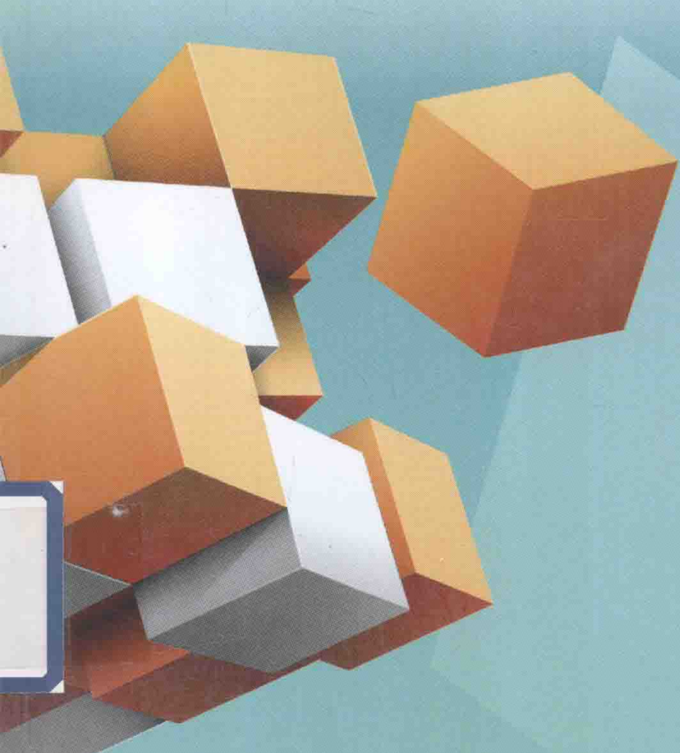
高素质应用型本科系列规划教材

微积分学

CALCULUS

主　编　胡清林
副主编　肖继红　陈相兵

（上册）



四川大学出版社

高素质应用型本科系列规划教材

微积分学

CALCULUS

(上册)

主　编　胡清林

副主编　肖继红　陈相兵

参　编　张志银　程开敏

四川大学出版社

责任编辑：李川娜
责任校对：唐　飞
封面设计：墨创文化
责任印制：李　平

图书在版编目(CIP)数据

微积分学：（上、下册）/ 胡清林主编．—成都：四川大学出版社，2012.5
ISBN 978-7-5614-5805-1

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①胡…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 084379 号

书名　**微积分学（上、下册）**

主　编	胡清林
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-5805-1
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	32.5
字　数	870 千字
版　次	2012 年 7 月第 1 版
印　次	2012 年 7 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	60.00 元(上、下册)

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

前　言

恩格斯(F. Engels，1820—1895)指出:“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了.”

数学大师、世界三大智力英雄之一、中国科学院外籍院士陈省身(Shiing-Shen Chern)教授说:“为什么要搞数学呢？答案很简单:其他的科学要用数学.”他还告诫青少年:“数学是一切科学的基础,数学的训练能激发人的创造力,提高思维的逻辑性.”为培养应用型人才的需要，本书的编写遵循重视基本训练、培养基本能力、尽量贴近实际应用的原则. 凡事从根做起，引入中学常用的数学公式，突出了微积分的基本思想和基本方法，使学生易于掌握各部分内容之间的内在联系. 弱证明，重应用. 让学生从整体上了解微积分的产生背景和发展方向. 本书例题多，强调解题思路，便于让学生熟悉计算过程，精通解题技巧，提高解题能力.

本教材按照精品课程的要求，坚持改革，反复实验，尽力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平，体现创新教学理念. 应用张景中院士教育数学科学中的研究成果，把微积分大门的高门槛——$\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 等逻辑语言换成容易理解的代数语言，我们称这种代数语言为张语言.

本书尝试与数学实验、数学建模有机结合的教学方式，推动传统教学方式与多媒体现代教育技术的融合，在每章末编写了数学实验与数学建模的有关内容，搭建了数学成为“数学技术”的平台，以加强对学生实践能力的培养. 我们以 Matlab 软件为工具，可以在计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算.

