21世纪高等教育计算机规划教材

COMPUTER

离散数学

Discrete Mathematics

汪小燕 叶红 主编

杨思春 周义莲 副主编

- 通俗易懂、简明扼要
- 循序渐进、知识点全面
- 例题经典、习题丰富

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等教育计算机规划教材

COMPUTER

离散数学

Discrete Mathematics

汪小燕 叶红 主编

杨思春 周义莲 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 汪小燕，叶红主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2014.9

21世纪高等教育计算机规划教材

ISBN 978-7-115-36540-8

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①汪… ②叶… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第174068号

内容提要

本书是针对高等院校离散数学课程而编写的教材。全书共 9 章，分为数理逻辑、集合论、代数系统和图论 4 个部分。主要内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、二元关系、函数、代数结构、格和布尔代数、图和树。在编写过程中，作者充分考虑初学者的学习特点，在章节内容编排、叙述表达、例题选择、课后习题等方面做了精心设计，内容通俗易懂、简明扼要，大部分理论概念都用实例说明并配有一定数量的习题。

本书适合作为高等院校计算机、软件工程、网络工程、管理科学等专业的离散数学教材，也可作为计算机相关专业的自学参考书。

◆ 主　　编　汪小燕　叶　红
　副 主 编　杨思春　周义莲
　责任编辑　邹文波
　执行编辑　吴　婷
　责任印制　彭志环　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：12　　　　2014 年 9 月第 1 版
　字数：277 千字　　2014 年 9 月河北第 1 次印刷

定价：29.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前 言

离散数学（又称计算机数学）是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支。离散数学的主要内容包括数理逻辑、集合论、代数结构和图论 4 部分。它为后继课程，如数据结构、编译原理、数据库、形式语言与自动机、人工智能和操作系统等提供必要的数学基础。因此它不仅是计算机科学与技术及相关专业的一门核心和骨干课程，也是计算机科学与技术的基础理论之一。从计算机学科发展的过去、现在和未来看，离散数学这门课程有着其他课程不可替代的地位和作用，是一门承前启后的课程。学习离散数学对于训练和培养学习者抽象思维能力和逻辑思维能力有着十分重要的作用，并且有助于编程能力的提高。

本书共 9 章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、二元关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图和树。本书是从事离散数学课程教学一线的老师结合多年教学实践与理论研究，参考国内外教材，在力求通俗易懂、简明扼要的指导思想下编写而成的。本书包含大量的例题解析，有助于学习者掌握离散数学的理论知识。

本书由安徽工业大学的汪小燕、叶红、杨思春、周义莲 4 位老师编写。汪小燕编写第 1 章和第 2 章，杨思春编写第 3 章～第 5 章，叶红编写第 6 章和第 7 章，周义莲编写第 8 章和第 9 章。

本书在编写过程中，得到了安徽工业大学计算机科学与技术学院王小林副院长和有关同事的热情关心、支持和帮助，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不当和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

安徽工业大学

2014 年 6 月

目 录

第 1 章 命题逻辑

数理逻辑是应用数学方法研究推理的科学，它作为计算机科学的一种重要知识表示工具，能将所研究的对象及其相互关系形式化，并进行简单的逻辑推理。数理逻辑包括命题逻辑和谓词逻辑。命题逻辑是研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系，是谓词逻辑的基础。

1.1 命题与命题联结词

1.1.1 命题

1. 命题的概念

定义 1.1 具有唯一值的陈述句称为命题。

疑问句、祈使句和感叹句等都不能判断其真假，它们都不是命题。

例 1.1 判断下列语句哪些是命题。

(1) 4 是偶数。

(2) 一年有 10 个月。

(3) 2600 年春节，北京市的天气是晴天。

(4) 新加坡是一个国家。

(5) 这朵花真美啊！

(6) 请勿随地吐痰！

(7) 你明天有空吗？

(8) 我刚才说谎了。

解 显然，(1)～(4)都是命题，(1)和(4)的真值为真，(2)真值是假，而(3)目前尚不知真和假，但到了那一天，其真值是可以确定的。(5)～(8)都不是命题。其中(5)～(7)不是陈述句，而分别是感叹句、祈使句和疑问句。(8)虽然是陈述句，但无法确定它的真值，当它假时，可以推断出它为真；当它真时，可以推断出它为假。这种陈述句叫悖论，在命题逻辑中不讨论这类问题。

