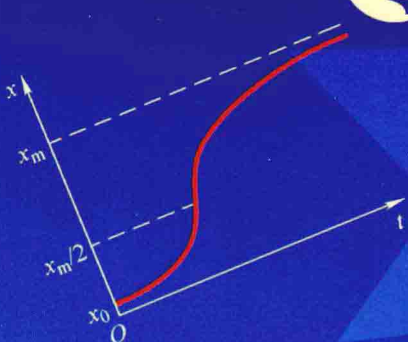
普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模方法与CUMCM赛题详解



$$\frac{\quad}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right), \quad x(0) = x_0$$

黄静静　王爱文　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模方法与 CUMCM 赛题详解

主编　黄静静　王爱文
参编　盛炎平　雷纪刚

机 械 工 业 出 版 社

本书共分为正文和附录两部分，正文以介绍数学建模方法和软件实现过程为主，共分为 7 章，内容包括数学建模概述、初等建模方法、数据的描述与处理方法、计算机模拟方法、微分方程建模方法、数学规划建模方法、图与网络建模方法等。在每章内容的最后一节都选择全国数学建模竞赛（CUMCM）赛题，并进行了详细解答。附录部分主要内容为 MATLAB 软件使用入门、LINGO 软件使用简介、数学建模论文范例。

本书所选案例求解步骤详细，并附有详细的程序实现过程。既重视基础建模方法与技巧的训练，又重视对软件求解模型能力的培养。

本书可作为普通本、专科院校或高职院校的数学建模课程教材及数学建模竞赛培训教材，同时也可供高等院校技师生及各类科技、工程工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法与 CUMCM 赛题详解 / 黄静静、王爱文主编．—北京：机械工业出版社，2014．9

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-47593-4

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①黄…　②王…　Ⅲ．①数学模型－高等学校－题解　Ⅳ．①O141．4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 180982 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：李永联　责任编辑：李永联　陈崇昱
版式设计：赵颖喆　责任校对：肖　琳
封面设计：马精明　责任印制：刘　岚

北京玥实印刷有限公司印刷
2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm・16．5 印张・315 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-47593-4
定价：28．50 元

前　言

数学建模就是通过深入了解实际问题的背景，明确所要解决问题的目标，经过对实际问题的合理抽象、假设以及简化，根据事物特有的内在规律，运用适当的数学工具建立变量与参数之间的数学结构（模型），并借助于数学知识或软件来求解模型，最后根据所求的结果去解释、检验以及指导实际问题。由于数学建模过程几乎模拟了科学研究的全过程，因而对于培养学生的科研能力、创新意识和应用数学的能力具有特殊的作用，这些能力也正是大学数学素质教育所要努力追求的。

但是，由于数学建模课所讨论问题的实践性、涉猎范围的广泛性、解决问题方法的多样性及其与计算机软件联系的紧密性等特点，所以数学建模主要采用案例教学的方式，这与传统数学教学不同。本书编者结合自身十多年从事数学建模课程教学、数学建模竞赛培训辅导以及科研工作中积累的经验和体会，并参考国内外大量相关教材，精选了大量具有一定代表性、规模适当且模块完整的数学建模案例。本书主要由正文和附录两部分组成。正文部分主要内容包括数学建模概述、初等建模方法、数据的描述与处理方法、计算机模拟方法、微分方程建模方法、数学规划建模方法、图与网络建模方法等，附录部分主要内容为 MATLAB 软件使用入门、LINGO 软件使用简介、数学建模论文范例，涵盖了数学建模常用的基本方法和工具。本书首先简要阐明各数学建模方法的原理，然后通过案例介绍各数学建模方法在解决实际问题时的具体应用。

本书的主要特色如下：

- 所选案例一部分是数学建模课程中经常选用的经典案例，每个案例体现了一种基本的数学建模方法；另一部分则是由近年来全国大学生数学建模竞赛题简化改编而来，并结合所在章节的知识点做重点剖析；每章介绍完基本建模方法后，都选择同类型的往年全国数学建模竞赛题目，并结合专家的解题思路，对该赛题进行详细求解。
- 案例求解步骤详细，每个案例均附有详细的程序实现过程，可帮助读者较快地掌握数学建模的基础知识。
- 既重视基础建模方法和技巧的训练，又重视使用 MATLAB 及 LINGO 软件求解模型的能力培养，且各章所选习题与教学内容紧密配合。各部分内容之间具有相对独立性，有利于教师在教学中根据不同的需求以及教学时数的不同进行取舍。