本书由 1992 年加拿大第七届国际数学教育大会(ICME-7)、1996 年西班牙 ICME-8 及第二十四届国际数学家大会(ICM2002)正式代表，国家课题 FIB070335-B2-14 首席科学家，四川大学锦江学院理工微积分精品课程主持人、统计系胡清林(Ching-Lin Hu)教授主编，该精品课程组主研人肖继红、陈相兵作副主编及成员张志银、程开敏等参编. 另外，胡晓，刘丹丹，王李会，李小杰，董洪英为本书的出版做了部分录入、校对工作。课题组应用美国著名教育心理学家布卢姆(B. S. Bloom)的“掌握学习教学策略”认知思想指导编写，“传统观念认为只有少数学生能够学好，习惯用正态曲线来划分等级的做法是不科学的，有害的. 提供足够的时间与适当的帮助，95%的学生能够学习一门学科，并达到高水平的掌握.”本教材为便于分层教学，内容分上、下两册出版. 书末附有习题的参考答案.

国家课题 FIB070335-B2-14 主持人、原四川大学锦江学院统计系周厚隆主任对本书初稿作了详尽的审阅后，不久因病去世，在本书出版之际，我们深切地缅怀在四川大学数学学院任教三十多年的周厚隆先生.

四川大学数学学院教授、四川大学锦江学院统计系陈鸿建主任在百忙中对本书稿作了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见. 在此我们对陈鸿建教授表示衷心的感谢.

本书在编写过程中，自始至终得到了四川大学锦江学院张桂芳董事长、校长李志强教授、党委书记刘富德教授、副校长王金顺教授、副校长杨家仕教授、副校长林宇及教务处何志伟处长的关心和支持，我们在此表示深深的谢意.

由于水平所限，时间仓促，书中难免不足之处，敬请读者不吝赐教.

编　者

2012 年 2 月 16 日

目　录

第 1 章　函数与极限 …… (1)

§1.1　函数的概念 …… (1)

一、集合、区间、邻域 …… (1)

二、函数 …… (2)

三、函数的几种特性 …… (4)

四、初等函数 …… (5)

五、函数在经济生活中的应用 …… (7)

练习题 1－1 …… (9)

§1.2　数列的极限与函数的极限 …… (10)

一、数列的极限 …… (10)

二、函数的极限 …… (14)

三、无穷小量的性质 …… (18)

练习题 1－2 …… (19)

§1.3　极限的四则运算 …… (19)

一、极限四则运算法则 …… (19)

二、复合函数极限运算法则 …… (20)

练习题 1－3 …… (23)

§1.4　极限存在的两个准则和两个重要极限 …… (24)

一、夹逼准则 …… (24)

二、重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… (25)

三、单调有界准则 …… (27)

四、重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ …… (27)

练习题 1－4 …… (30)

§1.5　无穷小量的比较 …… (31)

一、无穷小量阶的概念 …… (31)

二、用等价无穷小量求极限 …… (31)

练习题 1－5 …… (32)

§1.6　连续函数 …… (33)

一、连续函数的概念 …… (33)

二、函数的间断点及其分类 …… (35)

