高等代数
考研题解精粹

GAODENG DAISHU KAOYAN TIJIE JINGCUI

王树桂 著

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

高等代数考研题解精粹

王树桂　著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等代数考研题解精粹 / 王树桂著. —成都：西南交通大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5643-2441-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等代数－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 214872 号

高等代数考研题解精粹

王树桂　著

责任编辑	张宝华
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮政编码	610031
网址	http://press.swjtu.edu.cn
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	17
字数	425 千字
版次	2014 年 1 月第 1 版
印次	2014 年 1 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-2441-4
定价	35.00 元

前　言

“高等代数”是大学本科数学专业的三门主干基础课程之一，又是基础数学、应用数学硕士升学必考的两门核心课程之一. 其理论比较抽象，解题方法与技巧灵活多变，初学者和考研学生都会对该门课程的知识内涵和解题方法感到不同程度的困难. 我们编写此书的首要目的在于帮助读者对“高等代数”的要点知识与方法进行一轮有效的复习，使读者对高等代数的基本理论有更深入和更系统的了解，并能综合运用各种解题方法与技巧，强化其分析能力与解题能力. 其次，“高等代数”是中学代数的继续和提高，其理论与方法对指导中学代数的教学也是十分有益的，进一步学习和掌握它的基本理论和方法对将从事中学数学教学的读者也会有较大的帮助. 再次，“高等代数”是现代代数学的基础，读者学完“近世代数”课程后，能在更高的观点之下，重新审视高等代数中一些交代不够清晰的概念的来龙去脉，使读者能融会贯通“高等代数”与“近世代数”的概念和思想方法，帮助读者大致了解代数学研究问题走向，为今后进一步深造打下坚实的基础.

编者长期以来从事“高等代数”的教学，积累了大量的教学体会，近十多年来又一直承担系里为考研学生开设的“高等代数选讲”课程的教学，精心研究与分析了国内高校近二十年来大量的高等代数、线性代数考研试卷的考点、考题. 2004 年出版的“高等代数选讲”在教学中使用多次，使我系考研学生受益匪浅. 本书是编者在第一版基础上第四次整理改编，这次整编所费心力非同以往，对收集在手中的国内近年来数百套高校考研真题进行了细致过滤，去粗取精，去伪存真. 编辑入本书的例题对各高校考研的重要考点考题可以说无不涉列，相信对考研学子会有更大的帮助. 在教材改编与使用过程中，编者得到了我院教务处领导和系里同事及同学们的大力支持与鼓励，在此一并致谢！

这次整编任务重，时间有限，书中难免有疏漏，恳请读者批评指正！

编　者

2013 年 3 月

目　录

第 1 章　多项式理论

多项式是代数学讨论的基本对象之一，它与高次方程的理论密切相关，而且是线性代数中不可缺少的工具，其理论与方法是初等代数有关内容的加深和系统化.

§1.1　内容概述

1.1.1　一元多项式环

1. 关键词[1]：一元多项式的形式定义，系数，次数，最高次项系数（首项系数），多项式的相等，加法，乘法，数乘法及算律.

2. 基本性质：

(1) $F[x]$ 对多项式的加法与乘法作成一个有单位元、可交换、无零因子的交换环（即整环），对加法与数乘法作成 F 上的无限维向量空间. 对以上三种运算作成 F 上无限维代数.

(2) 次数公式：设 $f(x), g(x)$ 是 F 上的两个非零多项式，那么

① $f(x)+g(x)\neq 0$ 时，$\partial(f(x)+g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$；

② $f(x)g(x)\neq 0$，且 $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

1.1.2　整除性理论

1. 关键词： 整除，因式，倍式，带余除法，辗转相除法.

2. 基本性质：

(1) 整除具有反身性和传递性.

反身性：$\forall f(x)\in F[x],\ f(x)\mid f(x)$;

传递性：若 $f(x)\mid g(x), g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

(2) 零次多项式整除任意多项式；任意多项式整除零多项式；零多项式能且只能整除零多项式.

(3) 若 $c\neq 0$，则 $f(x)$ 与 $cf(x)$ 有完全相同的因式.

(4) 若 $g(x)\mid f(x),\ f(x)\mid g(x)$，则 $f(x)=cg(x),\ c\neq 0$.

(5) ① 若 $g(x)\mid f(x)$，则 $\forall u(x)$，有 $g(x)\mid f(x)u(x)$.

② 若 $h(x)\mid f(x),\ h(x)\mid g(x)$，那么 $h(x)\mid f(x)\pm g(x)$.

