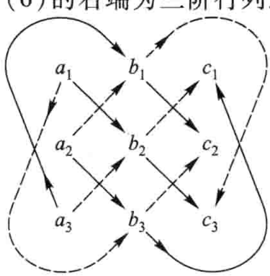
$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

表示这个行列式,也就是

$$(6)\qquad \boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.}$$

组成行列式的九个数称为行列式的元素. a_1,b_1,c_1 构成第一行;a_2,b_2,c_2 构成第二行;a_3,b_3,c_3 构成第三行;a_1,a_2,a_3 构成第一列;b_1,b_2,b_3 构成第二列;c_1,c_2,c_3 构成第三列.(横排成行,纵排成列.)a_1,b_2,c_3 构成主对角线;c_1,b_2,a_3 构成副对角线. 有时又称(6)的右端为三阶行列式的展开式.



三阶行列式的展开式中共有六项,每一项都是三个元素的连乘积,有三项前带正号,有三项前带负号. 左方的图提供了一种简便的记忆方法,实线上三个元素的连乘积都带有正号,虚线上三个元素的连乘积都带有负号.

例一. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

的值.

解:利用上图容易写出这行列式的展开式:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot5\cdot2+2\cdot(-4)\cdot1+(-1)\cdot3\cdot(-3)-$$

$$1\cdot5\cdot(-1)-3\cdot(-4)\cdot4-2\cdot2\cdot(-3)$$

$$=40-8+9+5+48+12=106.$$

解毕.

例二. 三元一次方程组的解 x,即(2)式,可改写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

解毕.

Ⅱ. 三阶行列式与二阶行列式的关系. 三阶行列式的性质

把三阶行列式(6)右端中含有 a_1, a_2, a_3 的项分别提出公因数,整理即得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

圆括号内的数,其实就是一些二阶行列式,写成二阶行列式的记号,就是

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

这说明三阶行列式与二阶行列式有密切的关系. 用二阶行列式的线性式可以表示三阶行列式.

同样,如果把(6)左端其他列或行的元素作为(6)右端一些项的公因数,可以得到其他的一些用二阶行列式表示三阶行列式的

由行列式的展开式(6),直接可验证下述定理:

定理一.一个三阶行列式中,任意一列(或一行)的三个元素与它们的代数余子式两两相乘积之和,等于这个行列式的值,即是

$$
(9)\quad \boxed{\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 \\ &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 \\ &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3.\end{aligned}}
$$

(9)的右端称为三阶行列式按一列(或一行)元素展开的一般展开式.

例三. 求行列式

$$
\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}
$$

的值.

解: 根据(9),我们试按第一行的元素展开已给的行列式:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
&=1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+5\cdot\left(-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right)+(-2)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&=-12+55+16=59.
\end{aligned}
$$

这样我们就求得了已给行列式的值.

容易看出,如果将已给行列式按第二行(或第二列)元素展开,计算就会简单些,因为第二行(或第二列)中有一元素为0,展开式中消失了一项.我们再按第二列元素展开已给行列式:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} a_1+a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

将(16)的左端按第一列的元素展开,将(16)的右端的两个行列式也都按第一列的元素展开,即知两端相等.

定理八. 若将三阶行列式中某一列(或某一行)的三个元素各加上另外某一列(或某一行)的相应元素的 λ 倍(λ 为任何常数),行列式的值并不改变. 例如:

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这是因为运用定理七及定理六的推论,可知

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

定理八对于简化行列式的计算起着极重要的作用,对于行列式

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

若 $a_1 \neq 0$,我们可以在(18)的第二列元素上各加上第一列相应元素的 $-\dfrac{b_1}{a_1}$ 倍,这样就得到

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1-\dfrac{b_1}{a_1}a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3-\dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & l_2 & c_2 \\ a_3 & l_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

以 a_1,a_2,a_3 的代数余子式 A_1,A_2,A_3 顺次乘(23)中各方程,然后取它们的和,就得到

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z$$
$$=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3,$$

