Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学

历届真题15天突破

数学三

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

赠送MP3光盘

◎ 清华大学 王 欢
◎ 北京大学 王德军 主编
◎ 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学
历届真题15天突破
数学三

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学 王 欢
◎ 北京大学 王德军 主编
◎ 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破. 数学三/王欢主编. —北京：中国石化出版社，2014.1

ISBN 978-7-5114-2529-4

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第285692号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街58号

邮编:100011　电话:(010)84271850

读者服务部电话:(010)84289974

http://www.sinopec-press.com

E-mail:press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 11.5印张 290千字

2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷

定价:30.00元　(赠送MP3光盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》
《考研数学标准模拟试卷精解数学二》
《考研数学标准模拟试卷精解数学三》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》
《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》
《考研数学主观题23天突破500题　数学一》
《考研数学主观题13天突破500题　数学二》
《考研数学主观题22天突破500题　数学三》
《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》
《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》
《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第1天

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设 $\lim a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分在时有(　　).

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$　　(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

(2)下列曲线有渐近线的是(　　).

(A) $y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

(3)设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$,当 $x \to 0$ 时,若 $P(x) = \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,则下列试题中错误的是(　　).

(A) $a = 0$　　(B) $b = 1$　　(C) $c = 0$　　(D) $d = \frac{1}{6}$

(4)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上(　　).

(A)当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$　　(B)当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

(C)当 $f'(x) \leqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$　　(D)当 $f'(x) \leqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　).

(A) $(ad - bc)^2$　　(B) $-(ad - bc)^2$

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(6)设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量,则对任意常数 $k, 1$,向量组 $a_1 + ka_3, a_2 + la_3$ 线性无关是向量 a_1, a_2, a_3 线性无关的(　　).

(A)必要非充分　　(B)充分非必要

(C)充分必要　　(D)既非充分也非必要

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=($　　$)$.

(A)0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

(8)设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分为(　　).

(A)$F(1,1)$　　(B)$F(2,1)$　　(C)$t(1)$　　(D)$t(2)$

二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$(p 为商品的价格),则该商品的边际收益为________.

(10)设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域,则 D 的面积为________.

(11)设 $\int_0^a xe^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$,则 $a=$________.

(12)二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是1,则 a 的取值范围________.

(14)设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\0,\text{其他}\end{cases}$,其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本,若 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}x_n^2\right)=\theta^2$,则 $c=$________.

三、解答题:15~23小题,共94分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分10分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(17)(本题满分10分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$,若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分10分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$,证明:

(Ⅰ)$0 \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$,

(Ⅱ)$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$,$E$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 EY.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X、Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅰ)求 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

参考答案与解析

一、选择题

1.【答案】 A

【考点提示】 极限的定义

【解析】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$且$a\neq0$,

所以$\forall:\varepsilon>0$,$\exists$任意的整数M,使得$\forall n>M$均有$|a_n-a|<\varepsilon$成立.

即$|a|-|a_n|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$,令$\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,则可得$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$,正确答案为A.

2.【答案】 C

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为$y=ax+b$,其中$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 四个选项中,

(A)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$不存在;

(B)和(D)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$不存在;

(C)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

综上,只有选项C有斜渐近且为$y=x$.

3.【答案】 D

【考点提示】 无穷小与函数的极限

【解析】 由题设知,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$

由$\lim\limits_{x\to0}[P(x)-\tan x]=\lim\limits_{x\to0}x^3\cdot\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$,可知$a=0$;

又$0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(b-\sec^2x)+2cx+3dx^2}{3x^2}$,

因为$\lim\limits_{x\to0}\sec^2x=1$,从而$b=1$.

$$则0=\lim_{x\to0}\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}+2cx+3dx^2}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2\cos^2x}+\lim_{x\to0}\frac{2cx+3dx^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{2c+3dx}{3x}$$

从而$c=0$,且$0=-\dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3dx}{3x}=-\dfrac{1}{3}+d$,即$d=-\dfrac{1}{3}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

