

# 初中 数学 几何辅助线

# 秘籍



适用于初二、初三年级

- ▶ 它——中考状元、优秀学生的必备宝典
- ▶ 它——中考模考、名校经典考题的结晶
- ▶ 它——学而思教育顶尖教师经验方法的积淀
- ▶ 它——中考命题专家透彻剖析、权威解读

学而思培优教研部 编著

一部  
可“信任”的秘籍

## 权威

一部  
可“交流”的秘籍

## 互动

一部  
可“观看”的秘籍

## 视频



视频讲解

初中  
数学

# 几何辅助线

# 秘籍

学而思培优教研部 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有，侵权必究。

#### 图书在版编目（CIP）数据

几何辅助线秘籍：初中数学 / 学而思培优教研部编著. —北京：电子工业出版社，2014.1  
ISBN 978-7-121-21152-2

I. ①几… II. ①学… III. ①几何课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 175694 号

责任编辑：蔡 葵

文字编辑：刘文杰 邓 艳

印 刷：北京天宇星印刷厂

装 订：三河市鹏成印业有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×1092 1/16 印张：12 字数：307 千字

印 次：2014 年 1 月第 1 次印刷

定 价：29.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，  
联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn)，盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线：（010）88258888。

# 学而思图书策划委员会

主 编 张邦鑫

副 主 编 刘亚超 白云峰 王朝立 杨付光 王 伟

陈体奎 刘 开 马江伟 李 晋 孙 凯

张超月 侍春雷 王 磊 郭 巍 李正堂

周 斌 林 达 王 帅 田 峰

执行主编 韩春成

编 著 学而思培优教研部

刘 蕾 韩春成 张 江 陈金根 李莎威

高文章 金莹莹 许秀霞 刘 凡 朱 韬

董小磊 徐 杰 余泽伟 卢 宁

特别鸣谢 (按姓氏笔画为序)

王新新 牛丽娟 尹 悦 史彦秋 白 超

兰 岚 冯艳华 吕静琳 江卫东 何丽君

张明颂 林儒强 罗 俊 姜 盼 都君波

高晓雪 解枝星

# 前 言

学而思国际教育集团成立于2003年,仅用八年时间就发展成为北京市乃至全国范围内知名度、美誉度颇高的中、小学教育培训机构。目前在北京、上海、天津、广州等众多城市设立分校,拥有数千名优秀教师。

学而思秉承着“品格第一、趣味第二、学习第三”的教育理念,经过多年努力培养出了一批成绩突出的优秀学子。在北京中考中,我们有:

2009年京城4大中考状元,138名理科满分;2010年京城6大中考状元,152名理科满分;2011年京城12大中考状元,239名理科单科满分!

为了让更多的同学在平时考试中获得理科满分,应广大学生、家长及公立学校老师要求,由学而思一线顶级教师历时一年时间倾情打造这本能够真正提高学生成绩及解题能力的《几何辅助线秘籍》。

我们反对机械记忆、题海战术;我们提倡钻透一道题,学会一类题!本书汇集众多中考命题专家及一线教师的多年研究成果和课堂实践,具有针对性和代表性,科学系统,思维与技巧同练,最终成为无数学生攻克几何难关的秘籍。本书具有三大特点:

## 第一:权威团队

本书以最新课改精神为依据,以现行初中数学教材为蓝本,科学准确定位而编写,汇集了众多中考专家及全国数千名一线教师的智慧结晶;内容遵循命题规律;知识点体现系统性、条理性。在解题方法方面,注重一题多解、多题一解、变通分析、总结规律。帮助你跳出题海,举一反三,触类旁通。

## 第二:视频讲解

本书采用了国内教辅市场最新的教学形式——视频教学。我们将书中的部分题目做了免费的网络高清现场教学视频讲解,力求使读者更加深刻地学习题目的考点、考法,真正地把老师请到家。读者通过书中的防伪码登录:<http://zt.xueersi.com/fuzhuxian>进行观看。

## 第三:论坛互动

读者只要登录<http://bbs.eduu.com/forum-44-1.html>点击的《几何辅助线秘籍》答疑贴,即可实现与老师在线答疑、交流心得体会,以解决在使用《几何辅助线秘籍》一书中所遇到的所有问题。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”希望同学们通过自身的努力,不断奋进,愿《几何辅助线秘籍》助你掌握添加辅助线的方法、技巧,学会自主学习,顺利通过中考大关。