根据定理一、定理九,知上式中 x 的系数就是系数行列式 Δ,y,z 的系数都是0. 上式简化为

$$\Delta\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3.$$

用类似的方法分别消去 x 及 z,y 及 x,又可得到另外两个方程. 把这三个方程写在一起:

$$(24)\qquad \begin{cases}\Delta\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3,\\ \Delta\cdot y=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3,\\ \Delta\cdot z=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3.\end{cases}$$

(24)是由(23)推导出来的,容易证明,由(24)也能推导出(23).(以 a_1,b_1,c_1 顺次乘(24)中各方程,然后取它们的和,就得到

$$\Delta\cdot(a_1x+b_1y+c_1z)=\Delta\cdot d_1,$$

约去不等于0的因数 Δ,就得到(23)中的第一个方程,同样可得到(23)中的第二、第三两个方程.)因此,(23)与(24)是等价的,也就是说(23)与(24)是同解方程组. 由(24)容易解出 x,y,z:

$$(25)\qquad \begin{cases}x=\dfrac{1}{\Delta}(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3),\\ y=\dfrac{1}{\Delta}(d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3),\\ z=\dfrac{1}{\Delta}(d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3).\end{cases}$$

这也就是方程组(23)的解.

我们再来考虑空间一点在一轴上的投影. **设有一轴 l 及一点 A,过点 A 作一平面垂直于轴 l,且交轴 l 于一点 A',我们称点 A'是点 A 在轴 l 上的投影**(图 9.12). 当点 A 在轴 l 上时,点 A'与点 A 重合.

定义. 设有一矢量$\overrightarrow{AB}$及一轴 l,矢量的起点 A 与终点 B 在轴 l 上的投影分别为点 A'与点 B',我们称轴 l 上的有向线段 $A'B'$的量 $A'B'$为矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影,记作$(\overrightarrow{AB})_l$,即(图 9.13),

$$(\overrightarrow{AB})_l=A'B'.$$

应该注意,$(\overrightarrow{AB})_l$ 不是一个矢量而是一个数量,从几何图形容易看出:当 $0<(\widehat{\overrightarrow{AB},l})<\frac{\pi}{2}$时,这个数量是正数,当$(\widehat{\overrightarrow{AB},l})=0$ 时,这个数量等于$|\overrightarrow{AB}|$;当$(\widehat{\overrightarrow{AB},l})=\frac{\pi}{2}$时,这个数量是 0,当$\frac{\pi}{2}<(\widehat{\overrightarrow{AB},l})<\pi$ 时,这个数量是负数,当$(\widehat{\overrightarrow{AB},l})=\pi$ 时,这个数量等于$-|\overrightarrow{AB}|$.

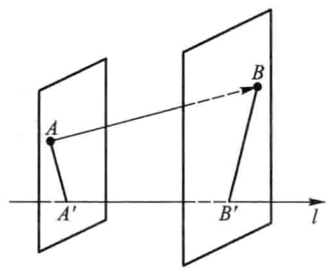


图 9.13

从定义显然有

$$(\overrightarrow{AB})_l=-(\overrightarrow{BA})_l.$$

投影第一定理. 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影等于矢量$\overrightarrow{AB}$的模与矢量$\overrightarrow{AB}$与轴 l 间夹角的余弦的积,即

$$\boxed{(\overrightarrow{AB})_l=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},l}).} \tag{1}$$

证明:过点 A 作轴 l'平行于轴 l 且与轴 l 具有相同的正方向,

又因$\vec{b}\times\vec{c}$垂直于此底面,所以$(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}$的绝对值就是这平行六面体的高. 从而

$$|\vec{b}\times\vec{c}||(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}|$$

就是这平行六面体的体积 V. 故由(2)可得

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|\vec{b}\times\vec{c}||(\vec{a})_{\vec{b}\times\vec{c}}|=V.$$

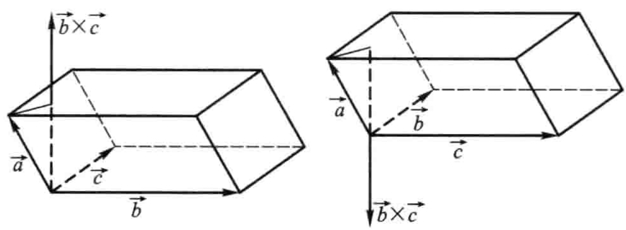


图 9. 26

这就是说:**混合积$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$的绝对值等于以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边所作成的平行六面体的体积**.