2. 命题的值

命题值可以是真的，也可以是假的，但不能同时既为真又为假。

命题中所有的“真”用 T 或 1 表示。

命题中所有的“假”用 F 或 0 表示。

3. 命题分类

命题分为两类。第一类是原子命题(或基本命题),它是由再也不能分解成更为简单的语句构成的命题,原子命题是命题逻辑的基本单位。

例如:我是一个教师。

第二类是分子命题(或复合命题),它是由若干个原子命题使用适当的联结词所组成的新命题。例如:我是一个教师和他是一个学生。

4. 命题的表示

原子命题常用 26 个大写的英文字母表示。例如,用 P 表示北京是我国的首都,记为 P:北京是我国的首都。

1.1.2 命题联结词

在离散数学中有 5 个常用的命题联结词,下面一一进行介绍。

1. 否定词(非运算)

(1) 符号:$\neg$(读作“非”或“否定”)。

设命题为 P,则 $\neg P$ 读作“P 的否定”或“非 P”。

(2) 否定联结词“$\neg$”的定义如表 1.1 所示。

表 1.1 $\neg$的定义

P	$\neg P$
1	0
0	1

例 1.2 举例说明如何构成命题的否定。

解 设命题

P:马鞍山是一个城市。

该命题的否定为

$\neg P$:马鞍山不是一个城市。

可见,否定联结词是对单个命题进行操作,称它为一元联结词。

2. 合取词(与运算)

(1) 符号:$\wedge$。

设 P,Q 为两个命题,则 $P\wedge Q$ 可以有多种读法:P 合取 Q、P 与 Q 的合取、P 与 Q、P 并且 Q。

(2) 当且仅当 P 和 Q 的真值同为真,命题 $P\wedge Q$ 的真值才为真;否则,$P\wedge Q$ 的真值为假。合取联结词 $\wedge$ 的定义如表 1.2 所示。

表 1.2 ∧的定义

P Q	$P \wedge Q$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

注意:在 $P \wedge Q$ 中,P 和 Q 是互为独立的,地位是平等的,P 和 Q 的位置可以交换而不会影响 $P \wedge Q$ 的结果。

由合取词连接的命题为复合命题,它为二元联结词。

例 1.3 用合取联结词表示命题。

(1) 小李会弹琴且小张会画画。

解 令 P:小李会弹琴。

Q:小张会画画。

本例可表成:$P \wedge Q$。

(2) 小王一边吃饭,一边看电视。

解 令 P:小王吃饭。

Q:小王看电视。

本例可表成:$P \wedge Q$。

自然语句中的"既…又…""不但…而且…""不仅…而且…""一边…一边…""虽然…但是…"等都可符号化为 $P \wedge Q$ 的形式。并非所有的"和","与"都可符号化为∧。

如:武大郎和武松是亲兄弟。

该语句中虽然出现"和",但它却不是复合命题,不能用合取词联结,它是一个简单命题。

(3) 太阳落山了与房间里有许多书。

解 令 P:太阳落山了。

Q:房间里有许多书。

本例可表成:$P \wedge Q$。

在此例中,合取词用在不相关的两个命题之间,在日常生活中,我们常将"合取"表示具有某种关系的两个命题;而在逻辑学中,合取词可以用在两个毫不相干的命题之间。

3. 析取词(或运算)

(1) 符号:∨

设 P,Q 为两个命题,则 $P \vee Q$ 可以有多种读法:P 与 Q 的析取、P 或 Q。

(2) 当且仅当 P 和 Q 的真值同为假,命题 $P \vee Q$ 的真值才为假;否则,$P \vee Q$ 的真值为真。析取联结词∨的定义如表 1.3 所示。

表 1.3 ∨的定义

$P\ Q$	$P\vee Q$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

注意:在 $P\vee Q$ 中,P 和 Q 是互为独立的,地位是平等的,P 和 Q 的位置可以交换而不会影响 $P\vee Q$ 的结果。由析取词连接的命题为复合命题,它为二元联结词。