③ 若 $f(x)\mid g_i(x), i=1,\cdots,r$，则 $\forall u_i(x), i=1,\cdots,r$，有 $f(x)\mid (u_1(x)g_1(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))$.

(6) 带余除法定理：$\forall f(x), g(x)\in F[x],\ g(x)\neq 0$，必 $\exists q(x), r(x)\in F[x]$，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立，其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或 $r(x)=0$，且这样的 $q(x), r(x)$ 是唯一确定的.

(7) 整除的判定：$\forall f(x), g(x)\in F[x],\ g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$.

(8) 两多项式的整除关系不因系数域的扩大而改变.

附 文中提到的 F 为数域, **Q**, **R**, **C** 分别为有理数域、实数域、复数域, Z 为整数环.

[1] 关键词涉及的概念, 文中符号及性质参见北师大、北大《高等代数》教材.

1.1.3 最大公因式与互素

1. 关键词： 最大公因式, 最小公倍式, 互素.

2. 基本性质：

(1) 最大公因式存在且唯一, 最小公倍式存在且唯一.

(2) 若 $(f(x), g(x)) = d(x)$, 则 $\exists u(x), v(x)$, 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$；反之, 若 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 且 $\exists u(x), v(x)$, 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$, 则 $(f(x), g(x))=d(x)$.

(3) 若 $f(x), g(x)\neq 0$ 且均为首 1 多项式, 则 $[f(x), g(x)] = \dfrac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}$.

(4) $f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists u(x), v(x)$, 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

(5) ① 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

② 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $f(x)|g(x)h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$.

③ $f_1(x)|g(x)$, $f_2(x)|g(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 则 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

1.1.4 因式分解的理论

1. 关键词： 可约多项式, 不可约多项式, 单因式, 重因式, 本原多项式.

2. 基本性质：

(1) ① c 为非零常数时, 多项式 $p(x)$ 与 $cp(x)$ 同时可约或不可约.

② 设 $p(x)$ 不可约, 则 $\forall f(x)$, $(f(x), p(x)) = 1$ 或 $p(x) | f(x)$.

③ 设 $p(x)$ 不可约, 若 $p(x) | f(x)g(x)$, 则 $p(x) | f(x)$ 或 $p(x) | g(x)$.

(2) 因式分解的存在唯一定理：$F[x]$ 中的每一个次数大于零的 $f(x)$ 可分解为 F 上的不可约多项式的乘积, 如果 $f(x) = p_1(x)\cdots p_r(x) = q_1(x)\cdots q_s(x)$, 此处 $p_i(x), q_j(x)$ $(i=1,2,\cdots,r；j=1,2,\cdots,s)$ 在 F 上不可约, 那么 $r=s$, 并且适当调整 $q_i(x)$ 的次序后, 可使 $q_i(x)=c_ip_i(x), i=1,2,\cdots,r$, 其中 $0\neq c_i\in F$.

(3) 典型分解式 $f(x)=ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$ 存在且唯一, 其中 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 是 F 上互不相同的不可约多项式, a 是 $f(x)$ 的首项系数.

(4) $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式；反之, 若 $p(x)|f(x)$ 且 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

(5) $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)\cdots p_r(x)$. $f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$.

(6) 一次多项式在任意数域上不可约. 复数域上仅有一次多项式不可约；实数域上除一次多项式外还有含一对非实共轭复根的二次多项式不可约, 且二次以上的多项式均可约. 有理数域上不可约多项式可以为任意次.

(7) 艾森斯坦因判别法：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in Z[x]$, 若① $p\nmid a_0$；② $p\mid a_1$, $\cdots$, $p\mid a_{n-1}$, $p\mid a_n$；③ $p^2\nmid a_n$, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

1.1.5　根的理论

1. 关键词： 多项式函数，多项式的恒等，多项式的根，单根，重根，综合除法.

2. 基本性质：

(1) 余式定理：$x-\alpha$ 除 $f(x)$ 的余式为 $f(\alpha)$；

(2) 因式定理：$(x-\alpha)\mid f(x)\Leftrightarrow f(\alpha)=0$；

(3) 代数基本定理：设 $\partial(f(x))>0$，则 $f(x)$ 在复数域中至少有一根.

(4) n 次多项式 $f(x)$ 在 F 内至多有 n 个根，在复数域内恰有 n 个根. 奇次实系数多项式至少有一个实根. 实系数多项式的虚根成对出现. 实系数多项式实根的个数与其次数有相同的奇偶性.