如果$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面(就是$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$同在一平面上,也就是$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都平行于一平面),那么,由这三个矢量所作成的平行六面体的体积是0,即

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0.$$

这个结论也可以直接从标量积与矢量积的定义得到:因为,$\vec{b}\times\vec{c}$垂直于$\vec{b}$与$\vec{c}$所确定的平面,而$\vec{a}$又在此平面内,因而$\vec{b}\times\vec{c}$亦与$\vec{a}$垂直,故$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

反之,如果$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$,则根据标量积的定义可知,或$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有一为零矢量,或$\vec{b}$与$\vec{c}$平行,或$\vec{a}$垂直于$\vec{b}\times\vec{c}$,不管哪种情况,$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$都是共面的.

由此可知,**三个矢量共面的充要条件是它们的混合积为 0.**

§12. 曲面与方程·空间曲线的方程

I. 曲面与方程

跟平面解析几何一样,空间解析几何也有两个重要概念:第一,是"空间的点"与"有次序的三个数"之间的一一对应,我们在§3 中已研究过这个问题;第二,是"空间的曲面"与"包含三个变量的方程"之间的对应关系.

在这一节中,我们要讨论第二个概念. 为了以后在叙述上的方便,我们将包含三个变量 x,y,z 的方程记作 $F(x,y,z)=0$.

定义(曲面与方程). 在一定的空间直角坐标系中,如果点 $M(x,y,z)$ 位于一个曲面上的充要条件是点 M 的坐标 x,y,z 满足方程

(1) $$F(x,y,z)=0,$$

我们称,在这个坐标系中,方程(1)是这个曲面的方程,这个曲面是方程(1)的图形(或图像).

关于曲面与方程,我们以后会遇到两种类型的问题:第一,已给某曲面,或作为在某种运动条件下动点的轨迹,或作为适合某种几何条件的点的全体,怎样求出曲面的方程? 第二,已给某方程,怎样作出方程的图形?

我们先来看第一类型的问题. 解决这类问题的方法是:先建立适当的空间直角坐标系,然后记曲面上的点 M 的坐标为 (x,y,z),将已给条件改写为关于 x,y,z 的方程,这个方程就是所求的曲面方程了.

例一. 一动点与两定点 $A(2,-3,2)$ 及 $B(1,4,-2)$ 等距离,求动点轨迹的方程.

点 $P_0(x_0,y_0)$ 属于这函数的定义域时,我们有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

例如,

$$\lim_{\substack{x\to 2\\y\to 1}}(x^2-2xy+3y^2)=[x^2-2xy+3y^2]_{\substack{x=2\\y=1}}=3,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=[\arcsin\sqrt{x^2+y^2}]_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{\pi}{2}.$$

对于在有界闭域上的连续函数,我们有下述的定理.

定理.如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭域上连续,则在此闭域上函数 $f(x,y)$ 必然具有最大值及最小值.

§3. 偏导数

Ⅰ. 偏导数概念

二元函数的偏导数就是这个函数对一个自变量的变化率.

对于二元函数 $z=f(x,y)$,在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处自变量 x 取得增量 Δx 而自变量 y 不变时,这函数随着取得增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

这个增量称为 z 对 x 的**偏增量**. 比值 $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 是在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上 z 对 x 的平均变化率,当 $\Delta x\to 0$,这个平均变化率的极限就是 z 对 x 的变化率了.

定义.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域上有定义,当自变量 x 取得增量 Δx ($\Delta x\neq 0$),而自变量 y 不变时,函数 z 随着取得偏增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

入 $f(u,v)$，怎样直接从函数 $f(u,v)$ 的偏导数及函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的导数来计算 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. 关于这个问题我们有以下定理.