本书第1、2、6、7章及附录A由黄静静编写，第3、4、5章由王爱文编写，附录B、C由盛炎平编写，全书由雷纪刚校稿。本书可作为普通本、专科院校或高职院校的数学建模课程教材及数学建模竞赛培训教材，同时也可供高等院校师生及各类科技、工程工作者参考。

本书在编写过程中得到了北京信息科技大学理学院各级领导的关心和支持，得到了教育教学-人才培养模式创新试验-应用型人才培养模式试点改革（项目号：pxm2013_014224_000076）和北京市教委面上项目（KM201311232019），北京信息科技大学教改项目（2012JGYB60），以及教学提高-课程立项-数学建模项目（5028023918）的资助，此外，机械工业出版社的编辑们对本书的出版也付出了大量辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者不吝赐教，编者将认真吸取合理化建议，使本书不断得到完善和提高。谢谢！

编　者

目　　录

第 1 章　数学建模概述

数学的应用在当今世界已经渗透到一切领域。从科学的角度来看，目前出现的很多交叉学科都是在数学基础上建立起来的，如数学化学、数学生物学、数学地质学、计量经济学等；从高科技产品来看，数字化产品越来越多，特别是数学在计算机上的应用推动了计算机的发展。然而，无论应用数学解决哪一类实际问题，都需要经过数学建模这个阶段。那么什么是数学建模呢？数学建模就是从定性和定量的角度去分析所遇到的实际问题，通过抽象和简化，明确实际问题中最重要的变量和参数，通过某些“规律”建立变量和参数之间的数学联系，再用精确的或近似的数学方法求解，把数学的结果“翻译”成普通易懂的语言，并用现有实验数据或历史记录数据或其他手段来验证结果是否符合实际，从而达到解决实际问题的目的。日常生活中的这类问题很多，例如：公司员工应如何合理安排，才能获得最大效益；在网络发展的信息时代，DVD 应如何租赁，才能在保证利润的同时又使客户的满意度最大；传染病以及土壤中的重金属污染物是如何传播的？交巡警平台应如何设置才使得遇到突发事件时，警察在 3min 内到达等等。所有这些都需要建立数学模型来加以论证，从而为决策者提供理论依据。对以上举例，我们在后面的章节中会给予一一的解答。

1.1　数学模型与数学建模

通过下面三个简单的应用实例，读者会对数学建模有所体会，之后，我们再介绍数学模型的定义。

例 1.1　包汤圆

通常，1kg 面，1kg 馅，包 100 个汤圆。现在，1kg 面不变，馅比 1kg 多了，试问是包小些多包几个，还是包大些少包几个？

1. 模型准备

考虑两个极端的情况：包 1 个大的和包无穷多个小的。这里需要找一个合适的量来刻画汤圆的大小。汤圆是立体的，自然想到用体积来表示。汤圆的大小与面皮的大小有关，面皮的大小用面积来表示。

2. 模型假设

1）面皮是圆形的，且厚度一样；

2）汤圆的形状一样（即都是球形的）。

3. 符号与变量说明

R：大面皮半径；
r：小面皮半径；
S_1：大面皮面积；
S_2：小面皮面积；
V_1：大面皮汤圆体积；
V_2：小面皮汤圆体积；
n：小汤圆的个数；
k_1：面积系数；
k_2：体积系数。

4. 模型建立

如图 1-1 所示，圆面积为 S_1 的一个面皮，包成体积为 V_1 的汤圆；若分成 n 个面皮，每个圆面积为 S_2 的面皮，包成体积为 V_2 的汤圆，问：V_1 和 nV_2 哪个大，大多少？

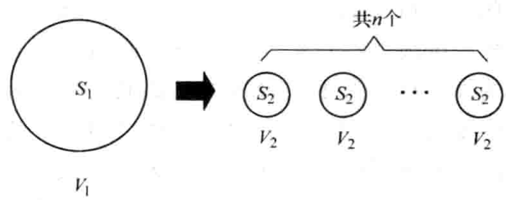


图 1-1　汤圆面皮示意图

5. 模型求解

由

$$S_1 = k_1R^2, \quad V_1 = k_2R^3 \Rightarrow V_1 = kS_1^{3/2}$$
$$S_2 = k_1r^2, \quad V_2 = k_2r^3 \Rightarrow V_2 = kS_2^{3/2}$$
$$S_1 = nS_2$$