本书部分试题选自历年全国中考试题、各省竞赛试题、模拟试题及名校期末试题,在本书编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见,在此表示衷心的感谢。

我们秉承着学而思“凡事全力以赴”的精神编写此书,但不妥之处在所难免。读者在使用本书过程中发现任何问题或者改善性意见,均可与我们联系:(Email:jiaoyan@100tal.com)。

学而思培优教研部

# 内容完全解读

俗话说：“难者不会，会者不难。”学习这件事，如果摸清了其中的规律和奥妙，你会觉得，它是件挺好玩的事儿，甚至会觉得很有成就感。

对于本书的使用，建议您：先认真地、全力以赴地思考探究，待到“山重水复疑无路”之时，再参阅答案解析或观看视频讲解，相信此时您会有“柳暗花明又一村”的快感，因此对学习方有事半功倍的效果！

执行主编：韩春成

1. 本书以《考试大纲》为编写依据，对学科的知识、方法、能力以及高频考点、经典考题做出完美解读。

2. 本书采用先进的“课本+视频”编写方式，通过视频课程对题目进行详尽解读，在理解层面上力求讲清、讲精、讲活。

## 第二章 角平分线模型的构造

你会不会熟练应用角平分线四大基本模型解题？

### 一、考情分析

1. 在近几年全国中考试题及模拟试题中，均有对角平分线的考查，现对试题中有关角平分线辅助线添加的考题进行分类，具体呈现如下。

考查类型	卷型	题序	分值
角平分线相关性质及判定	2010年北京中考卷	25	8
	2011年北京中考卷	24	7
	2011年湖北省黄冈中考卷	8	3
	2011年广西省桂林中考卷	21	8
	2011年山西省太原中考卷	25	9

### 2. 专家预测

三角形内外角平分线的概念是处理与角相关问题的基本依据和方法，在中考题中经常利用角平分线的性质去证明线段、角相等或三角形全等。随着课改的深入，中考的题型也发生了变化。利用角平分线的对称性把图形翻折，再进行推理计算；以及与角平分线有关的探究题、综合题成为近几年中考的热点题型。

### 二、名师讲堂

#### 知识点睛

角平分线

(1) 定义：如图 2-1，如果  $\angle AOB = \angle BOC$ ，那么  $\angle AOC = 2\angle AOB = 2\angle BOC$ ，像  $OB$  这样，从一个角的顶点出发，把这个角分成相等的两个角的射线，叫作这个角的角平分线。

(2) 角平分线的性质定理

- ① 如果一条射线是一个角的平分线，那么它把这个角分成两个相等的角。
- ② 在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等。



图 2-1

#### 开心数学

有一人有 240 公斤水，他想运往干旱地区赚钱。他每次最多携带 60 公斤，并且每前进一公里须耗水 1 公斤（均匀耗水）。假设水的价格在出发地为 0，以后，与运输路程成正比（即在 10 公里处为 10 元/公斤，在 20 公里处为 20 元/公斤……），又假设他必须安全返回，请问，他最多可赚多少钱？

018

答案：1800 元

### 考点呈现 考向预测

考纲全真展示，考点权威准确

### 考点完全解读

理清解题思路，掌握方法技巧，提高解题效率。

### 知识点睛

梳理基础知识，理清知识脉络，明确考点内容。

### 开心数学

开阔你的视野，放松你的心情。

题目点评

总结解题思路，明确解题方法。

视频讲解

视频教程讲解，助你深刻理解。

例题精讲

优选经典试题，全面深入解析，激活发散思维。

线段之间的关系通常有以下几种提问方式：

- (1) 当问两条线段的关系时，一般要回答数量关系和位置关系。
- (2) 当问线段之间的数量关系时，一般情况下要写等量关系，或者是差倍分关系。
- (3) 当问线段之间的大小关系时，必须填大(等)于或小(等)于。

当所求线段关系为和差倍分时，一般情况我们作辅助线的方法是截长补短。

变式 1

如图 2-11 所示，已知  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle A=108^\circ$ ， $BD$  平分  $\angle ABC$ 。求证： $BC=AB+CD$ 。

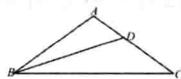


图 2-11

变式 2

如图 2-12，已知  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle A=100^\circ$ ， $BD$  平分  $\angle ABC$ ，求证： $BC=BD+AD$ 。

