2) 102300000

解：(1) $0.00207 = 2.07 \times 10^{-3}$

(2) $102300000 = 1.023 \times 10^8$

例4 若 $|a+3| = 1$ ，求 a 。

解：因为由 $|a+3| = 1$ 得 $a+3 = \pm 1$ 。

当 $a+3 = 1$ 时 $a = -2$ ，当 $a+3 = -1$ 时 $a = -4$ 。

所以： $a = -2$ ， $a = -4$ 。

例5 已知 $a > b$ 且 $b < 0$ ，化简：

$$\sqrt{b^2 - 2ab + a^2} + |a - b| + \sqrt{b^2}。$$

解：
$$\begin{aligned} & \sqrt{b^2 - 2ab + a^2} + |a - b| + \sqrt{b^2} \\ &= \sqrt{(b - a)^2} + |a - b| + \sqrt{b^2} \\ &= a - b + a - b - b \\ &= 2a - 3b。 \end{aligned}$$

例6 若 a 和 b 是实数且满足等式

$(a-1)^2 + |b-2| = 0$ ，求 a 与 b 之值。

解：根据非负概念知 $(a-1)^2 \geq 0$ 且 $|b-2| \geq 0$ ，又已知 $(a-1)^2 + |b-2| = 0$ ，所以可得 $(a-1)^2 = 0$ ，即 $a = 1$ ， $|b-2| = 0$ ，即 $b = 2$ 。

所以 $a = 1$ ， $b = 2$

例7 指出 $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的区别与联系。

解：二者字母的取值范围不同， $(\sqrt{a})^2$ 中 $a \geq 0$ ，而 $\sqrt{a^2}$ 中 a 取一切实数。

二者运算顺序不同： $(\sqrt{a})^2$ 是先开方再平方，而 $\sqrt{a^2}$ 是先平方再开平方取算术平方根。

二者计算结果不同： $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$

$$\text{而 } \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

二者全是非负数，即全是零和正数， $(\sqrt{a})^2 \geq 0$ ， $\sqrt{a^2} \geq 0$ 。

例8 求值或化简下列各式

$$(1) \quad \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$(2) \quad \sqrt{m^2 - 2mn + n^2} \quad (m < n)$$

$$(3) \quad |x^2|$$

$$(4) \quad |a| - |1 - a| \quad (a < 0)$$

$$(5) \quad \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

解：

$$(1) \quad \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$(2) \quad \sqrt{m^2 - 2mn + n^2} = \sqrt{(m - n)^2} = n - m \quad (m < n)$$

$$(3) \quad |x^2| = x^2$$

$$(4) \quad |a| - |1 - a| = -a - (1 - a) = -a - 1 + a = -1 \quad (a < 0)$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{2^2-4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

例9 如果 a, b 是有理数, 求 $\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b}$ 的值。

解:

(1) 当 a, b 同号时, $\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} = 0$

(2) 当 $a > 0, b < 0$ 时,

$$\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} = \frac{a}{a} - \frac{-b}{b} = 1 + 1 = 2$$

(3) 当 $a < 0, b > 0$ 时,

$$\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} = \frac{-a}{a} - \frac{b}{b} = -1 - 1 = -2$$

例10 如果 $|a| = 3, |b| = 10$, 且 $ab < 0$, 求 $|a - b|$ 和 $|a + b|$ 的值。

解: 根据已知条件 $|a| = 3$ 及 $|b| = 10$, 可得到 $a = \pm 3, b = \pm 10$ 。又已知 $ab < 0$ 只能有两种情况:

(1) a 取3, b 取-10; (2) a 取-3, b 取10。

于是 $|a - b| = |3 - (-10)| = 13$

$$|a - b| = |-3 - 10| = 13$$

$$|a + b| = |3 + (-10)| = 7$$

$$|a + b| = |-3 + 10| = 7$$

$\therefore |a - b| = 13, |a + b| = 7$

例11 用代数式表示下列各数(自己假定字母)。

(1) 偶数; (2) 奇数; (3) 两位数; (4) 被3除余1的整数;

(5) 三个连续整数; (6) 两个偶数的平方差。

解:

(1) $2n$ (n 为整数)

(2) $2n+1$ 或 $2n-1$ (n 为整数)