解得

$$V_1 = n^{3/2}V_2 = \sqrt{n} \cdot nV_2 \geqslant nV_2$$

6. 模型应用

在面的数量一定的情况下，若 100 个汤圆包 1kg 馅，则 50 个汤圆可以包 1.4kg 馅。

例 1.2　红绿灯模型

在一个由红绿灯管理下的十字路口，如果绿灯亮 15s，问：最多可以有多少辆汽车通过这个交叉路口？

1. 模型分析

这个问题提得笼统含混，因为交通灯对十字路口的控制方式很复杂，特别是车辆左、右转弯的规则，不同的国家都不一样。通过路口车辆的多少还依赖于路面上汽车的数量以及它们行驶的速度和方向。这里我们在一定的假设之下把这个问题简化。

2. 模型假设

1）十字路口的车辆穿行秩序良好，不会发生交通阻塞；

2）所有车辆都是直行穿过路口，并且仅考虑马路一侧或者单行线上的车辆；

3）所有的车辆长度相同，并且都是从静止状态均加速起动；

4）红灯下等待的每相邻两辆车之间的距离相等；

5）前一辆车起动后，下一辆车起动的延迟时间相等；

6）在红灯下等待的车队足够长，以至于排在队尾的驾驶员看见绿灯又转为红灯时仍不能通过路口；

7）用 x 轴表示车辆行驶的道路，原点 o 表示交通灯的位置，x 轴的正向是汽车行驶的方向；

8）以绿灯开始亮为起始时刻，在红灯前等待的第 1 辆汽车刚起动时应该按照匀加速的规律运动；

9）绿灯亮后汽车将起动一直加速到可能的最高速度，并以这个速度向前行驶。

3. 符号与变量说明

L：车辆长度（m）；

D：相邻车辆间距（m）；

T：起动延迟时间（s）；

a：汽车起动时的加速度；

$S_n(t)$：t 时刻第 n 辆车在 x 轴上的位置；

t_n：第 n 辆车的起动时刻；

v_*：最高时速（m/s）；

t_{n*}：汽车加速的时间。

4. 模型建立与求解

由假设3）~5）可知

$$S_n(0) = -(n-1)(L+D), \quad t_n = (n-1)T$$

由加速度公式，得

$$S_1(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_n(t) = S_n(0) + \frac{a(t-t_n)^2}{2}$$

$$t_{n*} = v_*/a + t_n$$

绿灯亮后汽车行驶的规律是

$$S_n(t) = \begin{cases} S_n(0) & 0 < t < t_n \\ S_n(0) + a(t-t_n)^2/2 & t_n < t < t_{n*} \\ S_n(0) + v_*^2/(2a) + v_*(t-t_{n*}) & t_{n*} < t \end{cases} \tag{1.1}$$

对于模型的参数值，取 $L=5\text{m}$，$D=2\text{m}$，$T=1\text{s}$，在城市的十字路口，汽车的最高速度一般是40km/h，折合 $v_*=11.1\text{m/s}$。下一步需要估计加速度，经调查，大部分驾驶员声称：10s 内车子可以由静止加速到大约26m/s 的速度。这时可以算出加速度应为 2.6m/s^2，保守一些，取汽车的加速度为 $a=2\text{m/s}^2$，$v_*/a=5.5\text{s}$。

根据这些参数可以计算出绿灯亮至15s 红灯再次亮时每辆汽车的位置如表1-1所示。

表1-1　绿灯亮至15s 汽车的位置

车　　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
最终位置/m	135.7	117.6	99.5	81.4	63.3	45.2	27.1	9	-9.1

从表1-1 可见，当绿灯亮至15s 时，第8 辆汽车已驶过红绿灯9m，而第9 辆车还距交通灯9.1m，不能通过。

思考

1）在上述模型中，若要第9 辆车通过路口，它的加速度和最终速度将如何考虑?