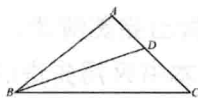


图 2-12

例 8

如图 2-13(a)， $OP$  是  $\angle MON$  的平分线，请你利用该图形画一对以  $OP$  所在直线为对称轴的全等三角形。

请你参考上图构造全等三角形的方法，解答下列问题：

- (1) 如图 2-13(b)，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB$  是直角， $\angle B=60^\circ$ ， $AD$ 、 $CE$  分别是  $\angle BAC$ 、 $\angle BCA$  的平分线， $AD$ 、 $CE$  相交于点  $F$ 。请你判断写出  $FE$  与  $FD$  之间的数量关系；
- (2) 如图 2-13(c)，在  $\triangle ABC$  中，如果  $\angle ACB$  不是直角，而(1)中的其他条件不变，请问，你在(1)中所得结论是否依然成立？若成立请证明；若不成立，请说明理由。

开心数学

陈奕还有首歌叫十年，吕珊有首歌叫 3650 夜，那现在问，十年可能有多少天？

答案：十年可能包含 2~3 个闰年，3652 或 3653 天

$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore PM = PN.$

$\because \angle 3 = \angle 4, \therefore PN = PQ.$

$\therefore PM = PQ.$

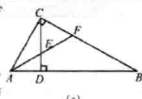
$\therefore AP$  平分  $\angle BAC.$

例 2

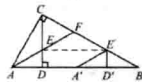
如图 2-4(a)， $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为  $D$ ， $AF$  平分  $\angle CAB$ ，交  $CD$  于点  $E$ ，交  $CB$  于点  $F$ 。

(1) 求证： $CE=CF$ 。

(2) 将图 2-4(a) 中的  $\triangle ADE$  沿  $AB$  向右平移到  $\triangle A'D'E'$  的位置，使点  $E'$  落在  $BC$  边上，其它条件不变，如图 2-4(b) 所示，试猜想： $BE'$  与  $CF$  有怎样的数量关系？请证明你的结论。



(a)



(b)

图 2-4

解析

(1) 证明： $\because CD \perp AB,$

$\therefore \angle ADC=90^\circ.$

$\because \angle ACB=90^\circ,$

$\therefore \angle CAF + \angle CFA = 90^\circ, \angle DAE + \angle AED = 90^\circ.$

$\because AF$  平分  $\angle CAB,$

$\therefore \angle CAF = \angle DAE.$

$\therefore \angle CFA = \angle AED = \angle CEF.$

$\therefore CE = CF.$

(2) 解： $BE' = CF.$

证明：如图 2-4(c)，过点  $E$  作  $EG \perp AC$  于点  $G$ 。

开心数学

有一个大西瓜，用水果刀平整地切，总共切 9 刀，最多能切成多少份？最少能切成多少份？

答案：最少 10，最多 130

(3)角平分线的判定定理

①在角的内部,如果一条射线的端点与角的顶点重合,且把一个角分成两个等角,那么这条射线是这个角的平分线.

②在角的内部,到一个角两边距离相等的点在这个角的平分线上.

技巧提炼

与角平分线有关的常用辅助线作法,即角平分线的四大基本模型.

已知  $P$  是  $\angle MON$  平分线上一点,

(1)若  $PA \perp OM$  于点  $A$ ,如图 2-2(a),可以过  $P$  点作  $PB \perp ON$  于点  $B$ ,则  $PB=PA$ .可记为“图中有角平分线,可向两边作垂线”.

(2)若点  $A$  是射线  $OM$  上任意一点,如图 2-2(b),可以在  $ON$  上截取  $OB=OA$ ,连接  $PB$ ,构造  $\triangle OPB \cong \triangle OPA$ .可记为“图中有角平分线,可以将图对折看,对称以后关系现”.

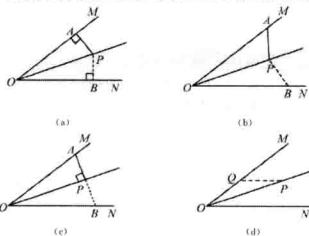


图 2-2

(3)若  $AP \perp OP$  于点  $P$ ,如图 2-2(c),可以延长  $AP$  交  $ON$  于点  $B$ ,构造  $\triangle AOB$  是等腰三角形, $P$  是底边  $AB$  的中点.可记为“角平分线加垂线,三线合一试试看”.