例 1.4 用析取联结词表示命题。

(1) 她是电影明星或她是歌唱家。

解 令P:她是电影明星。

Q:她是歌唱家。

本例可表成:$P\vee Q$。

(2) 秋天是收获的季节或者 4+2=6。

解 令P:秋天是收获的季节。

Q:4+2=6。

本例可表成:$P\vee Q$。

注意:"或"可分为两种,一种是"可兼或"(记为"∨"),另一种是"不可兼或"(记为"▽")。如例 1.4 中两个命题用可兼或。"不可兼或"举例如下。

令 P:小张获奖。Q:小王获奖。则小张或小王有一人获奖可表示成:$P\triangledown Q$。

也可用多个联结词符号化该命题为:$(P\wedge \neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

4. 蕴涵词(单条件联结词)

(1) 符号:→。

设 P、Q 为两个命题,则 $P\rightarrow Q$ 可以有多种读法:如果 P 则 Q、P 蕴含 Q、P 仅当 Q、Q 当且 P、P 是 Q 的充分条件。

在 $P\rightarrow Q$ 中,P 称为前件、条件,Q 称为后件、结论。

(2) 当且仅当 P 为真,Q 为假时,命题 $P\rightarrow Q$ 的真值才为假;否则,$P\rightarrow Q$ 的真值为真。蕴涵词联结词→的定义如表 1.4 所示。

表 1.4 →的定义

$P\ Q$	$P\rightarrow Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

由蕴涵词连接的命题为复合命题,它为二元联结词。

假设 $P\rightarrow Q$ 为原命题,则和原命题对应的有:逆命题、反命题和逆反命题。这三种命

题解释如下。

逆命题：给定命题 $P\rightarrow Q$，则把 $Q\rightarrow P$ 称为命题 $P\rightarrow Q$ 的逆命题。

反命题：给定命题 $P\rightarrow Q$，则称 $\urcorner P\rightarrow\urcorner Q$ 为命题 $P\rightarrow Q$ 的反命题。

逆反命题：给定命题 $P\rightarrow Q$，则称 $\urcorner Q\rightarrow\urcorner P$ 为命题 $P\rightarrow Q$ 的逆反命题。

例 1.5 用蕴涵联结词表示命题。

(1) 如果明天下雨，体育课就改时间上。

解 令 P：明天下雨。

Q：体育课改时间上。

本例可表成：$P\rightarrow Q$。

(2) 若 $3+2=6$，则太阳从西边升起。

解 令 P：$3+2=6$。

Q：太阳从西边升起。

本例可表成：$P\rightarrow Q$。而且该命题为真。

注意：(1) 在自然语句中"如果 P，则 Q"中的 P 与 Q 往往有某种内在的联系，否则无意义。而在数理逻辑中 P 与 Q 不一定有什么内在联系。只要 P,Q 能够分别确定真值，$P\rightarrow Q$即成为命题。

(2)自然语句中的"只要 P 就 Q""P 仅当 Q""Q 当且 P""只有 Q 才 P""除非 Q 才 P"等都可符号化为 $P\rightarrow Q$ 的形式。现举几个命题如下。

令 P：明天天气好。Q：我们去春游。则 $P\rightarrow Q$：只要明天天气好，我们就去春游。

令 P：你支持。Q：我们完成这项工作。则 $Q\rightarrow P$：只有你支持，我们才能完成这项工作。

令 P：9 能被 5 整除。Q：9 能被 3 整除。则 $Q\rightarrow P$：除非 9 能被 5 整除，9 才能被 3 整除。

令 P：天下雨。Q：他乘公共汽车上学。则 $Q\rightarrow P$：除非天下雨，否则他不乘公共汽车上学。

例 1.6 将下列命题符号化，并判断其真值。

(1) 若 $3\times2=6$，则 $9+3=12$。

(2) 若 $3\times2\neq6$，则 $9+3=12$。

(3) 若 $3\times2=6$，则 $9+3\neq12$。

(4) 若 $3\times2\neq6$，则 $9+3\neq12$。

解 P：$3\times2=6$。Q：$9+3=12$。

(1) 符号化为 $P\rightarrow Q$，真值为 1。

(2) 符号化为 $\urcorner P\rightarrow Q$，真值为 1。

(3) 符号化为 $P\rightarrow\urcorner Q$，真值为 0。

(4) 符号化为 $\urcorner P\rightarrow\urcorner Q$，真值为 1。

5. 等价词(双条件联结词)