2）你能继续组建行进当中的汽车遇到红灯时的数学模型吗?假设驾驶员见到红灯后的反应时间是0.35s，制动（非紧急制动）后的加速度平均为 -6.5m/s^2，试给出红灯亮后停车距离的模型，并进一步讨论第9 辆车通过路口的问题。

例1.3　长江未来水质污染预测分析

长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了政府相关部门和专家们的高度重视。2004 年10 月，由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考查团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线21 个重点城市做了实地考查，揭示了一幅长江污染的真实画面，其污染程度让人触目惊心。依照过去10 年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10 年的情况。表1-2 为1995—2004 年长江的排污量，根据表中数据，预测2005—2014 年长江的排污量。

表1-2　1995—2004 年长江排污量

年　　份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
排污量/亿t	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285

1. 模型分析

如果能够找到一个合理的函数形式来表示数据的增长趋势，函数的自变量为年份，因变量为预测量，就可以完成预测工作。一旦找到了这样的函数，只需要将预测的年份代入函数表达式，就可以做预测了。

2. 模型建立

针对 1995—2004 年长江排污量的数据，运用最小二乘法拟合方式，便可以确定函数的系数，预测过程如下：

1）绘制 1995—2004 年长江排污量的散点图（见图 1-2），从图 1-2 可以看出，数据类似以二次函数的形式增长；

2）假定排污量 y 与年份 t 的数据符合二次函数关系，通过最小二乘拟合确定二次函数的系数（可用 MATLAB 实现），得到与实际数据最接近的二次函数表达式为

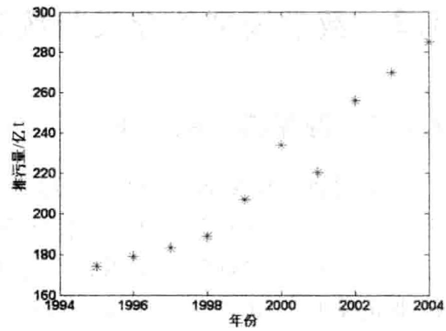


图 1-2　长江排污量散点趋势图

$$y=0.8352(t-1995)^2-5.3466(t-1995)+171.8864 \tag{1.2}$$

实现程序如下：

```
t1 =1995:2004;
y = [174 179 183 189 207 234 220.5  256  270 285]';
t1 =t1 -1995;
t1 =t1';
t = [ones(10,1),t1,t1.^2];
[b,beta,r,rint,stats] =regress(y,t)
```

3. 模型验证

上述模型的相关系数是 0.9660，从而可以确定拟合效果很好。

4. 模型应用

利用函数关系，即式（1.2）对未来 10 年的预测结果如表 1-3 所示。

表 1-3　2005—2014 年排污量预测　　（单位：亿 t）

年　份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
排污量	309	332	356	383	410	440	471	504	539	575

例 1.1 的数学模型是一个数学问题，例 1.2、例 1.3 的数学模型则是表达式。那么什么是**数学模型**？

数学模型就是对实际问题的一种数学表述。具体来说，数学模型是在现实世界中为达到某种目的而建立的一个抽象的简化的数学结构。更确切地说，数学模型就是对于一个特定的对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。数学结构可以是数学公式、算法、表格、图示等。数学建模是一种数学的思考方法，它是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化来建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学手段。

1.2 数学模型的分类与数学建模方法

1.2.1 数学模型的分类

虽然数学模型各种各样，但其中有着内在的相似之处，对数学模型进行分类总结，有助于初学者尽快掌握各种模型。常采用的分类方法如下。

（1）按研究对象的应用领域分类，有：生态模型（人口模型、种群模型）、传染病模型（CUMCM2003A，SAS 传播）、基因模型（CUMCM2000A，DNA 序列分类）、交通模型（CUMCM2001B，公交车调度问题）等。

（2）按是否考虑随机因素分类，有：确定性模型（CUMCM2008A，数码相机定位问题）、随机性模型（CUMCM 2009A，眼科病床的合理安排问题）。

（3）按应用离散方法或连续方法分类，有：离散模型（CUMCM2007A，乘公交看奥运）、连续模型（CUMCM2006B，艾滋病疗法的评价）。

（4）按建立模型的数学方法分类，有：微分方程模型（CUMCM2003A，SAS 传播；污染扩散问题）、图论模型（CUMCM1998B，灾情巡视最佳路线问题）、优化模型（CUMCM2011B，交巡警平台的设置；CUMCM2012B，太阳能小屋的设置）、马氏链模型（遗传问题）。