(4)若过  $P$  点作  $PQ \parallel ON$  交  $OM$  于点  $Q$ ,如图 2-2(d),可以构造  $\triangle POQ$  是等腰三角形,可

技巧提炼

归纳方法技巧,总结命题规律,提炼解题策略,提高学习技能。

$\therefore \angle GEF = 60^\circ + \angle 1, FG = FH,$   
 $\therefore \angle HDF = \angle B + \angle 1 = 60^\circ + \angle 1,$   
 $\therefore \angle GEF = \angle HDF,$   
 $\therefore \triangle EGF \cong \triangle DHF,$   
 $\therefore FE = FD.$

总结

此题的辅助线,作垂直和对称皆可.当我们证明两条线段相等时,可用以下方法:

- (1)两条线段共端点且共线时,证明公共端点是中点或在这条线段的垂直平分线上.
- (2)两条线段共端点不共线时,证明底角相等.
- (3)两条线段不共端点不共线时,可通过找到中间等量代换一下或者放到两个三角形当中,直接证明三角形全等,如果不存在这样的三角形,那么就需要你去构造三角形.

牛刀小试

牛刀小试

(1)如图 2-14(a),在  $\triangle ABC$  中, $\angle ABC$  与  $\angle ACB$  的角平分线相交于点  $F$ ,过  $F$  作  $DE \parallel BC$ ,交  $AB$  于点  $D$ ,交  $AC$  于点  $E$ ,若  $BD+CE=9$ ,则线段  $DE$  之长为\_\_\_\_\_.

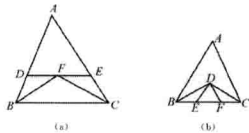


图 2-14

(2)如图 2-14(b),在  $\triangle ABC$  中, $BD, CD$  分别平分  $\angle ABC$  和  $\angle ACB, DE \parallel AB, FD \parallel AC$ .如果  $BC=6$ ,求  $\triangle DEF$  的周长.

牛刀小试

巩固本章知识,题目难易分明,视频互动学习,检测学习效果。

博学多识

**耶鲁大学** 它的校徽历来共同角逐美国大学和研究生院前三名的位置.该校教授阵容、课程安排、教学设施方面堪称一流.漂亮的歌特式建筑和乔治王朝式的建筑与现代化的建筑交相辉映,把整个校园点缀得十分古典和秀丽.秋季的校园中金黄暗红的落叶遍地,阳光斜照那些黄褐色巨石建成的古色古香的巍峨建筑物.



小试牛刀

已知：如图 2-20，在  $\triangle ODC$  中， $\angle D=90^\circ$ ， $EC$  是  $\angle DCO$  的角平分线，且  $OE \perp CE$ ，过点  $E$  作  $EF \perp OC$  交  $OC$  于点  $F$ 。猜想：线段  $EF$  与  $OD$  之间的关系，并证明。

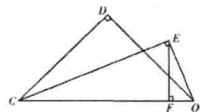


图 2-20

眺望中考

已知：如图 2-21，在四边形  $ABCD$  中， $AB+BC=CD+DA$ ， $\angle ABC$  的外角平分线与  $\angle CDA$  的外角平分线交于点  $P$ ，求证： $\angle APB=\angle CPD$ 。

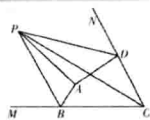


图 2-21

眺望中考

直击中考热点，预测命题趋势。

点拨解题思路

详尽解析试题，点拨解题关键。

参考答案

参考答案仅供参考，你有更巧妙的方法要告诉我吗？

第一章

例 2 后变式 1

答： $AF=EF$

如右图，延长  $AD$  到  $G$ ，使  $DG=AD$ ，连接  $BG$ 。

$\because BD=CD, \angle BDG=\angle CDA, AD=GD,$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle GDB$  (SAS).

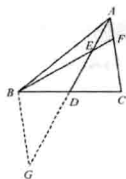
$\therefore AC=GB, \angle G=\angle EAF.$

又  $\because BE=AC,$

$\therefore BE=BG.$

$\therefore \angle G=\angle BED, \therefore \angle BED=\angle AEF.$

$\therefore \angle AEF=\angle FAE, \therefore FA=FE.$



例 2 后变式 2

证法一：如右图(a)，延长  $FE$  到点  $H$ ，使  $HE=FE$ ，连接  $BH$ 。

$\because CE=BE, \angle CEF=\angle BEH, FE=HE,$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle BEH$  (SAS).