三、初等函数的连续性 …… (35)
四、闭区间上连续函数的性质 …… (36)
练习题 1－6 …… (37)
§1.7* 数学实验基础——Matlab 简介 …… (38)
一、Matlab 的基本操作命令 …… (39)
二、M 程序和 M 函数 …… (40)
总练习题一 …… (42)
第 2 章 导数与微分 …… (44)
§2.1 函数的导数 …… (44)
一、导数的背景实例 …… (44)
二、导数的定义 …… (45)
三、根据导数的定义求导数的实例 …… (47)
四、导数的几何意义 …… (48)
五、函数可导与函数连续的关系 …… (49)
练习题 2－1 …… (50)
§2.2 导数的四则运算法则 …… (51)
练习题 2－2 …… (53)
§2.3 反函数的求导法则 …… (54)
练习题 2－3 …… (55)
§2.4 复合函数、隐函数和参数式函数的求导法则及对数求导法则 …… (55)
一、复合函数的求导法则 …… (55)
二、隐函数的概念及求导法则 …… (56)
三、参数式函数的求导法则 …… (57)
四、对数求导法则 …… (58)
五、基本初等函数的导数公式 …… (59)
练习题 2－4 …… (59)
§2.5 函数的微分 …… (61)
一、微分的概念 …… (61)
二、基本微分公式和微分的运算法则 …… (62)
练习题 2－5 …… (63)
§2.6 高阶导数 …… (64)
一、背景实例 …… (64)
二、高阶导数 …… (64)
三、隐函数与参数方程式函数的二阶导数 …… (66)
练习题 2－6 …… (66)
§2.7* 用 Matlab 软件求极限的数学实验 …… (67)
一、对数 e 的感性认识 …… (67)
二、极限的数学实验 …… (68)
总练习题二 …… (70)

第3章　微分中值定理与导数的应用 ……（73）
§3.1　微分中值定理 ……（73）
一、罗尔(Rolle)中值定理 ……（73）
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 ……（74）
三、柯西(Cauchy)中值定理 ……（76）
练习题3－1 ……（77）
§3.2　洛必达(L'Hospital)法则 ……（78）
一、$\frac{0}{0}$型的待定式(或未定式) ……（78）
二、$\frac{\infty}{\infty}$型的待定式 ……（79）
三、其他的待定式 ……（80）
练习题3－2 ……（81）
§3.3　泰勒(Taylor)公式 ……（82）
一、多项式$P(x)$应满足的条件 ……（82）
二、近似多项式$P(x)$的具体形式 ……（82）
三、误差的估计 ……（83）
四、余项的表达式 ……（85）
练习题3－3 ……（86）
§3.4　函数的单调性和极值 ……（87）
一、函数的单调性 ……（87）
二、函数的极值 ……（89）
三、函数的最大值和最小值 ……（91）
四、导数与微分在经济领域中的应用 ……（92）
练习题3－4 ……（93）
§3.5　曲线的凹凸性、拐点与渐近线 ……（94）
一、曲线的凹凸性与拐点 ……（94）
二、曲线的渐近线 ……（96）
练习题3－5 ……（98）
§3.6*　函数作图 ……（98）
练习题3－6* ……（100）
§3.7*　曲率 ……（100）
一、弧长的微分 ……（100）
二、曲线的曲率及计算 ……（101）
三、曲率圆与曲率半径 ……（102）
练习题3－7* ……（103）
§3.8*　导数与微分的数学实验 ……（104）
一、导数的数学实验 ……（104）
二、微分在近似计算中的应用 ……（104）
总练习题三 ……（106）