（5）按人们对事物发展过程的了解程度分类，有：白箱模型（指那些内部规律比较清楚的模型，如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题）、灰箱模型（指那些内部规律尚不十分清楚，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做，如气象学、生态学和经济学等领域的模型）和黑箱模型（指一些其内部规律还很少为人们所知的现象，如生命科学、社会科学等方面的问题。但由于因素众多、关系复杂，也可简化为灰箱模型来研究）。

1.2.2 数学建模的基本方法

数学建模的基本方法有机理分析法、统计分析法和计算机仿真等。

1. 机理分析法

机理分析法是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律。

1）比例分析法——建立变量之间函数关系的最基本最常用的方法。

2）代数方法——求解离散问题（离散的数据、符号、图形）的主要方法。

3）逻辑方法——是数学理论研究的重要方法，对社会学和经济学等领域的实际问题，在决策、对策等学科中得到广泛应用。

4）常微分方程——解决两个变量之间的变化规律，关键是建立“瞬时变化率”的表达式。

5）偏微分方程——解决因变量与两个以上自变量之间的变化规律。

2. 统计分析法

统计分析法是将对象看做“黑箱”，通过对测量数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型。

1）回归分析法——由函数$f(x)$的一组观测值（x_i，f_i）（其中，$i=1, 2, \cdots, n$）确定函数的表达式，由于处理的是静态的独立数据，故也称为数理统计方法；

2）时序分析法——由于处理的是动态的相关数据，因此又称为过程统计方法。

3. 计算机仿真和其他方法

1）计算机仿真（模拟）——实质上是统计估计方法，等效于抽样试验。

① 离散系统仿真——有一组状态变量。

② 连续系统仿真——有解析表达式或系统结构图。

2）因子试验法——在系统上作局部试验，再根据试验结果进行不断的分析与修改，最终求得所需的模型结构。

3）人工实现法——基于对系统过去行为的了解和未来预期所达到的目标，并考虑系统有关因素的可能变化，人为地组成一个系统。

1.3　建立数学模型的步骤

由1.1节中的实例读者可以体会到，实际问题并不等同于数学课本上的应用题，而是要复杂得多。问题假设的不同，答案也就不一样；即使模型假设相同，所用的建模方法不同，答案也不会一样。数学建模没有固定的模式，按照建模过程，一般采用的步骤如图1-3所示。

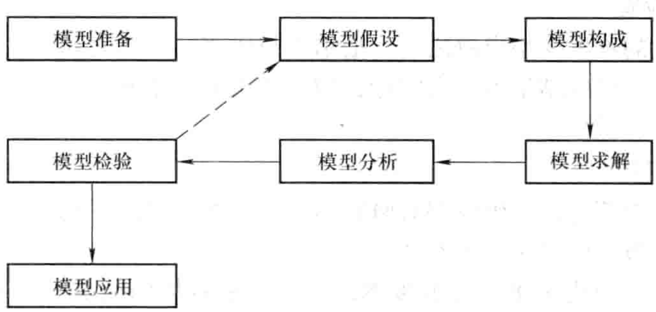


图1-3　数学建模的步骤

1. 模型准备

首先要了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集与问题相关的各种信息，

尽量弄清对象的特征。

2. 模型假设

根据对象的特征和建模目的，对问题进行必要与合理的简化，用精确的语言作出假设，这是建模至关重要的一步。如果对问题的所有因素一概考虑，无疑是一种有勇气但方法欠佳的行为，所以高超的建模者能充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别主次，而且为了使处理方法简单，应尽量使问题线性化、均匀化。

3. 模型构成（建立）

根据所作的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量间的等式关系或其他数学结构。这时，我们便会进入一个广阔的应用数学天地，图论、排队论、线性规划、对策论等都是有用的数学工具。不过我们应当牢记，建立数学模型是为了让更多的人明了并能加以应用，因此，工具越简单越有价值。

4. 模型求解

模型建立后，模型的求解也是一个重要问题。可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值运算等各种传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术。一个实际问题的解决往往需要纷繁的计算，许多时候还得将系统运行情况用计算机模拟出来，因此，编程和熟悉数学软件的能力便举足轻重，常用的求解软件有 MATLAB，MATHEMATIC，LINGO，SPSS 等数学软件，以及 C 或 C + + 等编程语言。