定理.若函数 $z=f(u,v)$ 有关于 u,v 的连续偏导数，又函数 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 对于 x 的导数存在，于是复合函数

$$z=f[\varphi(x),\psi(x)]$$

对于 x 的导数也存在，且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.} \tag{1}$$

若 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 对 x 的导数连续，则 z 对 x 的导数也连续.

证明：设给 x 一个增量 Δx，于是 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 各有对应的增量 Δu，Δv，因此 $z=f(u,v)$ 也有一个对应的增量 Δz：

$$\Delta z=f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u,v).$$

由于已设 $z=f(u,v)$ 对于 u,v 的两个偏导数 $f'_u(u,v)$，$f'_v(u,v)$ 是连续的，由上节定理二知 $z=f(u,v)$ 对于 u,v 是可微的，再根据上节的公式(12)，我们有

$$\Delta z=f'_u(u,v)\Delta u+f'_v(u,v)\Delta v+\beta_1\Delta u+\beta_2\Delta v,$$

并且当 $\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$ 时，$\beta_1\to 0$，$\beta_2\to 0$. 将上式两端各除以 Δx，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=f'_u(u,v)\frac{\Delta u}{\Delta x}+f'_v(u,v)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\beta_1\frac{\Delta u}{\Delta x}+\beta_2\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

由假设 $\varphi'(x)$，$\psi'(x)$ 存在，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\psi'(x)$，并且当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，也必有 $\beta_1\to 0$，$\beta_2\to 0$. 因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，上式右端的极限存在，于是推出上式左端的极限也存在，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'_u(u,v)\varphi'(x)+f'_v(u,v)\psi'(x),$$

或

$$(2)\qquad F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(\theta)}{2!},\quad 0<\theta<1.$$

今有

$$F(1)=f(x_0+h,y_0+k),\ F(0)=f(x_0,y_0),$$
$$F'(t)=f'_x(x_0+th,y_0+tk)h+f'_y(x_0+th,y_0+tk)k,$$
$$F''(t)=f''_{x^2}(x_0+th,y_0+tk)h^2+2f''_{xy}(x_0+th,y_0+tk)hk+ f''_{y^2}(x_0+th,y_0+tk)k^2,$$

计算出 $F'(0)$,$F''(\theta)$,代入(2)式,就得到(1)式. 证毕.

一般讲,如果函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有从一阶一直到第 $n+1$ 阶的连续偏导数,而 $P_1(x_0+h,y_0+k)$ 是这个邻域内任一点,则有下述公式:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)\\
=&f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k+\\
&\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0,y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)hk+f''_{y^2}(x_0,y_0)k^2]+\\
&\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0,y_0)h^3+3f'''_{x^2y}(x_0,y_0)h^2k+3f'''_{xy^2}(x_0,y_0)hk^2+\\
&f'''_{y^3}(x_0,y_0)k^3]+\cdots+\frac{1}{n!}[f^{(n)}_{x^n}(x_0,y_0)h^n+\\
&C_n^1f^{(n)}_{x^{n-1}y}(x_0,y_0)h^{n-1}k+C_n^2f^{(n)}_{x^{n-2}y^2}(x_0,y_0)h^{n-2}k^2+\cdots+\\
&C_n^nf^{(n)}_{y^n}(x_0,y_0)k^n]+R_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_n=\frac{1}{(n+1)!}&[f^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^{n+1}+\\
&C_{n+1}^1f^{(n+1)}_{x^ny}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^nk+\\
&C_{n+1}^2f^{(n+1)}_{x^{n-1}y^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^{n-1}k^2+\cdots+\\
&C_{n+1}^{n+1}f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k^{n+1}],\ 0<\theta<1.
\end{aligned}$$

这个公式叫做**二元函数的 n 阶泰勒公式**,R_n 叫做**余项**. 我们可以利用这个公式右边 h, k 的 n 次多项式所确定的数值作为$f(x_0+h$,

Ⅲ. 右端不显含 x 的二阶方程 $y''=f(y,y')$

这时应作置换 $y'=P(y)$. 我们有

$$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}.$$

代入原方程,就把它降阶成 P 与 y 的一阶方程

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=f(y,P).$$

要是能求出这方程的一般解 $P=\psi(y,C_1)$,则由 $P=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y,C_1)}=\mathrm{d}x.$$

积分,即得一般解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例三. 求解方程 $y''=\frac{1+y'^2}{2y}$.

