

《现代信号处理丛书》

Spectral Estimation: Theory and Application

频谱估计 理论与应用

主 编 李冬海
副主编 赵拥军 刘向明 关秀芬



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

现代信号处理丛书

频谱估计理论与应用

主 编	李冬海		
副主编	赵拥军	刘向明	关秀芬
参 编	胡德秀	赵 闯	陈世文
	周莉莉	郭国选	

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

频谱估计是现代信号处理的重要内容,广泛应用于通信、雷达、声纳、医学等领域中的信号处理。本书基于信号子空间与噪声子空间理论,以全新的视角系统、全面地介绍了经典谱估计与现代谱估计。全书共分五篇 21 章,内容包括经典谱估计、基于滤波的频谱估计、信号模型与向量子空间基础、基于信号子空间的谱估计、基于噪声子空间的谱估计。

本书是一本关于频谱估计理论与应用,与国际前沿科学接轨的学术著作,可供电子、通信、自动化、计算机等专业的教师、研究生、本科生和相关科技人员教学、自学或进修之用。

图书在版编目(CIP)数据

频谱估计理论与应用/李冬海主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2014.5

(现代信号处理丛书)

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3303 - 9

I. ① 频… II. ① 李… III. ① 频谱—谱估计—研究 IV. ① TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 014668 号

策 划 李惠萍

责任编辑 李惠萍 曹 锦

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 14

字 数 329 千字

印 数 1~2000 册

定 价 24.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3303 - 9/TN

XDUP 3595001—1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

前 言

信号频谱是信号处理中一个非常重要的概念,信号频谱估计是信号处理的重要组成部分。现代频谱估计技术可以大大改善频率估计精度、频率分辨率及其他相关参数估计精度,频谱分析在通信、雷达、声呐、地震勘探、震动工程、气象、射电天文以及医学成像等诸多军事和国民经济领域得到了广泛的应用。

频谱估计(谱估计)是信号处理研究的传统领域,在这方面有很多专著。本书旨在从向量空间角度诠释谱估计,希望把简单问题复杂化,揭示简单问题的深刻涵义;也希望把复杂理论简单化,揭示理论的本质。这是作者编写本书的出发点,由于作者水平有限,只能力求做到,书中不当之处敬请读者指正。

本书基于信号子空间与噪声子空间理论,以全新的视角系统、全面地介绍了经典谱估计与现代谱估计。全书共分五篇 21 章。

第一篇讨论了经典谱估计(第 1~5 章)。本篇引入“观测数据向量”与“频率向量”,从向量关系角度诠释频谱。按照向量几何关系,频谱可表示为“观测数据向量”在各个“频率向量”的投影。

第二篇讨论了基于滤波的频谱估计(第 6~9 章)。滤波与谱估计是信号处理的两大内容,两者有着密切的联系。测量信号通过不同频点滤波器输出的大小,就可以得到输出大小与频率的关系,即频谱。

第三篇讨论了信号模型与向量子空间基础(第 10~14 章)。本书讨论的频谱估计方法都可以归结为基于信号子空间的谱估计与基于噪声子空间的谱估计,因此本篇介绍了向量空间基础及信号子空间与噪声子空间的概念。

第四篇讨论了基于信号子空间的谱估计(第 15~17 章)。按照空间理论,傅里叶变换是在一个“频率向量”张成的一维信号子空间投影得出的谱估计,而在多个“频率向量”张成的多维信号子空间投影会得出新的谱估计表达式。

第五篇讨论了基于噪声子空间的谱估计(第 18~21 章)。除了按照在信号子空间投影最大得出谱估计方法外,也可按照在噪声子空间投影最小得出基于噪声子空间的谱估计。

本书注重章节内容的完整性与对称性,并尽量把知识点章节化、条目化,以方便读者对比、理解与记忆。本书阐述本着容易理解与自学的原则,力求通俗易懂,也注重概念的物理意义,注重理论与应用结合。本书力求说明不同估计方法的内在联系,做到如下四个统一:

1. 估计方法的统一。本书把各种估计方法归结到信号子空间方法与噪声子空间方法,做到了估计方法的大一统。
2. 谱估计与滤波的统一。本书把谱估计与滤波结合在一起,做到了频谱估计与滤波的统一,实际上它们是一个数学模型下的两个问题,是相互关联的。
3. 数与形的统一。本书既有从“数”上严格的数学推导,也有直接从“形”上的理解,做

到了数与形的统一。

4. 数学模型的统一。本书建立了完整、统一的谱估计数学模型,不同的数学模型对应不同的估计方法,做到了数学模型的统一。

本书在编写过程中,主要参考了《矩阵分析与应用》(张贤达著)、《宽带数字接收机》((美)James Tsui 著)、《空间谱估计理论与算法》(王永良等著)三本专著,其中《宽带数字接收机》的通俗易懂,《空间谱估计理论与算法》的深度与广度,《矩阵分析与应用》的基础理论,都给了我们很大的启发和帮助,使我们受益匪浅,感谢他们对学术的贡献。编写过程也是学习的过程,编写此书历时3年多,经历过顺利时候的兴奋,也经历过困难时候的沮丧。

本书由原解放军信息工程大学副教授、现任河南黄河科技学院副教授李冬海统筹编写并任主编,解放军信息工程大学的赵拥军、刘向明及河南黄河科技学院的关秀芬教授任副主编,参编人员主要有解放军信息工程大学的胡德秀、赵闯、陈世文、周莉莉及河南质量工程职业学院的郭国选副教授,其中李冬海编写了第1章、第6章、第7章、第14~16章;赵拥军编写了第11~13章;刘向明编写了第8~10章;关秀芬编写了第17~19章;赵闯编写了第2章、第3章;陈世文编写了第4章、第5章;郭国选编写了第20章、第21章。胡德秀、周莉莉审阅全书并修改了部分内容。

本书的编写得到了孟凡坤副教授、黄洁副教授、王峰讲师等同事的帮助和鼓励,得到了博士生刘成城的帮助,得到了郑州市嵌入式系统应用技术重点实验室(编号:121PYFZX177)资助,另外与研究生应文、张光辉、陈晖、霍光、陈辉、高强、李晶、刘亚奇、曾阳帆、艾健健经常讨论遇到的学术问题,在此一并感谢他们。

编 者

2014年2月

目 录

第一篇 经典谱估计

第 1 章 频谱概念	2
1.1 正弦数字信号	2
1.2 频率向量	4
1.3 离散时间傅里叶变换	6
1.4 基于 DTFT 的频率估计	7
1.5 仿真实验分析	8
第 2 章 频谱计算	10
2.1 频谱计算与离散傅里叶变换	10
2.2 基于 DFT 基向量的正交分解	11
2.3 补零法	14
2.4 比幅法频率估计	16
2.5 二分法谱峰搜索	21
2.6 小结	23
第 3 章 频率估计性能	24
3.1 频谱泄漏	24
3.2 傅里叶变换的频率分辨率	30
3.3 傅里叶变换的频率精度	33
3.4 小结	34
第 4 章 窗函数与频率估计	35
4.1 抑制泄漏机理	35
4.2 窗函数	35
4.3 窗函数在频率估计中的应用	38
4.4 实信号的频率估计	44
4.5 小结	46
第 5 章 功率谱	47
5.1 随机过程功率谱	47
5.2 离散随机过程功率谱	50
5.3 数字信号的功率谱估计	52
5.4 基于矩形窗的功率谱估计	53
5.5 基于三角窗的功率谱估计	55
5.6 巴特利特估计	58
5.7 功率谱估计的应用	59
5.8 小结	62