$\therefore \angle F=\angle H, CF=BH.$

$\because AD$  平分  $\angle BAC,$

$\therefore \angle 1=\angle 2.$

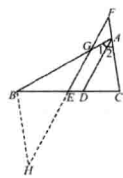
$\because AD \parallel EF,$

$\therefore \angle 1=\angle AGF=\angle 2=\angle F=\angle BGH.$

$\therefore \angle BHG=\angle BGH$

$\therefore BG=BH.$

$\therefore BG=CF.$



(a)

本书将帮您赢在起跑线，  
胜在考试冲刺，成就您的人生  
夙愿。

——题记

开动脑筋

哪儿的海不产鱼？

答案：辞海

# 目录

<b>第一章 中点模型的构造</b> .....	001
当已知条件中出现一个中点时,你首先想到的作辅助线解题方法是什么?如果已知两个中点呢?	
<b>第二章 角平分线模型的构造</b> .....	018
你会不会熟练应用角平分线四大基本模型解题?	
<b>第三章 弦图的构造及应用</b> .....	035
你知道赵爽吗?你知道弦图吗?赵爽带你走入弦图的世界.	
<b>第四章 图形变换之轴对称</b> .....	050
中考压轴大题如何解?对称帮你攻克压轴难题.	
<b>第五章 图形变换之旋转</b> .....	066
旋 $60^\circ$ ,转 $90^\circ$ ,带你体会构造的乐趣.	
<b>第六章 图形变换之平移</b> .....	083
中考常考考点——平移.今天你平移了吗?	
<b>第七章 梯形中的辅助线问题</b> .....	101
梯形8种辅助线作法,助你玩转四边形.	
<b>第八章 圆中的辅助线问题</b> .....	116
你知道圆也有辅助线秘籍吗?什么?还不知道?赶快来看吧!	
<b>参考答案</b> .....	132

# 第一章 中点模型的构造

当已知条件中出现一个中点时,你首先想到的作辅助线解题方法是什么?如果已知两个中点呢?

## 一、考情分析

1. 在近几年全国中考试题及模拟试题中,均有线段中点的考查,现对于试题中与中点有关的辅助线添加的考查进行分类,具体呈现如下.

中点相关辅助线考查类型	卷型	题序	分值
倍长中线	2009年北京中考卷	19	5
	2008年北京中考卷	25	8
	2011年湖北省黄冈中考卷	18	7
	浙江省宁波中考卷	22	6
等腰三角形和直角三角形中的中点	2009年北京市西城区一模	12	4
	2011年北京中考卷	19	5
	2011年天津中考卷	24	10
中位线	2008年北京中考卷	11	4
	2010年北京市海淀区一模	25	8
	黑龙江省中考卷	26	9

## 2. 专家预测

三角形是初中几何的重要内容之一,也是历年中考命题的热点.其中,三角形各边的中点、中线及中位线的有关性质的应用,是中考的必考内容,历年来多以计算和证明题的形式出现.通过对近几年北京及全国多个省市中考有关试题的分析,我们预计与中点有关的操作性试题和综合性的探究题将是今后几年中考数学的重点题型.

## 开心数学

一个经理有三个女儿,三个女儿的年龄加起来等于13,三个女儿的年龄乘起来等于经理自己的年龄,有一个下属已知道经理的年龄,但仍不能确定经理三个女儿的年龄,这时经理说只有一个女儿的头发是黑的,然后这个下属就知道了经理三个女儿的年龄.请问三个女儿的年龄分别是多少?

答案:2、2、9

## 二、名师讲堂

## 知识点睛

## 1. 线段的中点

如图 1-1(a), 点  $M$  将线段  $AB$  分成相等的两条线段  $AM$  与  $BM$ . 点  $M$  叫作线段  $AB$  的中点.

类似地, 还有线段的三等分点, 四等分点, 如图 1-1(b)、图 1-1(c).

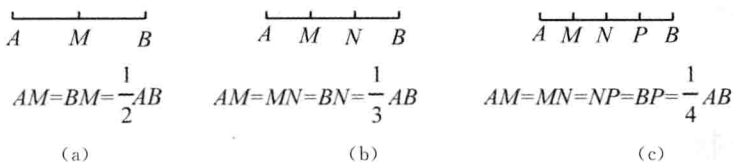


图 1-1

## 2. 等腰三角形

(1) 定义: 如图 1-2, 在  $\triangle ABC$  中, 如果  $AB=AC$ , 则  $\triangle ABC$  是等腰三角形.

