河南省“十二五”普通高等教育规划教材

大学文科数学

祁传达 王娟 何俊杰 陈越奋 编

科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材

大学文科数学

祁传达　王　娟　何俊杰　陈越奋　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书贯彻导引的思想，结合文科生对高等数学的可接受性，力求让广大文科大学生接触到更为广泛、更具有实用价值的数学知识. 全书分三部分，包括微积分、线性代数、概率论与数理统计，共含 13 章. 内容丰富，条理清楚，重点突出，难点分散，注重数学思想的介绍，力求做到深入浅出.

本书可作为哲学、法学、教育学、文学、历史、艺术等各专业普通高等教育本科生的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/祁传达等编. —北京：科学出版社，2014.7
河南省"十二五"普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-03-041317-8

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①祁… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 143807 号

责任编辑：张中兴 胡海霞 / 责任校对：李 影
责任印制：闫 磊 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2014 年 7 月第一次印刷 印张：17 1/2
字数：352 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学．现代科学技术的发展又赋予了数学更丰富的内涵和更广泛的外延．数学既是工具又是思维模式;既是知识又是素养;既是科学又是文化．数学素养、数学文化以及逻辑思维能力是现代大学生应具备的基本素质．因此,不仅把数学作为大学理工科生的必修课程,而且为文科生开设数学课程的必要性也已在高等院校形成了共识．

在大学文科专业中,大多数学生不喜欢数学．这或许是由于数学教学总是循着定义、定理、证明或计算这样一种教学套路,使数学教学变成了解题教学,甚至成为解难题的教学．文科生从中学开始就对这样一种死板的教学失去了兴趣,从而对数学产生了畏难、甚至厌恶的情绪.

目前,大学文科数学教材版本不少,但大多是由部分"985""211"高校的教师根据本校课程定位和学生数学基础编写的.对于大多数普通高等院校文科生,迫切需要一本难易适度、能够重新激发他们对数学学习兴趣的教材,使他们能在快乐的学习中提高数学文化素养、提升理性思维能力.为此,我们在编写此书时遵循了以下编写思路.

(1)精心挑选教材内容.体现现代数学连续性、离散性、随机性的微积分、线性代数和概率统计是大学文科数学的核心知识.本书在兼顾知识的逻辑完整性和学生的可接受性的基础上,从微积分、线性代数和概率统计中选择了基本的、有用的、有趣的知识作为主要教学内容.

(2)重新激发学习兴趣.在中学阶段,数学的"枯燥""难"给文科生留下的深刻印象,也是他们一般不喜欢数学的主要原因.要激发学生对数学的学习兴趣和求知欲望,必须让数学变得"好看""好吃""好消化".本书通过展示灿烂的数学文化吸引学生的注意力,呈现优美的数学韵律以及灵活而广泛的实际应用来增添学习的趣味性,选取难易适中、数量适度的课后习题帮助学生及时消化所学的内容.

(3)提高数学文化素养和能力.对文科生来说,在以后的实际工作中真正需要的有时往往不是数学知识,而是在学习数学知识的过程中形成的数学素养和思维能力.本书在深入浅出地介绍数学知识的同时,重视展现博大精深的数学文化,展示高度抽象的数学符号所蕴含的丰富哲理,从而提高学生的直觉感知能力、观察分

析能力、归纳推理能力、抽象概括能力等数学思维能力.

本书由祁传达担任主编,并负责制定编写提纲和最后统稿.微积分部分由王娟编写,线性代数部分由何俊杰编写,概率论与数理统计部分由陈越奋编写.

本书的编写得到了科学出版社和河南省普通高等教育教材建设指导委员会的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中疏漏和不足之处在所难免,恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2014 年 3 月

目　　录

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分 微 积 分

微积分学(calculus)在自然科学、经济学和工程技术领域有广泛的应用,是现代大学教育的重要组成部分. 微积分是在代数学、三角学和解析几何学的基础上建立起来的,包括微分学、积分学两大分支. 微分学包括求导数的运算,是一套关于变化率的理论,它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行演绎. 积分学包括求积分的运算,为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法. 微积分基本定理指出,微分和积分互为逆运算,这也是两种理论被统一成微积分的原因. 我们可以以两者中任意一者为起点来讨论微积分,但是在教学中一般会先引入微分学. 在更深的数学领域中,微积分学通常被称为分析学,并被定义为研究函数的科学.