(5) 若 $f(x)$ 的系数同号，则 $f(x)$ 无正根. 若 $f(x)$ 的非零奇次项和偶次项的系数相反，则 $f(x)$ 无负根. 若 $f(x)$ 只有同号的非零奇次项，则 $f(x)$ 无非零实根. $f(x)$ 只有同号的非零偶次项，则 $f(x)$ 无非零实根.

(6) 整系数或有理系数多项式有理根的求法.（略）

(7) 设 $\partial(f(x)),\partial(g(x))\leqslant n$，若 $\exists a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 互不相同使 $f(a_i)=g(a_i),i=1,2,\cdots,n+1$，那么 $f(x)=g(x)$，进而恒等；反之是显然的.

(8) 韦达定理：给 n 次多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n\ (n>0)$，且设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个复根，那么

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\\ \dfrac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\end{cases}$$

(9) 拉格朗日插值公式：设 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 是 F 中任意 $n+1$ 个互不相同的数，而 $b_1,\cdots,b_{n+1}\in F$，则总可以找到次数不超过 n 的多项式：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}$$

使 $f(a_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n+1$.

1.1.6　多元多项式

1. 关键词： n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，次数，字典排幂法，首项系数，多元多项式的相等，运算，齐次多项式，初等对称多项式，对称多项式.

2. 性质：

(1) 乘积的首项等于因子的首项的乘积.

(2) 乘积的次数等于因子的次数之和.

(3) 对称多项式的和差积仍是对称多项式，从而对称多项式的多项式仍是对称多项式.

(4) 对称多项式基本定理：任一 n 元多项式可唯一地表成 n 元初等对称多项式的多项式.

§ 1.2 一元多项式重点题型及解题方法

本章的重点题型：有关整除、最大公因式的求法与证明；互素、重因式的判别法与证明；消去重因式及因式分解的方法与证明；有理系数多项式的不可约性与判别法；有理根的求法；对称多项式的初等化. 这些问题若对次数较低的具体多项式而言，常可用带余除法（长除法），综合除法，辗转相除法，待定系数法，艾森斯坦因判别法等方法即可解决. 在高等代数中我们已较为熟悉了，此处不赘述，但不少问题所讨论的多项式常常不是次数较低的具体的多项式，要解答这类问题，必须熟悉基本概念和基本性质，并且能综合运用各种有效方法进行理论的推理论证，这类题目的解题方法也是灵活多变的，以下通过一些典型题型来说明这些方法.

1.2.1 由条件从定义出发的解题方法 (关键是概念清楚，条件目的明确，常用一些熟知的结论)

例 1 设 $f(x)\in F[x]$，令 $x=ay+b$，$a,b\in F,a\neq 0$，$g(y)=f(ay+b)$，证明 $g(y)$ 与 $f(x)$ 在 F 上有相同的可约性. (湘大 2010)

证明 设 $f(x)$ 在 F 上可约，即 $f(x)=f_1(x)f_2(x), f_i(x)\in F[x], \partial(f_i(x))<\partial(f(x)), i=1,2$，则

$$g(y)=f(ay+b)=f_1(ay+b)f_2(ay+b)=g_1(y)g_2(y),$$

且 $\partial(g(y))=\partial(f(x)),\ \partial(g_i(y))=\partial(f_i(x)), i=1,2$，故 $g(y)$ 在 F 上也可约.

反之，设 $g(y)$ 在 F 上可约，由于 $y=a^{-1}x-a^{-1}b$，知 $f(x)=g(a^{-1}x-a^{-1}b)$. 因此，由以上证明的结论 $f(x)$ 在 F 上可约.

例 2 设 c 是一个复数，并且是一个非零的有理系数多项式的根，令 $J=\{f(x)\in\mathbf{Q}[x]\mid f(c)=0\}$. 证明：

(1) 在 J 中存在唯一首项系数是 1 的多项式 $p(x)$，使 J 中每一 $f(x)$ 都可以写成 $p(x)q(x)$ 的形式，这里 $q(x)\in\mathbf{Q}[x]$；

(2) $p(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约，如果 $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，求上述 $p(x)$.

(首师大 2001，华南师大 2002，天津工大 2004，湖南师大 2010，西南大学 2012)

证明 (1) 取 $p(x)$ 是 J 中次数最低的首 1 多项式($p(x)$ 即 $\mathbf{Q}[x]$ 中以 c 为根的最小多项式)，由题设知 J 非空. 由最小数原理，这样的 $p(x)$ 存在. 对 $\forall f(x)\in J$，由带余除法有：

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x),$$

其中 $q(x),r(x)\in\mathbf{Q}[x]$，且 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$.