(3) $10a+b$ (a, b 为0到9中的整数且 $a \neq 0$)

(4) $3n+1$ (n 为整数)

(5) $n, n+1, n+2$ (n 为整数)

(6) $(2n)^2 - (2m)^2$ (m, n 为整数)

例12 用代数式表示

(1) 梯形的下底是上底的2倍, 高比上底小3, 设上底为 a , 写出梯形的面积。

解: 上底为 a , 则下底为 $2a$, 高为 $a-3$, 梯形面积为:

$$(a+2a) \cdot \frac{a-3}{2} \quad (\text{平方单位}).$$

(2) 一个矩形的周长是 a , 它的长是 b , 写出矩形的面积。

解: 矩形面积 $= b \left(\frac{a}{2} - b \right)$ (平方单位)

(3) 浓度为70%的酒精溶液 x 克, 其中含纯酒精和含水各多少?

解: 含酒精 $70\% \cdot x$, 含水 $30\% \cdot x$ 。

(4) 一个两位数, 个位数字与十位数字的和为14, 若个位数字与十位数字对调, 则新的两位数是多少?

解: 设个位数字是 a , 则十位数字是 $14-a$, (这里 $14-a$ 只能是0到9中的整数, a 必须大于等于5, 小于等于9, 即5, 6, 7, 8, 9)

原两位数是 $10(14-a) + a$

新的两位数是: $10a + (14-a)$ ($5 \leq a \leq 9$)

说明: 要注意一个代数式中的字母取值不得使代数式和

实际问题失去意义，如若 $a=4$ ，则十位数字是10，失去实际问题的意义。

例13 代数式 $2(x-1)^2+5$ ，在 x 等于什么值时，代数式有最小值，并求出最小值。

解：∵ $(x-1)^2 \geq 0$ ，只有当 $x-1=0$ 时， $2(x-1)^2=0$ ，而 $0+$ 常数小于任何正数 $+$ 常数。

∴ 当 $x=1$ 时， $2(x-1)^2+5$ 有最小值是5。

例14 代数式 $-3x^2+10$ 有没有最小值？有没有最大值？如果有是多少？

解：∵ $x^2 \geq 0$ ， $-x^2 \leq 0$ ，只有当 $x=0$ 时， $-3x^2=0$ ， $0+$ 常数大于任何负数 $+$ 常数

∴ 当 $x=0$ 时， $-3x^2+10$ 有最大值是10，没有最小值。

例15 把一块长、宽分别为 a 、 b 的长方形铁片，在四角各剪去一个边长为 x ($x < a$, $x < b$)的正方形，然后做成一个无盖的长方体盒子，用代数式表示它的容积，当 $a=8$ 厘米， $b=6$ 厘米， $x=2$ 厘米，求盒子的容积。

解：盒子长为 $a-2x$ ，宽为 $b-2x$ 。高为 x ，则表示盒子容积的代数式为：

$$(a-2x)(b-2x)x$$

当 $a=8$ ， $b=6$ ， $x=2$ 时

$$\begin{aligned} & (a-2x)(b-2x)x \\ &= (8-2 \times 2)(6-2 \times 2) \times 2 \\ &= 4 \times 2 \times 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

答：当 $a=8$ 厘米， $b=6$ 厘米， $x=2$ 厘米时，盒子的容积为16平方厘米。

例16 求多项式 $2x^2 - 5x + x^2 + 4x - 3x^2 - 2$ 的值，其中

$$x = \frac{1}{2}。$$

解法一：把 $x = \frac{1}{2}$ 代入多项式，得

$$\begin{aligned} & 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{4} - 2 \\ &= -2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

解法二：先合并同类项

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + x^2 + 4x - 3x^2 - 2 \\ &= (2 + 1 - 3)x^2 + (-5 + 4)x - 2 \\ &= -x - 2 \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = -\frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{2}$$

说明：比较两种解法可知解法二简单，即先合并同类项后再求值。

例17 求多项式 $3a + abc - \frac{1}{3}c^2 - 3a + \frac{1}{3}c^2$ 的值。其

中， $a = -\frac{1}{6}$ ， $b = 2$ ， $c = -3$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= (3 - 3)a + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)c^2 + abc \\ &= abc \end{aligned}$$