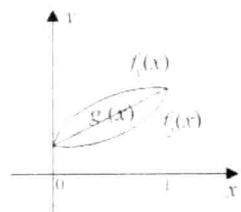
综上知,正确答案为D。

4.【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用

【解析】 $f'(x)$和$f''(x)$分别对应函数$f(x)$所表示曲线的斜率和凸凹性;

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$,表示$f(x)$在$[0,1]$区间内两个端点的连线.据此考虑作如下图:



根据曲线形状可知,$f_1'(x)\geqslant 0,f_2'(x)\geqslant 0,f_1''(x)\leqslant 0,f_2''(x)\geqslant 0,f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$由此可判断,当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$,正确答案为D.

5.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

【解析】

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-)^{2\cdot 2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2,\text{即正确答案为B.}$$

6.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$可知,因为$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)$是二维向量组,而$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是三维向量组,所以$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关,无法推出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,条件不充分;

而当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时,因为$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$,所以$r(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=2$,即$\alpha_1+k\alpha_3$,$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关,条件充分.

综上,正确答案为A.

7.【答案】 B

【考点提示】 随机事件概率的运算

【解析】 因为随机事件A和B相互独立,所以有$P(AB)=P(A)P(B)$.

又$P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]$,

代入$P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$可得$P(A)=0.6$,

则 $P(B-A)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.6\cdot 0.5=0.2$，正确答案为 B.

8.【答案】 C

【考点提示】 统计量的分布

【解析】 依题可知，

$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$；

$X_3\sim N(0,\sigma^2)$，则$\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi(1)$

又$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2$相互独立，故$\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2}}=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}\sim t(1)$，正确答案为 C.

二、填空题

9.【答案】 $R'(p)=40-4p$

【考点提示】 微积分在经济学中的应用

【解析】 收益函数为 $R(p)=PQ=p(40-2p)=40p-2p^2$，

则边际收益为 $R'(p)=40-4p$.

10.【答案】 $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

【考点提示】 积分在几何中的应用

【解析】

$$\begin{aligned}S_D&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\\&=(2x-\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}-\ln 2\end{aligned}$$

11.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 求定积分

【解析】 $\dfrac{1}{4}=\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^a x\,de^{2x}=\dfrac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^a-\dfrac{1}{4}\int_0^a 1\,de^{2x}=\dfrac{1}{2}ae^{2a}-\dfrac{1}{4}e^{2a}+\dfrac{1}{4}$，

则$\dfrac{1}{2}ae^{2a}-\dfrac{1}{4}e^{2a}=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

12.【答案】 $\dfrac{1}{2}(e-1)$

【考点提示】 交换积分次序求积分

【解析】 原式 $=\int_0^1 dy\int_y^1\dfrac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}(1-y)dy=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}dy+\int_0^1 e^{y^2}y\,dy$$

$$= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{x^2} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

13.【答案】 $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & 2\\ a & 2 & 0\end{pmatrix}$，设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=a^2-4$

因为题设二次型的负惯性指数为 1，所以有且只有一个特征值为负值，不妨设 $\lambda_1<0$，则 $\lambda_2\geqslant 0,\lambda_3\geqslant 0$，从而有 $|A|=a^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

当 $|A|=a^2-4=0$，即 $a=\pm 2$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -a\\ 0 & \lambda+1 & -2\\ -a & -2 & 0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，满足题意。故综上有，$-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.【答案】 $\dfrac{2}{5n}$

【考点提示】 无偏估计量

【解析】 $EX^2=\int_\theta^{2\theta}\frac{2X}{3\theta^2}\cdot x^2 d\theta=\frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3 d\theta=\frac{x^4}{6\theta^2}\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5}{2}\theta^2$，

则 $E(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=cE(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=c\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2$，$c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 二重积分

【解析】 平面区域 D 关于对称，则根据对称性可得，

$$I=\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

从而 $2I=\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint\limits_D\dfrac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi}\int_1^2 \pi\rho\sin(\pi\rho)\mathrm{d}(\pi\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} t\mathrm{d}\cos t = -\frac{1}{2\pi}t\cos t\Big|_\pi^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t = -\frac{3}{2},$$

故 $2I = -\frac{3}{2}$，即 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I = -\frac{3}{4}$.