若 $r(x)\neq 0$，则 $r(c)=f(c)-p(c)q(c)=0$ 且 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$，与 $p(x)$ 的次数的最小性矛盾，所以 $r(x)=0$，从而 $f(x)=p(x)q(x)$.

设 $p_1(x)$ 也有上述性质，则 $p_1(x)\mid p(x),\ p(x)\mid p_1(x)$，又 $p_1(x),p(x)$ 首 1，则 $p_1(x)=p(x)$.

(2) 反证法. 设 $p(x)$ 可约，令 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$，且 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 的次数均小于 $\partial(p(x))$. 而

$$p(c)=p_1(c)p_2(c)=0\Rightarrow p_1(c)=0 \text{ 或 } p_2(c)=0,$$

从而 $p_1(x)\in J$ 或 $p_2(x)\in J$，与 $p(x)$ 的最小性矛盾.

若 $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则 c 及共轭数 $c_2=\sqrt{2}-\sqrt{3},\ c_3=-\sqrt{2}+\sqrt{3},\ c_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 均是 $p(x)$ 的根，从而

$$p(x)=(x-c)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)=(x^2-2\sqrt{2}x-1)(x^2+2\sqrt{2}x-1)=x^4-10x^2+1.$$

或令 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，得

$$x^2=5+2\sqrt{6}\Rightarrow(x^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2\Rightarrow p(x)=x^4-10x^2+1.$$

推广 若将题中的有理数域 $\mathbf{Q}$ 换成数域 F，取 $p(x)$ 为 $F[x]$ 中以 c 为根的次数最低的首 1 多项式，称 $p(x)$ 为 c 在 $F[x]$ 中的最小多项式. 因此有以下平行的命题：(1) c 的最小多项式 $p(x)$ 整除 $F[x]$ 中任意以 c 为根的多项式；(2)最小多项式是不可约多项式.

例 3 设 $f(x)=x^3+3x^2+3\in\mathbf{Q}[x]$，$\alpha$ 是 $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 内的一个根，记

$$\mathbf{Q}[\alpha]=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2\,|\,a_0,a_1,a_2\in\mathbf{Q}\}$$

证明：(1) $\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，有 $g(\alpha)\in\mathbf{Q}[\alpha]$；(2) $\forall 0\neq\beta\in\mathbf{Q}[\alpha]$，则 $\exists\gamma\in\mathbf{Q}[\alpha]$，使 $\beta\gamma=1$.

(首师大 2004)

证明 (1) $\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，由带余除法得 $g(x)=f(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，

$$q(x)\in\mathbf{Q}[x]\Rightarrow g(\alpha)=f(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2\in\mathbf{Q}[\alpha].$$

(2) 取 $p=3$，由艾森施坦因判别法可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 则 $\forall g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，$f(x)|g(x)$，或 $(f(x),g(x))=1$.

$\forall 0\neq\beta\in\mathbf{Q}[\alpha],\exists g(x)\in\mathbf{Q}[x]$，使得 $\forall 0\neq\beta=g(\alpha)$. 又 $f(\alpha)=0$，所以 $f(x)\nmid g(x)$，因此 $(f(x),g(x))=1$. 故 $\exists u(x),h(x)\in\mathbf{Q}[x]$，使

$$f(x)u(x)+g(x)h(x)=1\Rightarrow g(\alpha)h(\alpha)=1,$$

即 $\exists\gamma=h(\alpha)\in\mathbf{Q}[\alpha]$，使 $\beta\gamma=1$.

例 4 设 n 为正整数，a,b,c 均为正有理数，$\sqrt[n]{c}$ 为无理数，且 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$，证明:

(1) $\sqrt[n]{c}$ 的共轭根为 $\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon^2$, $\cdots$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon^{n-1}$.

(2) $a^n-b^n=(a-b)(a-b\varepsilon)(a-b\varepsilon^2)\cdots(a-b\varepsilon^{n-1})$.

(3) $a^n+b^n=(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)\cdots(a+b\varepsilon^{n-1})$.

证明 (1) 易见，$\sqrt[n]{c}$ 是 $\mathbf{Q}$ 上多项式 x^n-c 的根，且 ε, $\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$ 为 n 次单位根，$(\varepsilon^k)^n=1$，则 $(\sqrt[n]{c}\varepsilon^k)^n=c$，$k=1,\cdots,n-1$，则互异的数 $\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon$, $\cdots$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon^{n-1}$ 均为 x^n-c 的根. 即

$$x^n-c=(x-\sqrt[n]{c})(x-\sqrt[n]{c}\varepsilon)\cdots(x-\sqrt[n]{c}\varepsilon^{n-1})$$

是 $\mathbf{Q}$ 上以 $\sqrt[n]{c}$ 为根的最小多项式，即 $\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon^2$, $\cdots$, $\sqrt[n]{c}\varepsilon^{n-1}$ 为 $\sqrt[n]{c}$ 的全部共轭根.