第二篇 基于滤波的频谱估计

第 6 章 滤波概念	64
6.1 滤波向量	64
6.2 滤波器频率响应特性	65
6.3 常规频点滤波器的设计	66
6.4 频点滤波器与傅里叶变换的关系	68
6.5 信号分离	70
第 7 章 滤波器性能	73
7.1 频点滤波器频率分辨率	73
7.2 频点滤波器滤波精度	76
7.3 小结	77
第 8 章 窗函数与滤波器	78
8.1 窗的特性	78
8.2 窗在滤波中的应用	78
8.3 小结	86
第 9 章 基于滤波的频谱估计	87
9.1 基于频点滤波的频谱估计	87
9.2 基于常规频点滤波的频谱估计	88
9.3 基于最小方差滤波的频谱估计	90
9.4 Capon 频谱估计的应用	92

第三篇 信号模型与向量子空间基础

第 10 章 信号与信号子空间	96
10.1 子空间的概念	96
10.2 信号及信号向量模型	97
10.3 信号子空间	100
10.4 频谱估计信号模型及统计特性	101
10.5 频点滤波信号模型及统计特性	104
第 11 章 最小二乘估计	107
11.1 单参数最小二乘估计	107
11.2 单参数最小二乘估计性能	109
11.3 单参数加权最小二乘	110
11.4 单参数加权最小二乘与 Capon 的等效性	112
11.5 多参数最小二乘估计	113
11.6 多参数最小二乘估计性能	115
11.7 多参数加权最小二乘	116
11.8 最小方差估计	117
第 12 章 基于最小二乘的频点滤波	121
12.1 单频率信号模型噪声特性未知的滤波	121

12.2	单个频率信号模型噪声特性已知的滤波	121
12.3	多频率信号模型噪声特性未知的滤波	122
12.4	多个频率信号模型噪声特性已知的滤波	123
第 13 章	向量子空间投影	124
13.1	投影与最小二乘	124
13.2	投影算子	126
13.3	在信号子空间的投影	127
13.4	噪声子空间	128
第 14 章	随机信号向量子空间投影	131
14.1	随机信号向量在一维子空间上的投影	131
14.2	随机信号向量在多维子空间上的投影	132

第四篇 基于信号子空间的谱估计

第 15 章	基于信号子空间投影的谱估计	136
15.1	单次样本单频率的频谱估计	136
15.2	单次样本多频率的频谱估计	137
15.3	多次样本单频率的频谱估计	138
15.4	多次样本多频率的频谱估计	140
15.5	子空间投影在频率估计中的应用	141
15.6	实正弦信号频率估计	144
15.7	小结	145
第 16 章	最大似然估计基础	146
16.1	参数估计模型	146
16.2	多维高斯分布联合概率密度函数	147
16.3	最大似然估计求法	150
16.4	参数估计的克拉美-罗下界	151
第 17 章	基于最大似然的频率估计	156
17.1	信号模型	156
17.2	单次样本似然函数	157
17.3	单频率单次样本最大似然估计	158
17.4	单频率单次样本参数估计的克拉美-罗下界	161
17.5	单频率单次样本参数估计仿真分析	167
17.6	多频率单次样本最大似然估计	169
17.7	多次样本似然函数	170
17.8	单频率多次样本最大似然估计	170
17.9	多频率多次样本最大似然估计	171

第五篇 基于噪声子空间的谱估计

第 18 章	信号子空间与噪声子空间正交分解	174
18.1	协方差矩阵特征值分解	174

18.2	观测随机向量正交变换	175
18.3	向量正交分解	177
18.4	子空间正交分解	179
第 19 章	MUSIC 高分辨频谱估计	183
19.1	多重信号分类算法	183
19.2	长数据分段模型 MUSIC	184
19.3	短数据平稳模型 MUSIC	187
19.4	滑动窗数据模型 MUSIC	191
第 20 章	自回归谱估计	194
20.1	AR 模型谱估计	194
20.2	前向线性预测模型谱估计	197
20.3	AR 模型谱估计快速算法	199
20.4	Burg 最大熵谱估计	202
20.5	后向线性预测谱估计	206
第 21 章	基于噪声子空间的频谱估计	208
21.1	基于噪声子空间的频谱	208
21.2	基于噪声子空间的 MUSIC 谱估计	209
21.3	近似噪声子空间谱估计	211
21.4	Capon 谱估计	214
参考文献		216