(1) 符号：$\leftrightarrow$。

设 P,Q 为两个命题，则 $P\leftrightarrow Q$ 可以有多种读法：P 当且仅当 Q、P 等价 Q、P 是 Q 的

充分必要条件。

(2) 当且仅当 P 和 Q 取值相同时，命题 $P \leftrightarrow Q$ 的真值才为真；否则，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为假。等价联结词↔的定义如表 1.5 所示。

表 1.5　↔的定义

P　Q	$P \leftrightarrow Q$
0　0	1
0　1	0
1　0	0
1　1	1

在 $P \leftrightarrow Q$ 中，P 和 Q 地位是平等的，P 和 Q 的位置可以交换而不会影响 $P \leftrightarrow Q$ 的结果。由等价词连接的命题为复合命题，它为二元联结词。

例 1.7　用等价联结词表示命题。

(1) 平面上二直线平行当且仅当这二直线不相交。

解　令 P：平面上二直线平行。

　　Q：这二直线不相交。

本例可表成：$P \leftrightarrow Q$。

(2) 5＋5＝10 当且仅当雪是白色的。

解　令 P：5＋5＝10。

　　Q：雪是白色的。

本例可表成：$P \leftrightarrow Q$。

例 1.8　将下列命题符号化，并判断其真值。

(1) 若 3×2＝6 当且仅当 9＋3＝12。

(2) 若 3×2≠6 当且仅当 9＋3＝12。

(3) 若 3×2＝6 当且仅当 9＋3≠12。

(4) 若 3×2≠6 当且仅当 9＋3≠12。

解　P：3×2＝6。Q：9＋3＝12。

(1) 符号化为 $P \leftrightarrow Q$，真值为 1。

(2) 符号化为 $\neg P \leftrightarrow Q$，真值为 0。

(3) 符号化为 $P \leftrightarrow \neg Q$，真值为 0。

(4) 符号化为 $\neg P \leftrightarrow \neg Q$，真值为 1。

命题联结词在使用中的优先级如下。

(1) 运算时，先括号内，后括号外。

(2) 联结词在运算时的优先次序从高到低排列为：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

(3) 对于 $\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$ 来说，相同的联结词按从左到右的次序进行运算。

如：$\neg P \vee (Q \vee R)$ 可省去括号，而 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 中的括号不能省去，因为“$\rightarrow$”不满足结合律。

(4) 最外层的括号一律可省去。

例如：$(P \rightarrow Q \vee R)$ 可写成 $P \rightarrow Q \vee R$

命题联结词小结如下。

(1) 除"$\neg$"为一元运算外，其余4个均为二元运算。

(2) "或"可分为可兼或($\vee$)和异或($\triangledown$)(不可兼或)。

(3) 命题联结词是命题和命题之间的联结词，而不是名词之间、数字之间和动词之间的联结词。

1.2 命题公式与真值表

1.2.1 命题公式

命题公式也称为合式公式，由于命题公式中涉及命题变元、命题常元，因此首先介绍命题变元和命题常元。

1. 命题变元和命题常元

命题常元：表示确定的命题，如：{T,F}。

命题变元：没有指定真值的命题，常用大写英文字母表示。

2. 命题公式与子公式

定义1.2 由命题变元、常元、联结词、括号以规定的格式联结起来的字符串称为命题公式。

不是所有由命题变元、常元、联结词和括号所组成字符串都能成为命题公式。为此常使用递归规则定义命题公式，以便构成的公式有规则可循。

定义1.3 由下列递归规则生成的公式称为命题公式。

(1) 孤立的命题变元是一个命题公式。

(2) 若A是命题公式，$\neg A$也为命题公式。

(3) 若A、B是命题公式，则$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$均为命题公式。

(4) 当且仅当有限次使用(1)、(2)、(3)所生成的公式才是命题公式。

注意：这里A,B表示任意合式公式，而不是某个具体的公式。

例如，$(\neg(P \vee Q))$、$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$、$((P \wedge Q) \leftrightarrow R)$、$P$都是命题公式。而$(P \rightarrow)$、$(P \vee \neg)$都不是命题公式。