(2) 将 a 看成文字，则互异的 b, $b\varepsilon$, $\cdots$, $b\varepsilon^{n-1}$ 为 a^n-b^n 的全部根，则

$$a^n-b^n=(a-b)(a-b\varepsilon)(a-b\varepsilon^2)\cdots(a-b\varepsilon^{n-1}).$$

(3) 将 a 看成文字，则互异的 $-b$, $-b\varepsilon$, $\cdots$, $-b\varepsilon^{n-1}$ 为 a^n+b^n 的全部根，则

$$a^n+b^n=(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)\cdots(a+b\varepsilon^{n-1}).$$

例 5 设 a 是正有理数，$\sqrt[3]{a}$ 为无理数，证明若 $\sqrt[3]{a}$ 是某个有理系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\sqrt[3]{a}\omega$, $\sqrt[3]{a}\omega^2$ 也是 $f(x)$ 的根. 其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(湖北大学 2005)

证明 直接计算可得，$(x-\sqrt[3]{a})(x-\sqrt[3]{a}\omega)(x-\sqrt[3]{a}\omega^2)=(x-\sqrt[3]{a})(x^2+\sqrt[3]{a}x+\sqrt[3]{a^2})=x^3-a=p(x)$

是以 $\sqrt[3]{a}$ 为根的最小多项式，由例 2 可知，$p(x)$ 整除 $f(x)$，则 $\sqrt[3]{a}\omega$, $\sqrt[3]{a}\omega^2$ 也是 $f(x)$ 的根.

例 6 设 α 是复数，证明 $M=\{f(\alpha)|f(x)\in F[x]\}$ 是数域 $\Leftrightarrow \exists p(x)\in F[x]$，使 $\partial(p(x))>0$，且 $p(\alpha)=0$. (汕头大学 2005)

证明 “$\Rightarrow$”：在 M 中，取 $p(x)$ 是 α 在 F 上的最小多项式，因 α 是复数，则 $\partial(p(x))>0$，且 $p(\alpha)=0$.

“$\Leftarrow$”：设 $p(x)\in F[x]$，满足 $\partial(p(x))>0$，且 $p(\alpha)=0$. 取 $p(x)$ 是 α 在 F 上的最小多项式，即 $p(x)$ 是 F 上以 α 为根的次数最低的首 1 多项式，由例 2 的推广可知，$p(x)$ 在 F 上不可约.

易见，$0=p(\alpha), 1=1\cdot\alpha^0\in M$. $\forall 0\neq f(\alpha)\in M, f(x)\in F[x]$，有 $p(x)\nmid f(x)$. 因 $p(x)$ 在 F 上不可约，则 $(f(x), p(x))=1$，则 $\exists u(x), v(x)\in F[x]$，使 $f(x)u(x)+p(x)v(x)=1\Rightarrow f(\alpha)u(\alpha)=1$. 故 M 的每一非零元可逆，则 M 是数域.

特例 $\sqrt[3]{2}$ 是 x^3-2 的根，则 $F=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}|a,b,c\in\mathbf{Q}\}$ 是数域. (南京大学 2000)

1.2.2 比较系数法

比较系数法是将所讨论的问题归纳为多项式相等的关系，然后通过多项式相等则同次项系数必相等，将问题转化为线性方程组的问题来解决.

例 7 求所有适合条件 $f(x^2)=(f(x))^2$ 的多项式 $f(x)$.

解 (1) 如果 $f(x)=c$，则 $c=f(x^2)=(f(x))^2=c^2\Rightarrow c^2-c=0$, 则 $c=0$ 或 $c=1$，即 $f(x)=0$ 或 1.

(2) 如果 $\partial(f(x))=n\geqslant 1, f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq 0$，比较

$$f(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1x^2+a_0 \text{ 与 } (f(x))^2=a_n^2x^{2n}+\cdots$$

的首项系数得 $a_n=a_n^2$. 又因 $a_n\neq 0$，故 $a_n=1$. 令 $f_0(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

若 $f_0(x)\neq 0$，不妨设 $\partial(f_0(x))=k,\ k<n$，于是 $f_0(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_k\neq 0$，则

$$f(x)=x^n+f_0(x)=x^n+(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0).$$

比较 $f(x^2)=x^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots$ 与 $(f(x))^2=x^{2n}+2x^n(a_kx^k+\cdots)+(a_kx^k+\cdots)^2=x^{2n}+2a_kx^{n+k}+\cdots$ 的 x^{n+k} 的系数得 $2a_k=0$, 则 $a_k=0$，矛盾. 故 $f_0(x)=0$，此时 $f(x)=x^n$.