第一篇

经典谱估计

本篇包括频谱概念、频谱计算、频率估计性能、窗函数与频率估计、功率谱五章。在章节的安排上以工程应用为引入角度，在介绍频谱概念后(第1章)，工程应用上需要计算连续频谱(第2章)，然后介绍频率估计性能及决定性能的因素(第3章)。决定频谱分析性能的不仅仅是窗长度，还有窗形状，因此专门用一章介绍窗函数在频谱分析中的应用(第4章)。本书不仅从工程应用角度编排内容，而且还重视严格的理论基础，第5章介绍功率谱的严格定义，这是谱估计的理论基础。

经典谱估计是以傅里叶变换为基础的谱估计。本篇从向量及向量关系的角度诠释谱估计，从向量几何关系的角度诠释频谱，传统的离散时间傅里叶变换(DTFT)表示为“观测数据向量”在各个“频率向量”的投影。本书在讲解离散傅里叶变换(DFT)时，是把DFT作为DTFT的一种等间隔离散计算方式来引入的，揭示了反映离散序列频谱本质的是DTFT；DFT不能反映离散序列频谱的本质，仅是连续频谱等间隔的离散方法。

第1章 频谱概念

大家熟知, 频谱反映信号幅度和相位随频率的分布情况, 它在频域中描述了信号的特征, 是信号处理的一个重要概念。信号的频谱是通过傅里叶变换(Fourier Transform, FT)得到的。本章引入“观测数据向量”与“频率向量”, 从向量关系的角度诠释频谱。按照向量几何关系, 频谱表示为“观测数据向量”在各个“频率向量”的投影。

1.1 正弦数字信号

1.1.1 正弦数字信号

1. 正弦信号

假定有一正弦信号 $s_0(t)$ 为

$$s_0(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda_0} t + \varphi_0\right) \quad (1.1)$$