17.【考点提示】 解微分方程

【解析】 由 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot\mathrm{e}^x\sin y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot(\mathrm{e}^x\cos y)^2+f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot(\mathrm{e}^x\sin y)^2-f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}f''=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，$f''=4z+\mathrm{e}^x\cos y$

令 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，则 $f''(u)=4f(u)+u$，$f(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u$

又 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，则有 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$，解得 $C_1=\frac{1}{16}$，$C_2=-\frac{1}{16}$，

所以 $f(u)=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4u}-4u-1)$.

18.【考点提示】 幂级数的收敛域及和函数

【解析】 令 $a_n=(n+1)(n+3$，

则由 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\right|=1$ 得 $R=1$，

当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)(n+3)\to\infty\neq0$，故而收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S_n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+(n+1)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}.$$

19.【考点提示】 函数的单调性与不等式的证明

【证明】

(Ⅰ)因为 $0\leqslant g(x)\leqslant1$，$x\in[a,b]$

所以有 $\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$，即 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$，$x\in[a,b]$

(Ⅱ)根据题设不等式的构造，可令 $\varphi(x)=\int_a^x f(u)g(u)\mathrm{d}u-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}f(u)\mathrm{d}u$

则 $\varphi(a)=0$，且 $\varphi'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t]g(x)$

由（Ⅰ）知，$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a$ 且 $f(x)$ 单调增加，

故而有 $f[a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t] \leqslant f(a+x-a)=f(x)$

则 $\varphi'(x) \geqslant f(x)g(x)-f(x)g(x)=0, x\in[a,b]$

又 $\varphi(a)=0$，从而可知 $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$，即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，得证.

20.【考点提示】 矩阵方程组的解

【解析】

（Ⅰ）先对矩阵作初等变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

则可得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$.

（Ⅱ）令矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$，

$$\text{则 } AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}&x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}&x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}\\x_{21}-x_{31}+x_{41}&x_{22}-x_{32}+x_{42}&x_{23}-x_{33}+x_{43}\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}&x_{12}+2x_{22}-3x_{42}&x_{13}+2x_{23}-3x_{43}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

则可得三个方程组，

$$\begin{cases}x_{11}-2x_{21}+3x_{31}-4x_{41}=1\\x_{21}-x_{31}+x_{41}=0\\x_{11}+2x_{21}-3x_{41}=0\end{cases},\begin{cases}x_{12}-2x_{22}+3x_{32}-4x_{42}=0\\x_{22}-x_{32}+x_{42}=1\\x_{12}+2x_{22}-3x_{42}=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_{13}-2x_{23}+3x_{33}-4x_{43}=0\\x_{23}-x_{33}+x_{43}=0\\x_{13}+2x_{23}-3x_{43}=1\end{cases}$$

对各方程组的增广矩阵实行初等变换分别可得，

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}$$

据此可解方程组得到,

$$\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\\x_{41}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+2\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\\x_{42}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+6\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\\x_{43}\end{pmatrix}=$$

$$k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3-1\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix},$$

综上可得,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$(其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数).

21.【**考点提示**】 矩阵的相似性

【证明】依题可令矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots\lambda_n=0$;

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=n,\mu_2=\cdots\mu_n=0$;

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;

又 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,对应有 $n-1$ 个特征向量,故 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

综上,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同且均可对角化,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,得证.

22.【**考点提示**】 随机变量的分布函数及数字特征

【**解析**】

(Ⅰ)$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}=$

$\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$

当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $0<y\leqslant 1$ 时,$F_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{3y}{4}$;

当 $1<y<2$ 时,$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{y}{4}+\frac{1}{2}$;

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com