5. 模型分析

对模型解答进行数学上的分析。细致、恰当地对模型结果进行分析，决定了这个模型能否达到更高的层次。还要记住，不论哪种情况，都需要对模型的结果进行定性和定量的误差分析、数据稳定性分析等。

6. 模型检验

对所建立的数学模型求解之后，把结果与研究的实际问题做比较，来检验模型的合理性。若检验结果不符合实际，应该修改补充假设或改换其他数学方法，并重复上面的步骤。

7. 模型应用

利用建模中获得的正确模型对研究的实际问题给出预报或对类似问题进行分析、解释和预报，以供决策者参考。

对上面介绍的数学建模基本步骤，应该根据具体问题灵活掌握，或交叉进行，或平行进行。下面就通过一个稍微复杂一点的例子进一步加深读者对数学建模的理解。

例 1.4　中国人口预测

人口与社会、经济、资源、环境都有着紧密的联系，对人口状况及发展过程

进行系统的分析与评价是进行战略研究和政策评估的重要依据，中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。

认识人口数量的变化规律，建立人口模型，作出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提。长期以来人们在这方面做了不少工作，下面基于中国人口发展情况的统计数据（表1-4），介绍两个基本的人口模型。

表1-4 中国人口发展情况统计表（1971～2011年）（单位：万人）

年份	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
人口	85229	87177	89211	90859	92420	93717	94974	96259
年份	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
人口	97542	98705	100072	101654	103008	104357	105851	107507
年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
人口	109300	111026	112704	114333	115823	117171	118517	119850
年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
人口	121121	122389	123626	124761	125786	126743	127627	128453
年份	2003	2004	2005	2006	2007	2011		
人口	129227	129988	130756	131448	132129	137053		

1. 人口指数增长模型（Malthus模型）

人口指数增长模型是最简单的人口增长模型，几个世纪前英国人口学家马尔萨斯（Malthus，1766—1834）调查了英国一百多年的人口统计资料，得出了人口增长率不变的假设，并据此建立了著名的人口指数增长模型。

1）符号与变量说明

x_0：初始时刻人口数量；

x_k：第 k 年人口数量；

r：人口年相对增长率；

x_m：自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量，也称**人口容量**；

$x(t)$：t 时刻的人口数量。

2）模型假设

① 人口年相对增长率 r 是常数；

② $x(t)$ 视为连续、可微的函数。

3）模型建立与求解

最简单的人口增长模型是人所共知的

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t \tag{1.3}$$

令 $\Delta t \to 0$，得到 $x(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx, x(0) = x_0 \tag{1.4}$$

由方程（1.4）很容易解出

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{1.5}$$

当 $r>0$ 时，式（1.5）表示人口将按指数规律随时间无限增长，所以称为**指数增长模型**。

4）参数估计

式（1.4）的参数 r 和 x_0 可以用表1-4 的数据估计，为了利用简单的线性最小二乘法，将式（1.5）取对数，可得

$$y = rt + a, \quad y = \ln x, \quad a = \ln x_0 \tag{1.6}$$

以1971 年至1990 年的数据拟合式（1.6），Matlab 程序如下：

```
t =1971:1990;                                    % 1971 年到 1990 年每隔一年的时间数据
x =[85299  87177  89211  90859  92420  93717  94974  96259  97542  98705  …
100072  101654  103008  104357  105851  107507  109300  111026  112704  114333];
                                                 % 1971 年到 1990 年的实际人口数据
y =log(x);                                       % 对 x 取对数
p =polyfit(t-1971,y,1)                           % 多项式拟合,求参数
x0 =exp(p(2))                                    %
```

得 $r=0.0147, x_0=85232$。

5）模型分析

将上面的参数 r 和 x_0 代入式（1.5），得

$$x(t) = 85232e^{0.0147(t-1970)} \tag{1.7}$$

将计算结果与实际数据（见表1-5）作比较，如图1-4 所示。

表 1-5　实际人口与 Malthus 模型计算人口比较　　（单位：万）

年　份	实际人口	计算人口	相对误差/%
1971	85229	86490	1.48
1976	93717	93090	-0.67
1981	100072	100190	0.12
1986	107507	107830	0.3
1990	114333	114360	0.03
1991	115823	116060	0.2
1993	118517	119520	0.85
1996	122389	124910	2.06
1997	123626	126760	2.53
1999	125786	130540	3.78