定义1.4 如果B是公式A中的一部分，且B为公式，则称B是公式A的子公式。

例如，设A为$(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge \neg R$，则$\neg R$、$P \leftrightarrow \neg Q$都是$A$的子公式。

1.2.2 真值表

命题变元用特定的值来取代，这一过程称为对该命题变元进行指派或赋值。

定义1.5 命题公式A在其所有可能的赋值下取得的值列成的表称为A的真值表。

构造真值表的具体步骤如下。

(1) 找出公式中所有的命题变元，列出所有可能的赋值。

(2) 按公式计算从低到高的顺序写出各层次。

(3) 对应各赋值，计算公式各层次的值，直到最后计算出整个命题公式的值。

例 1.9 构造$\neg(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\neg Q)$的真值表。

解 该公式含有两个命题变元 P 和 Q，它们一共有 4 种指派，分别为：00、01、10、11。对此 4 种指派，依据联结词的定义及其优先级和括号，逐步求出各子公式直至给定公式的真值，详见表 1.6。

表 1.6 $\neg(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\neg Q)$的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg(P\rightarrow Q)$	$P\vee\neg Q$	$\neg(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\neg Q)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

例 1.10 构造$(P\vee\neg Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)$的真值表。

解 该公式含有 3 个命题变元 P、Q、R，它们一共有 8 种指派，分别为：000、001、010、011、100、101、110、111，详见表 1.7。

表 1.7 $(P\vee\neg Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)$的真值表

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\leftrightarrow R$	$(P\vee\neg Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由例 1.9、例 1.10 可见，命题公式中有 2 个命题变元，则有 4 组真值指派；有 3 个命题变元，则有 8 组真值指派；由此推广，n 个命题变元则有 2^n个真值指派。

定义 1.6 设 A 为任一公式，在真值表中

(1) 对应每一个指派，公式 A 的真值为真，称 A 为重言式或永真式。

(2) 对应每一个指派，公式 A 的真值为假，称 A 为矛盾式或永假式。

(3) 对应公式 A 的所有指派，至少存在一组真值指派使公式 A 的真值为真，称 A 为可满足式。

命题公式有 3 种类型，分别是永真式，永假式还有可满足式。利用真值表可判断一个命题公式属于哪一种类型。

例 1.11 用真值表判定公式$(P\vee\neg Q)\leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$是永真式，永假式还是可满足式。

解 公式$(P\vee\neg Q)\leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$的真值表如表 1.8 所示。

表 1.8　$(P\vee\neg Q)\leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$ 的真值表

P	Q	$P\vee\neg Q$	$\neg P\rightarrow\neg Q$	$(P\vee\neg Q)\leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

由表 1.8 可知，$(P\vee\neg Q)\leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$ 为永真式。

1.3　命题公式的翻译

定义 1.7　把一个用文字叙述的命题相应地表示成由命题标识符、联结词和圆括号组成的形式，称为命题的符号化。命题公式的符号化就是对命题公式的翻译。

命题公式的翻译步骤如下。

(1) 找出各简单命题，分别符号化。

(2) 根据各简单命题之间的关系，选择联结词，把简单命题逐个联结起来。

命题公式的翻译应该注意下列事项。

(1) 确定给定句子是否为命题。

(2) 句子中连词是否为命题联结词。

(3) 要正确地表示原子命题和适当选择命题联结词。

例 1.12　将下列各命题符号化。

(1) 虽然这次语文考试的题目很难，但是王丽还是取得了好成绩。

解　用字母表示简单命题。

P：这次语文考试的题目很难。

Q：王丽取得了好成绩。

该命题符号化为：$P\wedge Q$。

(2) 李明是计算机系的学生，他不仅成绩好，而且品德也好。

解　用字母表示简单命题。

P：李明是计算机系的学生。

Q：李明成绩好。

R：李明品德好。

该命题符号化为：$P\wedge Q\wedge R$。

(3) 如果 $1+3>4$ 当且仅当 7 是合数，则 3 和 7 都是偶数。

解　用字母表示简单命题。

P：$1+3>4$。Q：7 是合数。R：3 是偶数。S：7 是偶数。

该命题符号化为：$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(R\wedge S)$。

(4) 一公安人员审查一起案件，事实如下。

张三或李四盗窃了机房的一台电脑，若是张三所为，则作案时间不能发生在午夜前；

若李四的证词正确，则午夜时机房的灯未灭；若其证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时机房的灯全灭了。