其中, Ω_0 为角频率 (F_0 为频率, λ_0 为波长); A_0 为幅度; φ_0 为初相位; c 为光速。

2. 观测数据

$s_0(t)$ 为正弦信号, 而观测数据(接收数据)为 $x(t)$, 当只有一个正弦信号时, $x(t)$ 为

$$x(t) = s_0(t) \quad (1.2)$$

3. 开始采样时刻

对接收到的模拟信号进行采样, 假定在 t' 时刻开始采样, 采样间隔为 T_s , 那么 n 点采样时刻 t_n 为

$$t_n = t' + nT_s \quad (1.3)$$

第 n 个采样时刻 t_n 相对于开始采样时刻 t' 的时间延迟 τ_n 为

$$\tau_n = t_n - t' = nT_s \quad (1.4)$$

4. 采样参考时刻

上面 t' 仅定义为采样开始时刻, 如果将 t' 看成采样参考时刻则更具一般性。如果 n 点采样时刻 t_n 为

$$t_n = t' - nT_s \quad (1.5)$$

在式(1.5)中, 以 t' 为采样参考时刻, 第 n 个采样时刻 t_n 相对于采样参考点 t' 的时间提前 τ_n 为

$$\tau_n = t_n - t' = -nT_s \quad (1.6)$$

式(1.6)表明, 采样时刻 t_n 相对于采样参考点 t' 的时间提前为 nT_s ; 而在式(1.4)中, 采

样时刻 t_n 相对于采样参考点 t' 的时间延迟为 nT_s 。

延迟与提前只是参考时刻不同，为了表述方便，书中不再严格区分延迟与提前概念。

5. 参考时刻 t' 观测数据 $x(t')$

因为当 $n=0$ 时

$$t' + nT_s = t' \quad (1.7)$$

所以，参考时刻 t' 观测数据 $x(t')$ 为

$$x_0 = x(t') = s_0(t') \quad (1.8)$$

当 $t'=0$ ，即零时刻采样时

$$x_0 = x(0) = s(0) \quad (1.9)$$

当 $t'=kT_s$ 时

$$x_0 = x(t') = s_0(t') = s_0(kT_s) \quad (1.10)$$

上式表明，在原来序列点为 k 的值 $s_0(kT_s)$ ，在新序列中为第零个序列值 x_0 。

6. 采样时刻 t_n 观测数据 $x(t_n)$

n 点采样时刻 t_n 信号 $x(t_n)$ 为

$$\begin{aligned} x_n = x(t_n) &= x(t' + \tau_n) = x(t' + nT_s) = s_0(t' + nT_s) \\ &= A_0 \cos[\Omega_0(t' + nT_s) + \varphi_0] \\ &= A_0 \cos(\Omega_0 nT_s + \Omega_0 t' + \varphi_0), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中， N 为采样总样点数。

如果有 P 个不同频率的正弦信号，那么 t_n 时刻接收到的信号 $x(t_n)$ 为 P 个信号之和，为

$$x_n = x(t_n) = \sum_{i=1}^P s_i(t_n) = \sum_{i=1}^P A_i \cos(\Omega_i nT_s + \Omega_i t' + \varphi_i), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.12)$$

当 $t'=0$ 时，上式变为

$$x_n = \sum_{i=1}^P A_i \cos(\Omega_i nT_s + \varphi_i), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.13)$$

1.1.2 数字频率

当有一个正弦信号时， n 点采样时刻 t_n 数据 x_n 为

$$\begin{aligned} x_n &= A_0 \cos(\Omega_0 nT_s + \varphi_0) = A_0 \cos\left(2\pi \frac{F_0}{F_s} n + \varphi_0\right) \\ &= A_0 \cos(2\pi f_0 n + \varphi_0) = A_0 \cos(\omega_0 n + \varphi_0), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中，采样间隔 T_s 对应的采样频率为 $F_s = 1/T_s$ ，数字频率 f_0 和数字角频率 ω_0 分别为

$$f_0 = \frac{F_0}{F_s}, \quad \omega_0 = 2\pi \frac{F_0}{F_s} \quad (1.15)$$

从式(1.15)的数学关系上讲，数字频率 f_0 看做模拟频率 F_0 相对于采样频率 F_s 的归一化。按照奈奎斯特采样定理，当采样频率 F_s 大于 2 倍的信号频率 F_0 时，数字频率 f_0 小于 0.5。

当接收为 P 个正弦信号时， $t_n (n=0, \dots, N-1)$ 时刻接收到的信号 $x(t_n)$ 为

$$x_n = \sum_{i=1}^P A_i \cos\left(2\pi \frac{F_i}{F_s} n + \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^P A_i \cos(2\pi f_i n + \varphi_i) = \sum_{i=1}^P A_i \cos(\omega_i n + \varphi_i) \quad (1.16)$$

上式是 P 个正弦离散信号的叠加和，数字频率 f_i 和数字角频率 ω_i 分别为

$$f_i = \frac{F_i}{F_s}, \quad \omega_i = 2\pi f_i = 2\pi \frac{F_i}{F_s}, \quad i = 1, \dots, P \quad (1.17)$$

1.2 频率向量

1.2.1 频率向量

为了理论推导方便，一般以复正弦信号作为研究对象，实正弦信号可以由欧拉公式分解为两复正弦信号。假定有一复正弦信号 $s_0(t)$ 为

$$s_0(t) = A_0 \exp(j\Omega_0 t + j\varphi_0) \quad (1.18)$$

那么第 t_n 时刻观测数据为

$$\begin{aligned} x_n = x(t_n) = s_0(t_n) &= A_0 \exp(j\Omega_0 t_n + j\varphi_0) = A_0 \exp[j\Omega_0(t' + nT_s) + j\varphi_0] \\ &= A_0 \exp(j\Omega_0 nT_s + j\Omega_0 t' + j\varphi_0), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