解:右端不显含 x,令 $y'=P(y)$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$,代入原方程,得

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{1+P^2}{2y},$$

即

$$\frac{2P\mathrm{d}P}{1+P^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两边积分,得

$$\ln(1+P^2)=\ln y+\ln C_1,$$

即

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=C_1y.$$

这是可分离变量的方程,改写成

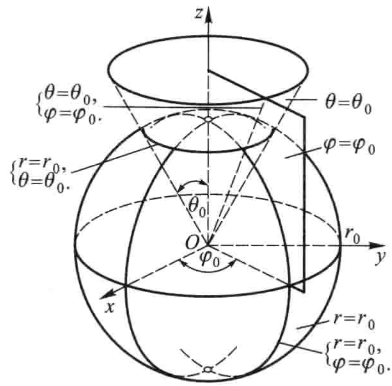


图 12.24

圆弧.

$\begin{cases}r=\text{常量},\\ \theta=\text{常量}:\end{cases}$ 表示圆心在 z 轴且与 xy 面平行的圆.

$\begin{cases}\varphi=\text{常量},\\ \theta=\text{常量}:\end{cases}$ 表示以坐标原点为端点的射线.

Ⅳ. 球坐标系中的三重积分计算法

现在将直角坐标系中三重积分的计算化为球坐标系中的三重积分的计算,由于三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

的值与域 Ω 的分法和子域上点的取法无关,因此可用特殊的分法来分割 Ω.

我们用球坐标曲面将域 Ω 分割成许多小子域 ΔV_i,如图 12.25. 从图上可见 ΔV_i 可近似地看成以 $|\widehat{AB}|$, $|\widehat{AC}|$ 及 $|AD|$ 为边长的长方体,即有

$$\Delta V_i = \text{六面体 } AF \text{ 的体积} \approx |\widehat{AB}| \cdot |\widehat{AC}| \cdot |AD|.$$

再由图上可得到

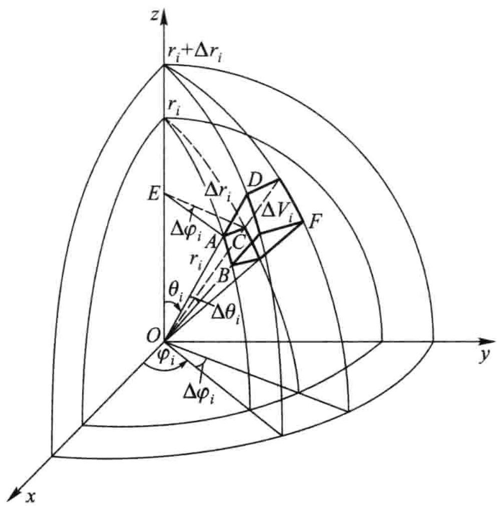


图 12.25

$$|\widehat{AB}|=r_i\Delta\theta_i,$$

$$|\widehat{AC}|=|AE|\cdot\Delta\varphi_i=|OA|\sin\theta_i\cdot\Delta\varphi_i=r_i\sin\theta_i\Delta\varphi_i,$$

$$|AD|=\Delta r_i.$$

故有

$$\Delta V_i\approx r_i^2\sin\theta_i\Delta r_i\Delta\varphi_i\Delta\theta_i$$

作积分和式,得

$$\sum_i f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\approx\sum_i F(r_i,\varphi_i,\theta_i)r_i^2\sin\theta_i\Delta r_i\Delta\varphi_i\Delta\theta_i,$$

其中 $F(r_i,\varphi_i,\theta_i)$ 是利用球坐标与直角坐标的关系代入 $f(x_i,y_i,z_i)$ 而得的. 取极限,即得

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

$$=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^n F(r_i,\varphi_i,\theta_i)r_i^2\sin\theta_i\Delta r_i\Delta\varphi_i\Delta\theta_i,$$

即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

其中 $F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$，$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$. 这就是直角坐标中三重积分变换为球坐标中三重积分的计算公式.