第 4 章　不定积分……………………………………………………………… (108)
§4.1　不定积分的概念与性质 ……………………………………………… (108)
一、原函数与不定积分 ……………………………………………………… (108)
二、不定积分的运算性质 …………………………………………………… (109)
三、基本积分公式表 ………………………………………………………… (110)
练习题 4－1 ……………………………………………………………… (112)
§4.2　换元积分法 ……………………………………………………… (113)
一、第一类换元法(凑微分法) ……………………………………………… (113)
二、第二类换元法 …………………………………………………………… (119)
练习题 4－2 ……………………………………………………………… (123)
§4.3　分部积分法 ……………………………………………………… (124)
练习题 4－3 ……………………………………………………………… (128)
§4.4*　三种特殊类型函数的积分 …………………………………… (129)
一、有理函数的积分 ………………………………………………………… (129)
二、三角函数有理式的积分 ………………………………………………… (130)
三、简单无理函数的积分 …………………………………………………… (131)
练习题 4－4 ……………………………………………………………… (132)
§4.5*　一元函数微分学的数学模型举例 …………………………… (133)
星级宾馆的定价问题 ………………………………………………………… (133)
总练习题四 ………………………………………………………………… (134)
第 5 章　定积分 ……………………………………………………………… (136)
§5.1　定积分的概念与性质 …………………………………………… (136)
一、定积分问题的实际背景 ………………………………………………… (136)
二、定积分的定义 …………………………………………………………… (137)
练习题 5－1 ……………………………………………………………… (142)
§5.2　微积分基本公式 ………………………………………………… (143)
一、积分上限函数及求导定理 ……………………………………………… (143)
二、微积分的基本公式(牛顿—莱布尼茨公式) …………………………… (145)
练习题 5－2 ……………………………………………………………… (146)
§5.3　定积分计算的换元法和分部积分法 …………………………… (147)
一、换元法 …………………………………………………………………… (147)
二、分部积分法 ……………………………………………………………… (148)
练习题 5－3 ……………………………………………………………… (149)
§5.4　广义积分 ………………………………………………………… (150)
一、无穷限广义积分 ………………………………………………………… (150)
二、无界函数的广义积分 …………………………………………………… (151)
三*、Γ 函数和 B 函数 ……………………………………………………… (153)
练习题 5－4 ……………………………………………………………… (154)
§5.5*　Matlab 在计算不定积分中的应用 …………………………… (155)
一、应用 Matlab 计算不定积分的基本命令 ……………………………… (155)

二、应用实例 …… (155)
总练习题五 …… (157)
第 6 章　定积分的应用及近似计算 …… (159)
§6.1　微元法及定积分的几何应用 …… (159)
一、微元法 …… (159)
二、平面图形的面积 …… (160)
三、体积 …… (162)
四、平面曲线的弧长 …… (164)
五、旋转曲面的面积 …… (165)
六、定积分在经济学中的应用 …… (167)
练习题 6－1 …… (168)
§6.2*　定积分的物理应用 …… (169)
一、变力沿直线做功 …… (169)
二、液体对薄板的压力 …… (171)
三、引力 …… (172)
练习题 6－2 …… (172)
§6.3*　定积分的近似计算 …… (173)
一、矩形法 …… (173)
二、梯形法 …… (173)
三、抛物线法 …… (174)
练习题 6－3 …… (176)
§6.4*　Matlab 在计算定积分中的应用 …… (176)
一、应用 Matlab 计算定积分的基本命令 …… (176)
二、应用实例 …… (176)
总练习题六 …… (179)
第 7 章　微分方程 …… (180)
§7.1　微分方程的基本概念 …… (180)
练习题 7－1 …… (181)
§7.2　一阶微分方程 …… (182)
一、可分离变量的微分方程 …… (182)
二、齐次方程 …… (184)
三、一阶线性微分方程 …… (186)
四*、伯努利方程 …… (188)
练习题 7－2 …… (189)
§7.3　可降价的高阶微分方程 …… (190)
一、$y^{(n)}=f(x)$型 …… (191)
二、$y''=f(x,y')$型 …… (191)
三、$y''=f(y,y')$型 …… (192)
练习题 7－3 …… (193)
§7.4　二阶常系数线性微分方程 …… (194)

一、二阶常系数齐次线性微分方程 …… (194)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程 …… (197)
练习题 7－4 …… (199)
§7.5* n 阶线性常系数齐次微分方程 …… (200)
一、n 阶线性常系数齐次微分方程 …… (200)
二、欧拉微分方程 …… (202)
§7.6* 微分方程的应用 …… (203)
一、实际问题中遇到的线性常系数微分方程组 …… (203)
二、微分方程的应用举例 …… (205)
§7.7* Matlab 在解微分方程中的应用 …… (207)
一、应用 Matlab 解微分方程的基本命令 …… (207)
二、应用实例 …… (208)
总复习题七 …… (210)
附　录 …… (211)
附录Ⅰ　中学数学常用公式 …… (211)
附录Ⅱ　常见的曲线图 …… (215)
附录Ⅲ　常用积分表 …… (219)
参考答案或提示 …… (227)

第 1 章　函数与极限

§1.1　函数的概念

我们在生活中，通常遇到两种常见的量:一种是其值不变的量，称为常量；另一种则是可以取不同的值，称为变量. 微积分是一门研究变量的数学基础课程，为了大学数学的学习，我们先认识中学数学与大学数学衔接的有关函数知识.

