21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN FUDAO

高等数学学习指导与考研辅导（上册）

主　编◎孙法国　胡新利

副主编◎王彩霞　孙　娜　贾悦利

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN FUDAO

高等数学学习指导与考研辅导（上册）

主　编◎孙法国　胡新利
副主编◎王彩霞　孙　娜　贾悦利
编　委（以姓氏笔画为序）
丁小丽　王晓东　王彦林　张娟娟　赵宁波

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与考研辅导. 上册/孙法国，胡新利主编. —北京：中国人民大学出版社，2014.7
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-19666-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙…②胡… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 148318 号

21 世纪高等院校创新教材
高等数学学习指导与考研辅导（上册）
主　编　孙法国　胡新利
副主编　王彩霞　孙　娜　贾悦利
Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao yu Kaoyan Fudao

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街 31 号　　**邮政编码**　100080
电　　话　010－62511242（总编室）　　010－62511770（质管部）
　　　　　010－82501766（邮购部）　　010－62514148（门市部）
　　　　　010－62515195（发行公司）　　010－62515275（盗版举报）
网　　址　http://www.crup.com.cn
　　　　　http://www.ttrnet.com（人大教研网）
经　　销　新华书店
印　　刷　北京民族印务有限责任公司
规　　格　185 mm×260 mm　16 开本　　**版　　次**　2014 年 7 月第 1 版
印　　张　20.75 插页 1　　**印　　次**　2014 年 7 月第 1 次印刷
字　　数　485 000　　**定　　价**　42.00 元

内容简介

本书是作者根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的. 全书共分二十五讲（上册十五讲，下册十讲），每讲分七个板块：重点内容提要、释疑解惑、考点及典型例题分析、学习效果测试题、学习效果测试题答案与提示、考研模拟训练题、考研模拟训练题答案与提示.

本书是理工科院校本科生及经济管理院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的复习参考资料.

前　言

高等数学是理工科院校及经济管理类院校的一门重要的基础课. 为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了此书. 本书是理工科院校本科生及经济管理类院校学生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的复习参考资料.

全书共分为二十五讲，每讲分为七个部分：

一、重点内容提要；

二、释疑解惑；

三、考点及典型例题分析；

四、学习效果测试题；

五、学习效果测试题答案与提示；

六、考研模拟训练题；

七、考研模拟训练题答案与提示.

本书有以下几个特点：

(1) 对每讲的内容及方法作了小结，并指出了课程考试重点和考研重点.

(2) 通过"释疑解惑"，对重点概念及容易混淆的问题进行了诠释及辨析，力求使读者建立起准确无误的概念.

(3) 通过对典型例题的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧.

(4) 精心设计学习效果测试题，以方便初学者检测之用.

(5) 根据大纲编写了考研模拟训练题，兼顾了考研同学复习的需要.

(6) 在理工科《高等数学》教学内容的基础上，增加了"导数的经济学应用"及"定积分的经济学应用"，以方便经济管理类院校学生的使用.

本书第 1 讲、第 2 讲、第 14 讲、第 15 讲由胡新利编写，第 3 讲、第 4 讲由贾悦利编写，第 5 讲、第 6 讲由孙法国编写，第 7 讲、第 8 讲、第 13 讲由王晓东编写，第 9 讲、第 10 讲由王彩霞编写，第 11 讲、第 12 讲由孙娜编写，第 16 讲、第 17 讲由王彦林编写，第 18 讲、第 19 讲由赵宁波编写，第 20 讲、第 21 讲由丁小丽编写、第 22 讲、第 23 讲、第 24 讲、第 25 讲由张娟娟编写. 全书由孙法国和胡新利统稿. 限于编者水平，书中若有疏漏之处，敬请读者批评指正.

编者

2014 年 5 月于西安

目　　录

第 1 讲

函数与极限

1.1 重点内容提要

1.1.1 映射的概念

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 f：$X \to Y$，其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$，X 中的所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$.

1.1.2 函数的概念

设数集 $D\subset R$，则称映射 f：$D\to R$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 称 D 为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量或函数.

1.1.3 函数的特性

（1）有界性：设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得 $x\in I$ 时，$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

（2）单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于 I 内的任何两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加（减少）的函数. 这时区间 I 就称为单调区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

（3）奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶（奇）函数.

（4）周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

1.1.4 反函数

设函数 $f: D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$，称此逆映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

1.1.5 复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 成为 x 的函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 这个函数称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量.

1.1.6 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数.

1.1.7 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤而得到的并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.8 极限的概念

（1）数列极限的定义：如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系：对于任意给定的 $\varepsilon>0$（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$. 如果数列没有极限，则说数列是发散的.

（2）$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果任给 $\varepsilon>0$（不论多么小），存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

（3）$x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限的定义：设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

如果 $x>0$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty$），只把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义，同样，若 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to-\infty$），只把上面定义中 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

1.1.9 无穷大与无穷小

（1）无穷小的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，$|f(x)|<\varepsilon$，

那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）.