综上所述，$f(x)=0$ 或 $f(x)=1$ 或 $f(x)=x^n$.

例 8 证明：$f(x)=x^4+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约，则 $f(x)$ 必可写成下列形式之一：(1) $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$；(2) $f(x)=(x+e)(x^3+fx^2+gx+h)$. 其中 $a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbf{Q}$.

若 (1) 成立，比较同次项系数，得 $a+c=0, b+ac+d=0, ad+bc=0, bd=1$. 则 $a=-c$, $c^2=b+d, bc=cd, bd=1$. 于是，当 $c=0$ 时，有 $b=-d$，从而 $d^2=-1$ 矛盾；当 $c\neq 0$ 时，有 $b=d$，从而 $d^2=1, d=\pm 1$，故 $c^2=2d=\pm 2$，与 c 是有理数矛盾.

若(2)成立，则 $f(-e)=e^4+1=0$，此不可能.

综上所述，$f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

说明 证明一个具体的整系数多项式在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，若不能直接采用艾森斯坦因判别法，则常可采用比较系数法来证明. 反设可约，再运用比较系数法导出矛盾.

1.2.3 代值法

代值法是把所讨论的问题转化成多项式的相等关系，然后通过选取适当的特殊值代入等式的两边，以求得问题的答案，其理论是依据多项式相等与多项式恒等的一致性.

例 9 多项式 $f(x)$ 分别除以 $(x-a)(x-b)$, $(x-b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 的余式是 $px+l$, $qx+m$, $rx+n$，其中 $abc\neq 0$，证明：$l\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+n\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0$.

分析 本题是要证明余式中的常数 l,m,n 与包含在除式中的常数 a,b,c 之间的一个关系式,故我们基于带余除法用代值法加以解决.

证明 由条件，有下列带余除法算式

$$f(x)=(x-a)(x-b)q_1(x)+px+l, f(x)=(x-b)(x-c)q_2(x)+qx+m, f(x)=(x-c)(x-a)q_3(x)+rx+n.$$

以 $x=a,b,c$ 分别代入上面三式, 得

$$f(a)=pa+l=ra+n, f(b)=pb+l=qb+m,\ f(c)=qc+m=rc+n.$$

$$\Rightarrow \frac{l}{a}-\frac{n}{a}=r-p,\ -\frac{l}{b}+\frac{m}{b}=p-q,\ \frac{n}{c}-\frac{m}{c}=q-r\Rightarrow l\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+n\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0.$$

例 10 求以 $(x-a)(x-b), a\neq b$，除多项式 $f(x)$ 的余式. (南航 2005)

解 由带余除法: $f(x)=(x-a)(x-b)g(x)+cx+d$，则 $f(a)=ca+d, f(b)=cb+d$. 由 $a\neq b$，则

$$c=\frac{f(a)-f(b)}{a-b},\quad d=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

故余式为

$$cx+d=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

例 11 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为 n 个互异的实数, $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 为 n 个次数不大于 $n-2$ 的实系数多项式，证明：$D=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_i) & \cdots & f_1(a_n)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_j(a_1) & \cdots & f_j(a_i) & \cdots & f_j(a_n)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_i) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0$. (广西大学 2001, 浙江大学 2004, 青岛大学 2005)

证明 设

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_1(a_i) & \cdots & f_1(a_n)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_j(x) & \cdots & f_j(a_i) & \cdots & f_j(a_n)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ f_n(x) & \cdots & f_n(a_i) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix},$$

则 $g(x)=0$ 或 $\partial(g(x))\leqslant n-2$. 设 $g(x)\neq 0$，而 $g(a_2)=\cdots=g(a_n)=0$，这样 $g(x)$ 有 $n-1$ 个不同的根，矛盾. 于是 $g(x)=0$，从而 $g(a_1)=D=0$.

例 12 设 $f(x)=(5x-4)^{1993}(4x^2-2x-1)^{1994}(8x^3-11x+2)^{1995}$，求 $f(x)$ 的展开式的各项系数的和.

解 我们知道 $f(x)$ 的各项系数之和为 $f(1)$，即

$$f(1)=(5-4)^{1993}(4-2-1)^{1994}(8-11+2)^{1995}=(-1)^{1995}=-1.$$

例 13 设多项式 $g_1(x)=1$, $g_{i+1}(x)=1-xg_i(x), i=1,2,\cdots$，求 $F(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{1989}(x)$ 的系数和.