上式整理后变为

$$x_n = A_0 \exp(j\Omega_0 t' + j\varphi_0) \exp(j\Omega_0 nT_s) \quad (1.20)$$

因为 t' 时刻信号为

$$s_0(t') = A_0 \exp(j\Omega_0 t' + j\varphi_0) \quad (1.21)$$

那么

$$x_n = s_0(t') \exp(j\Omega_0 nT_s) = s_0(t') \exp(j2\pi f_0 n) = s_0(t') \exp(j\omega_0 n) \quad (1.22)$$

$$x_n = x(t_n) = x(t' + \tau_n) = x(t' + nT_s) \quad (1.23)$$

从以上两式可以看出， t_n 时刻接收的复正弦信号 x_n ，是 t' 参考时刻信号 x_0 的延迟，对于复正弦信号，时间延迟 nT_s 可以等价为相位延迟 $\Omega_0 nT_s (= \omega_0 n)$ 。

将式(1.20)写为向量形式：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f_0) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f_0(N-1)) \end{bmatrix} s_0(t') = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\omega_0) \\ \vdots \\ \exp(j\omega_0(N-1)) \end{bmatrix} s_0(t') \quad (1.24)$$

那么

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{a}(f_0) s_0(t') \quad (1.25)$$

其中，以 t' 为参考时刻的观测数据向量(接收数据向量) $\mathbf{x}(t')$ ，有时可简记为 $\mathbf{x}$ ，即

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

向量 $\mathbf{a}(\omega_0)$ ，或表示为 $\mathbf{a}(f_0)$ ，我们定义其为频率向量^[1]：

$$\mathbf{a}(\omega_0) = \mathbf{a}(f_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f_0) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f_0(N-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\omega_0) \\ \vdots \\ \exp(j\omega_0(N-1)) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

如果采样时刻变为

$$t_n = t' - nT_s$$

那么 t_n 时刻接收的复正弦信号 x_n 是 t' (这里 t' 的含义为参考时刻, 不是开始采样时刻) 参考时刻信号 x_0 的提前, 对于复正弦信号, 时间提前 nT_s 可以等价于相位提前 $\Omega_0 nT_s (= \omega_0 n)$ 。频率向量变为

$$\mathbf{a}(f_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j2\pi f_0) \\ \vdots \\ \exp(-j2\pi f_0(N-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j\omega_0) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_0(N-1)) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

通过上述对频率向量的分析可以发现:

(1) 频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 的组成。从式(1.27)与式(1.28)可以看出, 频率向量元素由各个采样时刻相对于参考时刻信号的相位延迟 $\exp(j\omega_0 n)$ 组成。

(2) 频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 的不变性。从式(1.25)、式(1.27)可以看出, 不同采样参考时刻 t' 的观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 是不同的, 但频率向量由各个采样时刻相对于参考时刻信号的相位延迟组成, 因此频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 不变。

$$\mathbf{x}(t'_1) = \mathbf{a}(f_0)s_0(t'_1) \quad (1.29)$$

$$\mathbf{x}(t'_2) = \mathbf{a}(f_0)s_0(t'_2) \quad (1.30)$$

t'_1 与 t'_2 两参考时刻的观测数据向量 $\mathbf{x}(t'_1)$ 与 $\mathbf{x}(t'_2)$ 是不同的, 但都包含不变的频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$, 频率估计就是从变化量中寻找不变的量 $\mathbf{a}(f_0)$, 这就是频率向量的本质。

(3) 频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 的意义。频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 是一个复正弦序列, 其频率为 f_0 , 因此 $\mathbf{a}(f_0)$ 称为信号的频率向量, 它反映了信号频率。

1.2.2 频率向量矩阵

当接收 P 个复正弦信号时, t_n 时刻的信号 x_n 是 t' 参考时刻信号 x_0 的延迟, 对于每个复正弦信号, 时间延迟 nT_s 可以等价于相应的相位延迟 $\Omega_i nT_s (= \omega_i n)$, 那么 t_n 时刻观测数据为

$$\begin{aligned} x_n &= x(t_n) = x(t' + \tau_n) = x(t' + nT_s) \\ &= \sum_{i=1}^P s_i(t' + nT_s) = \sum_{i=1}^P s_i(t') \exp(j\omega_i n), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.31)$$