（2）无穷大的定义：如果任给 $M>0$（M 无论多大），存在 $\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）时，$|f(x)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

1.1.10　无穷小的比较

（1）设 α 及 β 是同一极限过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小. 记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小. 记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小. 记作 $\alpha\sim\beta$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$，$k>0$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

（2）等价无穷小的一个重要性质.

若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

（3）常用的一些等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x$，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0,\ a\neq1)$.

1.1.11　极限的运算法则

（1）有限个无穷小的和是无穷小.

（2）有界函数与无穷小的积是无穷小.

（3）有限个无穷小的积是无穷小.

（4）若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.

（5）几个常用公式

①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$.

②当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

③$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

（6）复合函数的极限运算法则.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

1.1.12　极限存在准则

（1）单调有界原理：单调有界数列必有极限.

（2）夹逼准则：若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$. 特别地，若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

1.1.13　两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$）.

1.1.14　极限的性质

（1）极限的唯一性：若数列或函数的极限存在，则极限值一定唯一.

（2）收敛数列的有界性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界. 反之，结论不真.

（3）函数极限的局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）. 特别地，当 $A\neq 0$ 时，则存在点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

（4）保不等式性：如果在点 x_0 的某一去心邻域内，$f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

1.2　释疑解惑

问题 1.1　函数 $y=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|$ 与 $y=2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 是相同的函数吗？

解答　不同；$y=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|$ 的定义域为 $D_1=\{x\,|\,x\neq 0,\ x\in R\}$.

$y=2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 的定义域为 $D_2=\{x\,|\,x>0,\ x\in R\}$.

判断两个函数是否相同，应考虑是否存在相同的定义域以及对应法则，这是函数定义的两要素．这两个函数的定义域不同，所以它们是不同的函数．

如果应用下面方法判断，则是错误的．

由初等数学的运算性质知：$\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=\ln\left(\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}\right)=2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$，因此这两个函数是相同的函数．

错误的关键是初等数学中关于对数的运算法则：$\ln(u^2)=2\ln u$ 在条件 $u>0$ 下才成立，而在考虑函数 $\ln(u^2)$ 的定义域时却并不受 $u>0$ 的限制．所以上述两个函数是否相同的关键是其定义域是否相同．

问题 1.2　$y=2\ln x$ 及 $x=2\ln y$ 是相同的函数吗？

解答　相同；因为这两个函数的定义域及对应法则都相同．

问题 1.3　给定函数 $f(n)=\dfrac{1+2n}{1+n^2}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）及任意正数 ε，试确定一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时不等式 $\dfrac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$ 成立．

解答　注意到本题的要求是确定 N，并不是要找最小的 N，所以我们不必解不等式 $f(n)<\varepsilon$，而可将 $f(n)$ 先适当放大，估计出 $f(n)<g(n)$，再来解放大后的新不等式 $g(n)<\varepsilon$．特别要注意将 $f(n)$ 放大一定要适当，其次由 $g(n)<\varepsilon$ 求解 n 比较容易．

将函数 $f(n)$ 先放大：$\dfrac{1+2n}{1+n^2}<\dfrac{1+2n}{n^2}\leqslant\dfrac{3n}{n^2}=\dfrac{3}{n}$，解不等式 $\dfrac{3}{n}<\varepsilon$，得 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$．由于当 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$ 时，$\dfrac{3}{n}<\varepsilon$，从而有 $\dfrac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$，取 $N=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$，$N$ 即为所求．

若本题应用下面方法求解，则是错误的．

为求 N，解不等式 $\dfrac{1+2n}{1+n^2}<\varepsilon$，该式等价于不等式 $\varepsilon n^2-2n+(\varepsilon-1)>0$，解得 $n>\dfrac{1+\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 或 $n<\dfrac{1-\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$，由于 $\dfrac{1-\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 不合要求，应舍去．取 $N=\left[\dfrac{1+\sqrt{1+\varepsilon-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right]$，$N$ 即为所求的正整数．

错误原因是：本题所给的条件中 $\varepsilon>0$ 是任意的正数，若取 $\varepsilon=2$ 代入上面所求得的 N，$N=\left[\dfrac{1+\sqrt{-1}}{2}\right]$，但此时 $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{2}$ 非实数，可见上面所求得的 N 的表达式不适合于任意 $\varepsilon>0$．

问题 1.4　给定函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ 及任意正数 $\varepsilon>0$，试确定 $x=1$ 的一个小邻域：$|x-1|<\delta$，使在其内不等式 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立．

解答　（1）首先应理解题目的意思．当 x 充分趋近于 1 时函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+3}}$ 的值才趋近

于$\frac{1}{2}$，所以对于任意的正数$\varepsilon>0$，$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$只可能在$x=1$的一个小邻域内成立，在$x=0$或其他点的小邻域内，上述不等式不可能成立.

（2）当直接解不等式$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$较困难时，可以先放大不等式的左端，但放大有两个原则：一是使表达式简化，二是必须保留因子$|x-1|$.