一、集合、区间、邻域

1. 集合

具有某种特定性质的事物(对象)的总体称为集合，记为 A，B，C，…，P，Q 等.

2. 区间

设 a，b 为实数，称集合$\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$为以 a，b 为端点的闭区间，记为$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

类似地有区间

$$(a, b]=\{x\in\mathbf{R} \mid a< x\leqslant b\},$$

$$[a, b)=\{x\in\mathbf{R} \mid a\leqslant x< b\},$$

$$(-\infty, +\infty)=\{x\in\mathbf{R} \mid -\infty< x<+\infty\}$$

等等.

3. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，称区间$(a-\delta, a+\delta)$为 a 的一个邻域，记为$U(a, \delta)$或$U_\delta(a)$，称 $\mathring{U}(a, \delta)=\{x\in\mathbf{R}|0<|x-a|<\delta\}$ 为空心邻域(或去心邻域).

若将∞视为无穷远点，则称点集 $N_\delta(+\infty)=\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{\delta}\right\}(\delta>0)$为无穷远点$\infty$的右邻域；点集 $N_\delta(-\infty)=\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{\delta}\right\}(\delta>0)$为无穷远点$\infty$的左邻域；$N_\delta(\infty)=\left\{x\,\middle|\,|x|>\dfrac{1}{\delta}\right\}(\delta>0)$为无穷远点$\infty$的邻域.

例如，取 $a=2$，$\delta=\dfrac{1}{4}$，则有

$$\mathring{U}\left(2, \frac{1}{4}\right)=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,0<|x-2|<\frac{1}{4}\right\}=\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)\backslash\{2\}.$$

二、函数

1. 函数的概念

定义 1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，对于任意的 $x\in D$，有唯一的 $f(x)\in\mathbf{R}$，则称从 D 到 $\mathbf{R}$ 的对应关系 f 为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$. 我们把函数值的全体所构成的数集

$$R_f=f(D)=\{y\in\mathbf{R}\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$.

这里 f 为一种对应规则，对每一个 $x\in D_f$，有唯一的实数 $y=f(x)\in\mathbf{R}$ 与之对应. 当定义域与对应规则确定后，函数就完全确定. 所以，定义域与对应规则是确定函数的两个要素. 因此，对于两函数 $f(x)$，$g(x)$，若它们有相同的定义域 X，且对 X 中的每个 x 有相同的函数值，即

$$f(x)=g(x),\quad x\in X,$$

则称 $f(x)$与 $g(x)$相等，并记为 $f(x)=g(x)$.

例如，$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$x\in\mathbf{R}$ 与 $g(x)=1$，$x\in\mathbf{R}$ 是两个相等的函数，而 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$，$x\in\mathbf{R}$ 则是两个不相等的函数. 因为 $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$，而 $D_g=\mathbf{R}$.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的图象.

2. 函数的表达方式

高中生已经知道函数的表达方式有表格法、图象法、解析法(实际上就是直角坐标表示法的解析式)，但平面曲线还可以用参数方程和极坐标系表示，所以函数也可以用参数方程和极坐标系表示.

(1)参数方程.

在平面直角坐标系中，如果质点运动曲线上任意一点 $M(x,\ y)$中的 x，y 都是时间 t 的函数，则对于每一个 t 值都有曲线上一点与之对应. 一般地，若有

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

则称上述方程组为曲线的参数方程，联系 x 与 y 之间的变量 t 称为参数(或参变量)，即 y 与 x 之间的函数关系可以用参数方程表示.

例如，圆心在点 $A(a,b)$，半径为 R 的圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=a+R\cos\theta,\\ y=b+R\sin\theta.\end{cases}$$

其中参数 θ 是动半径的斜角.