将上式写为矩阵形式^[2]:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} & \dots & e^{j\omega_P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{j\omega_1(N-1)} & e^{j\omega_2(N-1)} & \dots & e^{j\omega_P(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t') \\ s_2(t') \\ \vdots \\ s_P(t') \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

那么

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{A}\mathbf{s}(t') \quad (1.33)$$

其中, $\mathbf{x}(t')$ 是以 t' 为参考时刻的观测数据向量, 即

$$\mathbf{x}(t') = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$\mathbf{s}(t')$ 是 t' 时刻 P 个信号组成的信号向量，即

$$\mathbf{s}(t') = \begin{bmatrix} s_1(t') \\ s_2(t') \\ \vdots \\ s_P(t') \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 是频率向量 $\mathbf{a}(f_i)$ 的集合，向量 $\mathbf{a}(f_i)$ 称为第 i 个信号的频率向量，即

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(f_1), \mathbf{a}(f_2), \dots, \mathbf{a}(f_P)]_{N \times P} \quad (1.36)$$

$$\mathbf{a}(f_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\omega_i) \\ \vdots \\ \exp(j\omega_i(N-1)) \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

频率估计的任务就是研究如何由观测数据 $\mathbf{x}(t')$ 估计出频率个数 P 及反映频率的频率向量 $\mathbf{a}(f_i)$ 。

1.3 离散时间傅里叶变换

1.3.1 观测数据傅里叶变换

离散时间傅里叶变换 (Discrete-time Fourier Transform, DTFT) 是傅里叶变换的一种，对离散序列进行离散时间傅里叶变换，可以得到离散信号的连续频谱。

对观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 序列进行 DTFT，可以得到连续的频谱 $X(e^{j\omega})$ 为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j\omega n) \quad (1.38)$$

$X(e^{j\omega})$ 为连续谱，其是周期为 2π 的周期函数，周期性如下式：

$$X(e^{j(2\pi k + \omega)}) = X(e^{j\omega} e^{j2\pi k}) = X(e^{j\omega}) \quad (1.39)$$

为了表述方便，把 $X(e^{j\omega})$ 写为 $X(\omega)$ ，那么 DTFT 的连续谱为

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-jn\omega) \quad (1.40)$$

幅度谱 $|X(\omega)|$ 反映信号幅度随频率的分布情况；相位谱 $\angle[X(\omega)]$ 反映信号相位随频率的分布情况。

1.3.2 傅里叶变换向量形式

将频谱表达式 (1.40) 写为向量形式：

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-jn\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \exp(-j\omega) & \cdots & \exp(-j(N-1)\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

那么

$$X(\omega) = \mathbf{a}(\omega)^H \mathbf{x}(t') = \mathbf{a}(f)^H \mathbf{x}(t') = \langle \mathbf{a}(f), \mathbf{x}(t') \rangle \quad (1.42)$$

其中，观测数据向量为

$$\mathbf{x}(t') = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

频率向量为

$$\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{a}(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f(N-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\omega) \\ \vdots \\ \exp(j\omega(N-1)) \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

从式(1.42)可知，傅里叶变换可以认为是观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 与各个频率向量 $\mathbf{a}(f)$ 的内积。因为不同频率向量的长度(或范数)为定值，即

$$\|\mathbf{a}(f)\| = [\mathbf{a}^H(f)\mathbf{a}(f)]^{1/2} = \sqrt{N} \quad (1.45)$$

所以，傅里叶变换可以认为是观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 在各个频率向量 $\mathbf{a}(f)$ 的投影(与内积仅差一常数 $1/\sqrt{N}$ 乘积项)。

1.4 基于 DTFT 的频率估计

1.4.1 观测数据向量

从式(1.25)可知，当接收的是一个复正弦信号时，其 t' 参考时刻观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 为