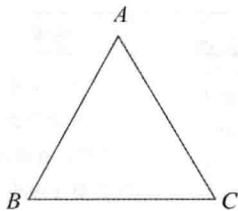


图 1-2

(2) 性质: ① 等腰三角形的两个底角相等 (简写成“等边对等角”);

② 等腰三角形的顶角平分线, 底边上的中线, 底边上的高相互重合 (简写成“三线合一”).

(3) 判定: 如果一个三角形有两个角相等, 那么这两个角所对的边也相等 (简写成“等角对等边”).

## 3. 等边三角形

(1) 定义: 三条边都相等的三角形叫作等边三角形.

(2) 性质: 等边三角形三个角都相等并且每一个角都等于  $60^\circ$ , “三线合一”.

(3) 判定: ① 三个角都相等的三角形是等边三角形;

② 有一个角是  $60^\circ$  的等腰三角形是等边三角形;

③ 三边相等的三角形是等边三角形.

## 4. 直角三角形

(1) 定义: 有一个角是直角的三角形叫作直角三角形.

(2) 性质: ① 直角三角形中两锐角互余;

② 直角三角形斜边中线等于斜边一半;

五个大小相同的一元人民币硬币, 要求两两相接触, 应该怎么摆?

答案: 底下放一个 1, 然后 2, 3 放在 1 上面, 另外的 4, 5 竖起来放在 1 的上面

- ③直角三角形中,如果一个锐角等于  $30^\circ$ ,那么它所对的直角边等于斜边的一半;  
 ④直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方——勾股定理.即如果直角三角形中两直角边是  $a, b$ ,斜边为  $c$ ,则  $a^2 + b^2 = c^2$ .

(3)判定:①有一个角是直角的三角形是直角三角形;

②如果三角形的三边长  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 = c^2$ ,那么这个三角形是直角三角形.

### 5. 全等三角形

(1)定义:能够完全重合的两个三角形叫作全等三角形.

(2)性质:全等三角形的对应边相等,对应角相等.

(3)判定:①三边对应相等的两个三角形全等(SSS);

②两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等(SAS);

③两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等(ASA);

④两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等(AAS);

⑤斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(HL).

☆小提示:S-Side(边),A-Angle(角),H-Hypotenuse(斜边),L-leg(直角边)

### 6. 三角形的中位线

(1)定义:我们把连接三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线,如图 1-3,在  $\triangle ABC$  中, $D, E$  分别是  $AB, AC$  中点,则  $DE$  叫作  $\triangle ABC$  的中位线.

(2)定理:三角形的中位线平行于三角形的第三边,且等于第三边的一半.

如图 1-3,在  $\triangle ABC$  中, $DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线,则  $DE \parallel BC$  且  $DE = \frac{1}{2}BC$ .

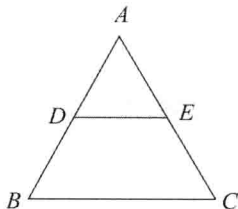


图 1-3

### 技巧提炼

很多几何题会给出“点 $\times$ 是线段 $\times\times$ 的中点”这样的条件,那么看到“中点”我们应该想到什么呢?“中点”有哪些作用呢?

1. 已知任意三角形一边上的中点,可以考虑:

(1)倍长中线或类中线(与中点有关的线段)构造全等三角形.如图 1-4(a)、图 1-4(b)所示.

(2)三角形中位线定理.

### 开心数学

一个人花 8 块钱买了一只鸡,9 块钱卖掉了,然后他觉得不划算,花 10 块钱又买回来了,11 块卖给另外一个人.问他赚了多少钱?

答案:2 元

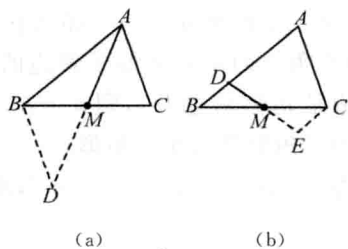


图 1-4

2. 已知直角三角形斜边中点, 可以考虑构造斜边中线.
3. 已知等腰三角形底边中点, 可以考虑与顶点连接用“三线合一”.
4. 有些题目的中点不直接给出, 此时需要我们挖掘题目中的隐含中点, 例如直角三角形中斜边中点, 等腰三角形底边上的中点, 当没有这些条件的时候, 可以用辅助线添加.

## 例题精讲

## 例 1

如图 1-5(a), 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=12, AC=20$ , 求  $BC$  边上的中线  $AD$  的范围.

**解析**

解: 如图 1-5(b), 延长  $AD$  到点  $E$ , 使得  $DE=AD$ , 连接  $CE$ .