又如，通过 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$两点的直线的两点式参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r},\\[2ex] y=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}\end{cases}\quad(-\infty<r<+\infty,r\neq-1).$$

其中参数 r 是动点 $P(x, y)$ 分线段 P_1P_2 的分比，即 $r=P_1P/PP_2$.

一些常见曲线的参数方程可参见有关解析几何书.

(2)极坐标.

在平面上由一个定点和一条定轴即可构成极坐标系，如图1-1所示，其中 O 点称为极点，射线 Ox 称为极轴，极坐标系中的任一点 P 用序对 (r,θ) 表示，其中 r 表示 O 点到 P 的距离，θ 表示从极轴 Ox 开始，逆时针转动到 OP 的角度. 逆时针转动为正，顺时针转动为负. $(0\leqslant r<+\infty)$，$(-\infty<\theta<+\infty)$.

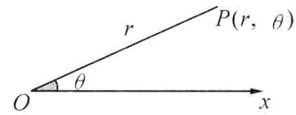


图 1-1

如果取极点 O 为原点，极轴 Ox 作 x 轴的正半轴建立直角坐标系，则得极坐标与直角坐标的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

例如，圆 $x^2+y^2=9$ 的极坐标方程为 $r=3$，而圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的极坐标方程为 $r=4\sin\theta$；直线 $x=3$ 的极坐标方程是 $r=\dfrac{3}{\cos\theta}$.

下面举出几个例子.

例 1　函数

$$y=3$$

的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{3\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-2 所示.

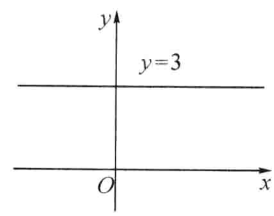


图 1-2

例 2　函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=[0, +\infty)$，它的图形如图1-3所示，此函数称为绝对值函数.

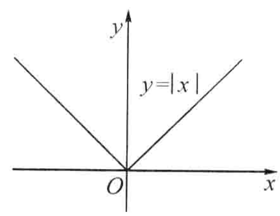


图 1-3

例 3　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

例 4　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 例如，$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看做变量，则函数的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-5 所示，这种图形称为阶梯曲线，在 x 为

整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，函数 $y=[x]$称为取整函数.

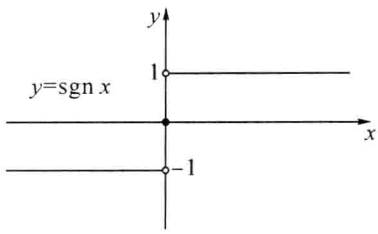


图 1—4

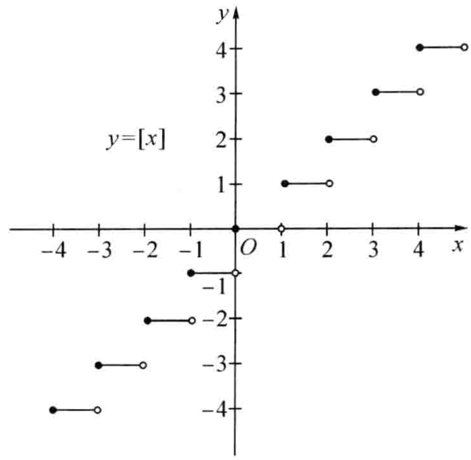


图 1—5

在例 2 和例 3 中看到，有的函数在定义域的不同部分用不同的公式表达，这种函数被称为分段函数.

三、函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，I 为区间且 $I\subset D$. 如果对于任意两点 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (或\ f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 I 上严格单调增加(或严格单调减少). 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$在 I 上单调增加(或单调减少). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$定义域为 $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，在闭区间$[2,7]$上研究函数单调性:对 $\forall x_1$，$x_2\in[2,7]$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$在$[2,7]$上严格单调减少. 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增加函数，但不是严格单调增加的.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，如果对于 $\forall x\in D$ 且 $-x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为偶函数. 如果对 $\forall x\in D$ 且 $-x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为奇函数.