解 令 $x=1$，则

$F(1)=1+g_1(1)+g_2(1)+\cdots+g_{1988}(1)+g_{1989}(1)=1+g_1(1)+(1-g_1(1))+(1-g_2(1))+\cdots+(1-g_{1988}(1))$，

而 $g_1(1)=1,\ g_2(1)=0,\ \cdots,\ g_{2k}(1)=0,\ g_{2k+1}(1)=1,\ \cdots,\ g_{1988}(1)=0,\ g_{1989}(1)=1$. 故

$$F(1)=1+[g_1(1)+g_2(1)+\cdots+g_{1988}(1)]+g_{1989}(1)=2+\frac{1988}{2}=996.$$

说明 比较系数法和代值法都属于“待定系数法”的范畴，二者本质上是一致的，但在具体运用时，后者比前者显得灵活些. 使用代值法的关键在于代入值必须选择得当，没有比较系数法那么直截了当.

1.2.4 利用定理证明

1 带余除法定理.

这一定理对于证明某些多项式存在性问题十分有效，而在这类存在性问题中，常常要求所找的多项式的次数小于某些给定多项式的次数.

例 14 设 $f(x),g(x)$ 为两互素且次数均大于零的多项式，证明：存在多项式 $u(x),v(x)$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,\ \partial(u(x))<\partial(g(x)),\ \partial(v(x))<\partial(f(x))$，并且这样的 $u(x),v(x)$ 是唯一性的.

(东南大学 2002，哈工大 2006，湖大 2007)

证明 存在性：因为 $f(x),g(x)$ 互素，则 $\exists k(x),h(x)$，使 $f(x)k(x)+g(x)h(x)=1$，由带余除法：

$\exists\phi(x),u(x)$，使 $k(x)=g(x)\phi(x)+u(x)$，$u(x)=0$ 或 $\partial(u(x))<\partial(g(x))$；

$\exists\ \varphi(x),v(x)$，使 $h(x)=f(x)\varphi(x)+v(x)$，$v(x)=0$ 或 $\partial(v(x))<\partial(f(x))$.

故
$$f(x)u(x)+g(x)v(x)+f(x)g(x)(\varphi(x)+\phi(x))=1. \quad ①$$

若 $u(x)=0$，则 $g(x)\mid k(x)$. 又由 $f(x)k(x)+g(x)h(x)=1\Rightarrow g(x)\mid 1$，与 $\partial(g(x))>0$ 矛盾. 所以 $u(x)\neq 0$，所以 $\partial(u(x))<\partial(g(x))$. 同理 $\partial(v(x))<\partial(f(x))$. 比较①式两边的次数必有 $\varphi(x)+\phi(x)=0$，故 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

唯一性：证明思想是同一律，假设有两对满足条件，再证它们是彼此相同的.

若存在 u_1,u_2,v_1,v_2，使 $fu_1+gv_1=1,fu_2+gv_2=1$，且 $\partial(u_i)<\partial(g)$，$\partial(v_i)<\partial(f),i=1,2,$ 则
$$f(u_1-u_2)=g(v_2-v_1), \quad ②$$
则 $f\mid g(v_2-v_1)$. 又 $(f,g)=1$，则
$$f\mid v_2-v_1. \quad ③$$
若 $v_1-v_2\neq 0$，由 $\partial(v_i)<\partial(f),\ i=1,2$，知 $\partial(v_2-v_1)<\partial(f)$，与③矛盾. 所以 $v_1-v_2=0$，即 $v_1=v_2$，进而由②有 $u_1=u_2$.

例 15 $\forall f(x),g(x)\in F[x]$，其中 $g(x)=p^n(x)g_1(x)$，$(p(x),\ g_1(x))=1,\ n\geqslant 1$，$f(x)$ 任意. 证明：

(1) $\exists r(x),f_1(x)\in F[x]$，使 $f(x)=g_1(x)r(x)+p(x)f_1(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$；

(2) 若 $g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{p^n(x)}+\dfrac{f_1(x)}{p^{n-1}(x)g_1(x)}$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$. (中科院 2012)

证明 (1) 因 $(p(x),\ g_1(x))=1$，$\exists u(x),v(x)\in F[x]$，使 $p(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$，则
$$f(x)=p(x)u(x)f(x)+g_1(x)v(x)f(x).$$
又 $v(x)f(x)=p(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$，故

$$f(x)=p(x)u(x)f(x)+g_1(x)[p(x)q(x)+r(x)]=g_1(x)r(x)+p(x)[q(x)g_1(x)+u(x)f(x)].$$

令 $f_1(x)=q(x)g_1(x)+u(x)f(x)$，得 $f(x)=g_1(x)r(x)+p(x)f_1(x)$，且 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(p(x))$.