$\because AD=ED, \angle ADB=\angle EDC, BD=CD,$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD.$

$\therefore CE=BA.$

在  $\triangle ACE$  中,  $AC-CE < AE < AC+CE$ , 即  $20-12 < AE < 20$

$+12,$

$\therefore 8 < AE < 32.$

$\because AD = \frac{1}{2}AE,$

$\therefore 4 < AD < 16.$

综上所述:  $4 < AD < 16.$

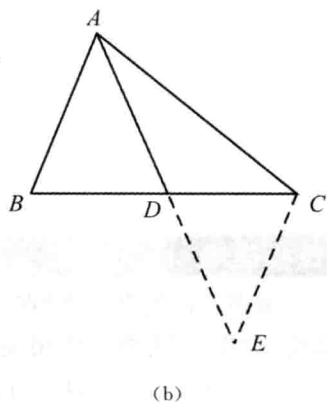
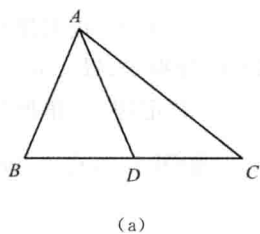


图 1-5

## 例 2

如图 1-6(a), 已知在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $BC$  边上的中线,  $E$  是  $AD$  上一点, 连接  $BE$  并延长交  $AC$  于点  $F$ ,  $AF=EF$ , 求证:  $AC=BE$ .

## 开心数学

100 个人回答五道试题, 有 81 人答对第一题, 91 人答对第二题, 85 人答对第三题, 79 人答对第四题, 74 人答对第五题, 答对三道题或三道题以上的人算及格, 那么, 在这 100 人中, 至少有 ( ) 人及格.

答案: 70

 解析

证法一:如图 1-6(b),延长  $AD$  到点  $G$ ,使  $DG=AD$ ,连接  $BG$ .

$$\because DB=DC, \angle BDG=\angle CDA, AD=GD.$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle GDB.$$

$$\therefore AC=GB, \angle G=\angle EAF.$$

$$\text{又} \because AF=EF,$$

$$\therefore \angle EAF=\angle AEF.$$

$$\because \angle AEF=\angle BED,$$

$$\therefore \angle G=\angle BED,$$

$$\therefore BE=BG,$$

$$\therefore BE=AC.$$

证法二:如图 1-6(c),延长  $ED$  到点  $G$ ,使得  $DG=DE$ . 连接  $CG$ .

$\because$  点  $D$  是  $BC$  中点,

$$\therefore BD=CD.$$

$$\because \angle BDE=\angle CDG,$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CGD.$$

$$\therefore \angle G=\angle BED, BE=CG.$$

$$\because AF=EF,$$

$$\therefore \angle FAE=\angle AEF=\angle BEG.$$

$$\therefore \angle G=\angle DAC, \text{即} \angle G=\angle EAF.$$

$$\therefore AC=GC.$$

$$\therefore AC=BE.$$

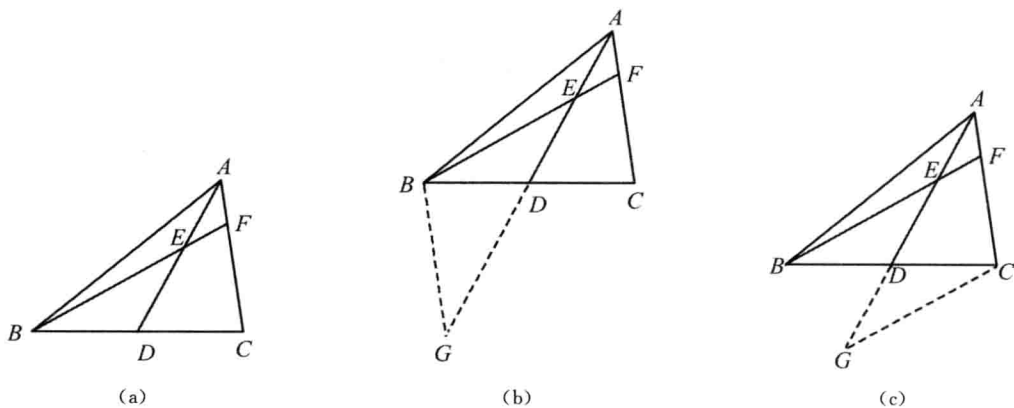


图 1-6

### 开心数学

1~50 号运动员按顺序排成一排,教练下令:“单数运动员出列!”剩下的运动员重新排队编号.教练又下令:“单数运动员出列!”如此下去,最后只剩下一个人,他是几号运动员?