例如，$f(x)=x^6$ 是偶函数，因为

$$f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x).$$

又如，双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$也是偶函数，因为

$$\operatorname{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x.$$

而 $f(x)=x^5$ 是奇函数，因为

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x).$$

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 也是奇函数，因为

$$\mathrm{sh}(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=-\mathrm{sh}x.$$

3. 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 $T>0$，使得对于 $\forall x\in D$ 都有 $x+T\in D$ 且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数. 使上式成立的最小正数 T 称为最小周期.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在数 $M>0$，使得对于 $\forall x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称为无界函数.

如果对 $\forall x\in D$，有 $f(x)\leqslant H_1$（或 $f(x)\geqslant H_2$），则称 $f(x)$ 在 D 上有上界（或下界）. 于是，若 $f(x)$ 在 D 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 这与前面有界的说法是等价的.

例如，$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；又如，$f(x)=\dfrac{x^2+7}{x^2+1}$ 有下界 1，有上界 7，即 $1<f(x)\leqslant 7$.

四、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括以下六种函数：

(1)常数函数 $y=C$（C 为常数）；

(2)幂函数 $y=x^a$（$a\in\mathbf{R}$）；

(3)指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

(4)对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

(5)三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

(6)反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\,x$.

2. 反函数

例如，自由落体的路程（即高度）与时间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2\ (g\text{ 是重力加速度}).$$

这里路程 s 是时间 t 的函数，但有时需要知道物体需要多少时间才能下落到某处，这时从物理学知，有关系

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

即 t 是 s 的函数.

一般地有下面定义.

定义 2 设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果对 $\forall y\in f(D)$（即 R_f），有唯一一个 $x\in D$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(D)$上定义了一个函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，称该函数为 $y=f(x)$的反函数. 习惯上将 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$.

例如：

$y=x+3$，有 $x=y-3$，即 $y=x-3$ 是 $y=x+3$ 的反函数.

$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$，有 $x=\sin^{-1}y$，即 $y=\sin^{-1}x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数，但习惯记为 $y=\arcsin x$.

$y=a^x$，有 $x=\log_a y$，即 $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数.

一般情况下，给定一个函数 $y=f(x)$，是否一定有反函数呢？关于在什么条件下反函数一定存在，我们有以下定理.

定理 设 $y=f(x)$在某区间$[a,b]$上严格单调增加（减少），值域为$[c,d]$，则必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$在$[c,d]$上严格单调增加（减少）.

证明略.

3. 函数的四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域分别为 D_f，D_g，记 $D=D_f\cap D_g$，且 $D\neq\varnothing$（$\varnothing$表示空集），则当 $x\in D$ 时，

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

都是有意义的新函数.

4. 复合函数

由简单函数构成复杂的函数，除了上述运算外，还可以通过复合运算而得到.

例如，设有 $y=\lg u$，$u=x^2-3$，在 $u=x^2-3>0$，即$|x|>\sqrt{3}$时，有 $y=\lg(x^2-3)$.

一般有下面定义.

定义 3 如果函数 $y=f(u)$的定义域为U，值域为 R_f. 而函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D，值域为 R_φ. 若 $R_\varphi\subset U$，则对 $\forall x\in D$，通过变量 u，相应地得到唯一确定的一个值 y，于是 y 成为 x 的函数，记为

$$y=f(\varphi(x)),$$

称这样的函数为 $f(u)$和 $\varphi(x)$复合而得的复合函数，它的定义域是 D，这里 u 称为中间变量.

例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cos w$，$w=x^2+5$ 可以复合而得到 $y=\sqrt{\cos(x^2+5)}$.

反之，一个复杂的函数可以分解为一些简单函数.

例如，$y=3^{\sin\frac{1}{x}}$可以分解为 $y=3^u$，$u=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$.

又如，$y=\ln(2+e^x)^5$ 可以分解为 $y=\ln u$，$u=w^5$，$w=2+e^x$.

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算（分母不为零）和有限次复合运算，所得到的函数统称为初等函数.

例如，