(2) 因为 $g(x)\neq 0$，由(1) $f(x)=g_1(x)r(x)+p(x)f_1(x)$，用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 立得结论(2)成立.

2 因式分解的存在唯一性定理.

例 16 证明:在 $F[x]$ 中，若 $f(x)=ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$ 为 $f(x)$ 的典型分解式，那么多项式 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式当且仅当 $g(x)=bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$，其中 b 为 $g(x)$ 的首项系数，$0\leqslant l_i\leqslant k_i,i=1,\cdots,r$.

证明 充分性：显然.

必要性：设 $f(x)=g(x)h(x)$，由典型分解式的唯一性可知 $g(x)$ 的首 1 的不可约因式 $p(x)$（如果有）必定是 $p_i(x)$ 中的某一个，而且它在 $g(x)$ 中的重数不超过它在 $f(x)$ 中的重数，则因式 $g(x)$ 可以写成 $bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$ 的形式，其中 $0\leqslant l_i\leqslant k_i,i=1,\cdots,r$.

例 17 $f(x),g(x)$ 均为多项式，证明：对任意自然数 m，$f^m(x)\mid g^m(x)\Leftrightarrow f(x)\mid g(x)$.

(南京大学2000, 华南师大2003, 中南大学2005, 首师大2009, 华南理工2006、2012, 聊城大学2008, 2012)

证明 充分性：显然成立.

必要性：可对 $f(x),g(x)$ 的次数均大于零的情形来证，因为若 $f(x),g(x)$ 有一个是零多项式或零次多项式，则结论显然成立.

一般说来，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式中含有的不可约因式不一定相同，但借助零指数幂，可使它们写成如下的形式：$f(x)=ap_1^{k_1}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$，$g(x)=bp_1^{l_1}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$，其中 $k_i,l_i\geqslant 0$，$i=1,2\cdots,s$，于是

$$f^m(x)=a^m p_1^{k_1m}(x)\cdots p_s^{k_sm}(x),\quad g^m(x)=b^m p_1^{l_1m}(x)\cdots p_s^{l_sm}(x).$$

因为 $f^m(x)\mid g^m(x)$，故必有 $0\leqslant mk_i\leqslant ml_i$，从而 $0\leqslant k_i\leqslant l_i$. 故有 $f(x)\mid g(x)$.

例 18 $f(x),g(x)$ 均为多项式，证明：$f^2(x)\mid g^2(x)\Leftrightarrow f(x)\mid g(x)$. (上海师大 2002, 南航 2009)

3 根的个数定理.

例 19 证明：$\sin x$ 不可能是 x 的多项式.

证明 反设 $\sin x=f(x)$ 是 x 的多项式，则由 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ 可知 $f(x)\neq 0$，即 $\sin x$ 是非零多项式，从而 $\sin x$ 至多只能有 $\partial(\sin x)$ 个根，但 $f(2k\pi)=\sin 2k\pi=0,\ k=\pm1,\pm2,\cdots$，所以 $\sin x=f(x)$ 有无穷多个根，矛盾.

例 20 设 $f(x)\in F[x]$，若 $\forall a,b\in F$，有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，证明：$f(x)=kx,k\in F$.

(西师 2004, 重大 2008)

分析 从要证的结论 $f(x)=kx$ 可见，$k=f(1)$，因而要证 $f(x)=kx$，只要证明：$f(x)-f(1)x=0$，亦即只要证 $f(x)-f(1)x$ 有无穷多个根.

证明 由题意 $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$，$f(3)=f(2)+f(1)=3f(1)$，如此类推下去.

一般地，对任意自然数 n，有 $f(n)=nf(1)$，即 $f(n)-nf(1)=0$，即 $f(x)-f(1)x$ 有无穷多个根. 故 $f(x)-f(1)x=0$，即 $f(x)=kx$，其中 $k=f(1)\in F$.

4 韦达定理（根与系数的关系）.

例 21 试作二次方程，使其根为方程 $x^2+bx+c=0$ 的根的平方.

解 设方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1,x_2，且以 x_1^2,x_2^2 为根的待定方程是 $x^2+px+q=0$，由韦达定理有 $-p=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c$，$q=x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=c^2$，故所求方程为