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{a}(f_0)s(t')$$

从式(1.33)可知，当接收 P 个复正弦信号时，其 t' 参考时刻观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 为

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{A}\mathbf{s}(t') = [\mathbf{a}(f_1), \mathbf{a}(f_2), \cdots, \mathbf{a}(f_P)] \begin{bmatrix} s_1(t') \\ s_2(t') \\ \vdots \\ s_P(t') \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^P s_i(t')\mathbf{a}(f_i) \quad (1.46)$$

上式可解释为观测数据向量为 P 个信号频率向量的线性叠加。

1.4.2 频率估计机理

我们知道只有两向量夹角为零，即向量方向一致时投影最大。当接收一个复正弦信号时，观测数据向量为

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{a}(f_0)s(t')$$

其 DTFT 为

$$X(\omega) = \mathbf{a}(f)^H \mathbf{x}(t') = \mathbf{a}(f)^H \mathbf{a}(f_0)s(t') = \langle \mathbf{a}(f), \mathbf{a}(f_0) \rangle s(t') \quad (1.47)$$

从式(1.47)可以看出, 只有当频率向量 $\mathbf{a}(f) = \mathbf{a}(f_0)$ 时, 两向量方向一致, 投影长度最大。因此频谱会在 $f = f_0$ 处出现最大值。

另外也可从相位补偿方面理解。我们知道 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi n f} \quad (1.48)$$

从上式可知, 频谱可以认为是观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 的 N 个序列点 $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ 与对应频率向量 $\mathbf{a}(f)$ 的 N 个权值 $(1, e^{j2\pi f}, \dots, e^{j2\pi f(N-1)})$ 共轭加权之后求和 $(\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi n f})$ 。

当加权值向量 $\mathbf{a}(f) = \mathbf{a}(f_0)$ 时, 共轭加权后, 信号频率向量 $\mathbf{a}(f_0)$ 中的相位延迟得到补偿, 变为同相, 同相相加得到最大输出。因此频谱模值会在 $f = f_0$ 处出现最大值。

1.4.3 频率估计

我们知道, 傅里叶变换是观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 在各个频率向量 $\mathbf{a}(f)$ 的投影。幅度谱就是取观测数据向量 $\mathbf{x}(t')$ 在各个频率向量 $\mathbf{a}(f)$ 的投影的模值, 即

$$|X(f)| = |\langle \mathbf{a}(f), \mathbf{x}(t') \rangle| \quad (1.49)$$

从前面的频率估计机理可知, 在某一频率向量投影模值出现峰值, 此频率向量就是信号的频率向量。搜索其模值的极大值点对应的频率, 此频率就是信号频率, 即

$$f = \arg\{\max_f (|\langle \mathbf{a}(f), \mathbf{x}(t') \rangle|)\} \quad (1.50)$$

1.5 仿真实验分析

实验 1-1 采样点数为 9, 当有一个复正弦信号, 数字频率为 0(直流)时, 其幅度谱如图 1-1 所示。从图中可以看出, 峰值位置对应 0 频率。

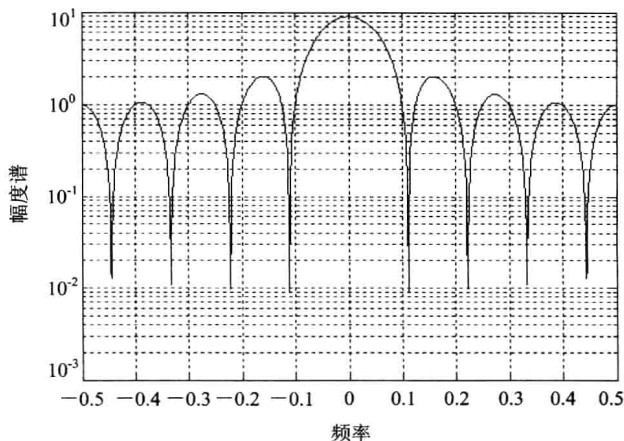


图 1-1 DTFT 幅度谱 ($N=9, f=0$)