答案:32 号

### 变式 1

如图 1-7, 已知在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $BC$  边上的中线,  $E$  是  $AD$  上一点, 且  $BE=AC$ , 延长  $BE$  交  $AC$  于点  $F$ ,  $AF$  与  $EF$  相等吗? 为什么?

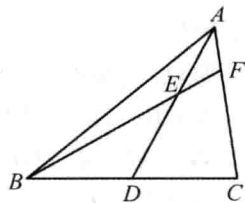


图 1-7

### 变式 2

如图 1-8, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  交  $BC$  于点  $D$ , 点  $E$  是  $BC$  中点,  $EF \parallel AD$  交  $CA$  的延长线于点  $F$ , 交  $AB$  于点  $G$ , 若  $AD$  为  $\triangle ABC$  的角平分线, 求证:  $BG=CF$ .

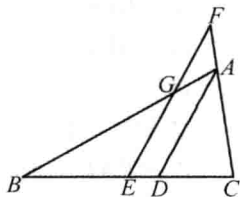


图 1-8

## 开心数学

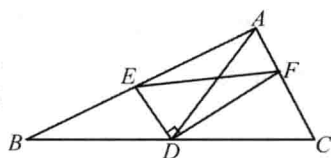
今有 2 匹马、3 头牛和 4 只羊, 它们各自的总价都不满 10000 文钱(古时的货币单位). 如果 2 匹马加上 1 头牛, 或者 3 头牛加上 1 只羊, 或者 4 只羊加上 1 匹马, 那么它们各自的总价都正好是 10000 文钱了. 问: 马、牛、羊的单价各是多少文钱?

答案: 3600, 2800, 1600



## 例 3

如图 1-9(a), 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle BAC=90^\circ$ , 点  $D$  为  $BC$  的中点, 点  $E, F$  分别为  $AB, AC$  上的点, 且  $ED \perp FD$ . 以线段  $BE, EF, FC$  为边能否构成一个三角形? 若能, 该三角形是锐角三角形, 还是直角三角形, 或者是钝角三角形?



(a)

## 解析

以线段  $BE, EF, FC$  为边能构成一个直角三角形.

证明: 如图 1-9(b), 延长  $FD$  到点  $G$ , 使  $GD=FD$ , 连接  $EG, BG$ .

$$\because CD=BD, \angle CDF=\angle BDG, FD=GD,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle BDG (\text{SAS}).$$

$$\therefore CF=BG, \angle FCD=\angle GBD.$$

$$\therefore AC \parallel BG.$$

$$\because \angle BAC=90^\circ,$$

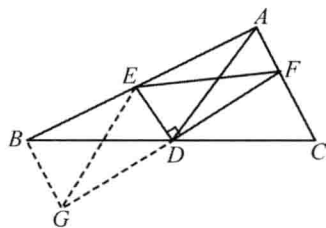
$$\therefore \angle EBG=90^\circ.$$

$$\because GD=FD, ED \perp DF, \therefore EF=EG.$$

$$\because \text{在 } \text{Rt}\triangle EBG \text{ 中, } BE^2 + BG^2 = EG^2,$$

$$\therefore BE^2 + CF^2 = EF^2.$$

故以线段  $BE, EF, FC$  为边能构成一个直角三角形.



(b)

图 1-9

## 变式 1

如图 1-10, 已知  $M$  为  $\triangle ABC$  中  $BC$  边上的中点,  $\angle AMB, \angle AMC$  的平分线分别交  $AB, AC$  于点  $E, F$ , 连接  $EF$ .

求证:  $BE + CF > EF$ .

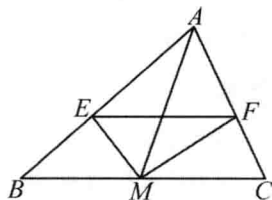


图 1-10

## 开心数学

一天, Harlan 的店里来了一位顾客, 挑了 25 元的货, 顾客拿出 100 元, Harlan 没零钱找不开, 就到隔壁飞白的店里把这 100 元换成零钱, 回来给顾客找了 75 元零钱. 过一会, 飞白来找 Harlan, 说刚才的钱是假钱, Harlan 马上给飞白换了张真钱, 问 Harlan 赔了多少钱?

答案: 100