将案件事实符号化。

解 用字母表示简单命题。

P：张三盗窃了机房的一台电脑。

Q：李四盗窃了机房的一台电脑。

R：作案时间发生在午夜前。

S：李四的证词正确。

M：午夜时机房的灯全灭了。

该命题符号化为：$(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow\neg R)\wedge(S\rightarrow\neg M)\wedge(\neg S\rightarrow R)\wedge M$。

1.4 等价式与蕴涵式

1.4.1 等价式

有一些公式，它们的真值表是相同的，这些公式之间存在着等价的关系。下面给出两个公式等价的定义。

定义 1.8 设 A 和 B 是两个命题公式，如果对两个公式 A,B 不论作何种指派，它们真值均相同，则称 A,B 是逻辑等价的。记作 $A\Leftrightarrow B$，读作 A 等价 B。称 $A\Leftrightarrow B$ 为等价式。

由等价定义可知，等价具有如下性质。

(1) 自反性：$A\Leftrightarrow A$。

(2) 对称性：若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$。

(3) 传递性：若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$。

显然，若公式 A 和 B 的真值表相同，则 A 和 B 等价。因此，验证两公式是否等价，可利用它们的真值表。

例 1.13 证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$。

证明：列出真值表见表 1.9。

表 1.9 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$ 的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

可见，$P\leftrightarrow Q$ 和 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$ 真值表相同，得证。

注意：$\leftrightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 的区别如下。

(1) “$\leftrightarrow$”是逻辑联结词，起逻辑运算的作用。

(2) “$\Leftrightarrow$”不是逻辑联结词,它表示两公式关系的符号,因此 $A \Leftrightarrow B$ 不是命题公式。

在判定公式间是否等价时,有一些简单而又经常使用的等价式,称为基本等价式。在命题公式的化简和推理证明等方面经常要使用这些基本等价式,必须牢固地记住它们并能做到熟练运用。现将这些基本等价式列出如下。

(1) 双否定:$\neg\neg A \Leftrightarrow A$。

(2) 交换律:$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$,$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$,$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$。

(3) 结合律:$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$,$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$。

(4) 分配律:$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$。

(5) 德·摩根律:$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$。

(6) 等幂律:$A \wedge A \Leftrightarrow A$,$A \vee A \Leftrightarrow A$。

(7) 同一律:$A \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow A$,$A \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow A$。

(8) 零律:$A \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$,$A \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$。

(9) 吸收律:$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$,$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$。

(10) 互补律:$A \wedge \neg A \Leftrightarrow \mathrm{F}$(矛盾律)

$A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathrm{T}$(排中律)。

(11) 条件式转化律:$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$。

(12) 双条件式转化律:$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$

(13) 输出律:$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$。

(14) 归谬律:$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$。

注意:

(1) 证明上述 14 组等价公式的方法可用真值表法;

(2) $\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$均满足结合律,则在单一用$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$联结词组成的命题公式中,括号可以省去。

1.4.2 代入规则和替换规则

利用“代入”或“替换”可以从已知公式得到新的公式。

定理 1.1 在一个永真式 A 中,任何一个原子命题变元 P 出现的每一处,用另一个公式代入,所得公式 B 仍是永真式。本定理称为代入规则。

证明:因为永真式对任意指派,其值都是真,与所给的某个命题变元指派的真值是真还是假无关,因此,用一个命题公式代入到原子命题变元 P 出现的每一处后,所得命题公式的真值仍为真,证毕。

如命题公式 $A \vee \neg A$,用 $P \leftrightarrow Q$ 代入原子命题变元 A 出现的每一处,得到公式$(P \leftrightarrow Q) \vee \neg(P \leftrightarrow Q)$,该公式仍为永真式。

注意:

(1) 只能用命题公式代换原子命题变元,而不能去代换分子命题公式;

(2) 要用命题公式同时代换所有的同一个原子命题变元。

在命题公式 $A \vee \neg A$ 中,若用 $P \leftrightarrow Q$ 只代入原子命题变元 A 出现的一处,得到公式