于是先放大不等式左端

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^3+3}}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2\sqrt{x^2+3}}\right|=\left|\frac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x^2+3}(2x+\sqrt{x^2+3})}\right|$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}}\right||x-1|,$$

限制$|x-1|<1$，即$0<x<2$，则有$\left|\frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}}\right|<\frac{3}{\sqrt{3}}$. 故$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}|x-1|$. 解新的不等式$\frac{3}{2}|x-1|<\varepsilon$，得$|x-1|<\frac{2}{3}\varepsilon$. 取$\delta=\min\left\{1,\frac{2}{3}\varepsilon\right\}$，当$|x-1|<\delta$时，不等式$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$必成立.

如果应用下面方法来解答，则是错误的.

为确定δ，应解函数不等式$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 由于直接解不等式较困难，且由上题的分析，可以先放大不等式的左端. $\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{2}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$，解新的不等式$\frac{|x|}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}<\varepsilon$，得$|x|<\sqrt{3}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)$，从而有$|x-1|<|x|+1<\sqrt{3}\varepsilon+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 取$\delta=\sqrt{3}\varepsilon+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，当$|x-1|<\delta$时不等式$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$必成立.

错误原因是：解题过程中的放大是不适当的. 所谓适当放大，是指放大后的式子在自变量的同一变化过程中仍以零为极限.

问题 1.5 函数极限与数列极限有什么联系？

解答 如果对于任何以x_0为极限的数列$x_n(x_n\neq x_0)$有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 反之，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么对任何以$x_0$为极限的数列$x_n(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由此命题可知，如果数列x_n与x'_n都以x_0为极限，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$，则当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限一定不存在.

例如，$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，取$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x'_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$（$n=1,2,\cdots$），数列$x_n$与$x'_n$都以0为极限，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=-1$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$. 所以当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的极限一定不存在.

问题 1.6　指出下列各题解法中的错误，并写出正确解法：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}2x^3-\lim\limits_{x\to\infty}x+1=\infty-\infty+1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3}=0+0+\cdots+0=0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n+1}\cdot\sin n!\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n!\ =0$.

解答　(1) 的错误是用了商的极限运算法则，因分母的极限为零，所以不能用商的极限运算法则. 正确解法是利用无穷小与无穷大的关系来求.

$\because\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}x}=\dfrac{0}{3}=0$,

$\therefore\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-3}=\infty$.

(2)的错误是用了函数代数和的极限运算法则. $\lim\limits_{x\to\infty}2x^3=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ 都属于极限不存在，不能用代数和的极限运算法则. “∞ ”只是一个记号，不能进行四则运算. 正确的解法应该利用无穷小与无穷大的关系来求.

$\because\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{0}{2}=0$,

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

(3) 的错误是利用了和的极限运算法则. 因为 (3) 中的项数随 n 的无限增大而无限增多，不是有限项，故不能用上述法则. 正确解法是：化为有限项代数和或有限项乘积形式再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\times 1\times 2=\frac{1}{3}\ .$$

(4) 的错误是用了极限的乘法法则. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n!$ 不存在，所以不能用上述法则. 正确解法是：根据无穷小与有界函数的乘积是无穷小的定理来求.

$\because n\to\infty$时，$\dfrac{(-1)^n}{n+1}$是无穷小，$|\sin n!|\leqslant 1$,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n+1}\cdot\sin n!\right]=0$.

问题 1.7　讨论函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限?

解答 一般地说，讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限时，都应先看一看左、右两侧极限的情况，如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在点 x_0 的两侧变化一致，则不必分开研究；如果左、右两侧的变化趋势可能有差别，就应分开研究. 例如求分段函数在分段点处的极限时，必须研究左、右极限. 有些函数在特殊点的左、右极限不一样，如 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$， $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

问题 1.8 “凡分段函数都不是初等函数”对吗？

解答 不对；初等函数是指由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤所得到的并能用一个式子表示的函数. 分段函数不是用一个式子表达的函数，但不能说“凡分段函数都不是初等函数”，例如，$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$是一个分段函数，但它也可用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 来表示. 事实上，$y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成，因此，这个分段函数是初等函数. 又如，$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ 1, & x\leqslant 0\end{cases}$是一个分段函数，不是初等函数.

1.3 考点及典型例题分析

课程考试重点

(1) 求函数的定义域、表达式及函数值，求分段函数的定义域、函数值.

(2) 判断所给函数具有的特性（单调性、奇偶性、有界性和周期性）.

(3) 求函数在一点处的左极限与右极限，函数在一点处极限存在的充要条件.

(4) 极限的性质，极限的四则运算法则.

(5) 无穷小与无穷大的概念，无穷小的性质，无穷小与无穷大的关系，无穷小阶的比较（高阶、低阶、同阶和等价），运用等价无穷小代换求极限.

(6) 两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），用两个重要极限求极限的方法.

考研重点

(1) 判断所给函数具有的特性（单调性、奇偶性、有界性和周期性）.

(2) 求函数在一点处的左极限与右极限，函数在一点处极限存在的充要条件.

(3) 极限的性质.

(4) 无穷小与无穷大的概念，无穷小的性质，无穷小与无穷大的关系，无穷小阶的比较（高阶、低阶、同阶和等价），运用等价无穷小代换求极限.

(5) 两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），用两个重要极限求极限的方法.

题型一 求函数的定义域以及函数特性的判断.

例 1.1 求函数 $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x-1}{x-10}\right)$的定义域.