注意变换的要点：

(i) 将 $f(x,y,z)$ 中的 x,y,z 分别用 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ 代入.

(ii) 将体积元素 $\mathrm{d}V$ 变换成球坐标中之体积元素

$$\boxed{\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.}$$

若 $F(r,\varphi,\theta)=1$，则三重积分就是域 Ω 的体积 V，即有

$$V=\iiint_{\Omega} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

球坐标系中的三重积分也要通过化为累次积分来计算. 对于常见的某些域，很容易将球坐标系中三重积分化为累次积分. 我们举两个例来说明.

例二. 求半径为 R 的球体的体积.

解：先作球域的图形，选坐标系使球心为坐标原点(图 12.26). 由图可见，这球域可用下述联立不等式表示，即

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant R,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

于是得体积

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\\ &=\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S} X\mathrm{d}\sigma'_{yz}+Y\mathrm{d}\sigma'_{zx}+Z\mathrm{d}\sigma'_{xy}\\=&\iint\limits_{S}(X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k})\cdot(\mathrm{d}\sigma'_{yz}\vec{i}+\mathrm{d}\sigma'_{zx}\vec{j}+\mathrm{d}\sigma'_{xy}\vec{k})\\=&\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}.\end{aligned}$$

2°. 组合曲面积分常写成

$$\iint\limits_{S} X\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

不过要注意:这里的 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示有向投影,可取正值也可取负值,这与二重积分中的面积元素总取正值是不同的.

例二. 上面讲的流量 Q 就是

$$Q=\iint\limits_{S}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_{S}v_1\mathrm{d}y\mathrm{d}z+v_2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+v_3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ⅱ. 对坐标的曲面积分的性质

由定义可知,这种积分有如下性质:

1°. 它与曲面的侧有关,即如果改变积分的曲面的侧,则积分改变正负号:

$$\iint\limits_{+S}=-\iint\limits_{-S},$$

其中 $+S$ 表示曲面 S 的某一侧面,而 $-S$ 表示与 $+S$ 相反的侧面(图 13.24).

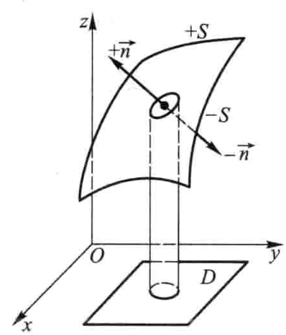


图 13.24

这性质的物理意义是:同一流体向曲面 S 两个不同侧面的流量,其绝对值相同,而正负号相反.

2°. 设 S 分成 S_1 与 S_2 两块曲面,则

$$\iint\limits_{S}=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}$$

解:如图 13.25,为了把 S 的方程用单值函数 $z=z(x,y)$ 表示,我们把 S 分为上、下两部分 S_1 及 S_2.

S_1 的方程是

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

S_2 的方程是

$$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

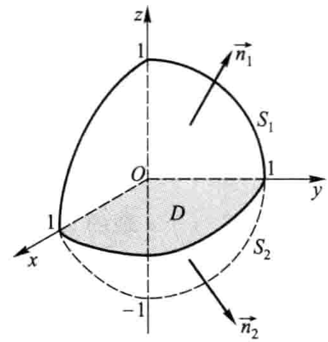


图 13.25

于是

$$\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}\sigma'_{xy}+\iint_{S_2} xyz\mathrm{d}\sigma'_{xy}.$$

由于 S_1 的凸侧是上侧,$\mathrm{d}\sigma'_{xy}$是正的,而 S_2 的凸侧是下侧,$\mathrm{d}\sigma'_{xy}$是负的,所以

$$\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 是 S_1 与 S_2 在 xy 平面上的投影域,由图 13.25 可知,D 就是 xy 平面上圆心在原点的单位圆在第一象限的部分. 这二重积分可化为极坐标计算:

$$\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$