本部分包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用以及微分方程简介 6 章内容.

第 1 章　函数与极限

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学研究的主要是变量及变量之间的依赖关系，函数正是这种依赖关系的体现，极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法. 本章将在复习高中所学的函数与极限概念的基础上，进一步介绍两个重要极限、无穷小与无穷大的概念以及函数连续性.

1.1　函数及其性质

1.1.1　函数的概念

在自然界中，某一现象中的各种变量之间，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，我们观察下面几个例子.

例如，某种商品的销售单价为 p 元，则其销售额 L 与销售量 x 之间存在这样的依赖关系：$L = px$.

又如，圆的面积 S 和半径 r 之间存在这样的依赖关系：$S = \pi r^2$.

不考虑上面两个例子中量的实际意义，它们都给出了两个变量之间的相互依赖关系，这种关系是一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1　设有两个变量 x, y, D 是一个数集. 对任意的 $x \in D$，存在一定规律 f，使得 y 有唯一确定的值与之对应，则 y 称为 x 的**函数**. 记作 $y=f(x), x\in D$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 数集 D 称为函数的**定义域**，函数 y 的取值范围 $V = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

在函数 $y = f(x)$ 中，当 x 取定 x_0 ($x_0 \in D$) 时，则称 $f(x_0)$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，即

$$f(x_0) = f(x) \mid_{x=x_0} .$$

有时，函数的值域也记作 $f(D)$ ，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} .$$

函数的定义域通常按以下两种情形来确定.

一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在

自由落体运动中,设物体下落的时间为 t ,下落的距离为 s ,开始下落的时刻 $t=0$,落地的时刻 $t=T$,则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$.

另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用“ $y=f(x)$ ”表达,而不必再显式地表示出“$x\in D$”. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

例 1.1　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域,并求 $f(3)$ 和 $f(t^2)$.

解　该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体. 解此不等式组,得 $2<x\leqslant 3$. 故该函数的定义域为

$$D=\{x\in\mathbf{R}\mid 2<x\leqslant 3\}=(2,3],$$

且

$$f(3)=\sqrt{3+2\times 3-3^2}+\ln(3-2)=\ln 1=0,$$

$$f(t^2)=\sqrt{3+2t^2-t^4}+\ln(t^2-2).$$

函数的定义域 D 和对应法则 f 称为函数的两个要素,而函数的值域一般称为派生要素,由定义域和对应法则确定. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

例 1.2　判断以下函数是否是同一函数,为什么?

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$,　　(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解　(1)两函数的定义域不同:

$$y=\ln x^2,x\in\{x\mid x\neq 0\};\quad y=2\ln x,x\in\{x\mid x>0\},$$

因此,它们不是相同的函数.

(2)虽然两函数的自变量和因变量的符号不相同,但两函数的对应法则和定义域均相同,因此是同一函数.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉. 其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\},$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形.

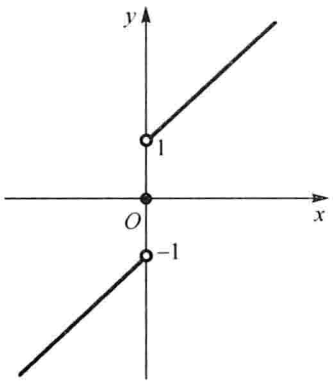


图 1-1 例 1.3 的函数图像

例 1.3 若函数 $f(x)$ 在定义域不同的区间上用不同解析式来表示,则称函数 $f(x)$ 为**分段函数**. 如

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$

其图像如图 1-1 所示.

1.1.2 函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x \in D$ 恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界的**. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的. 这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1 \in I$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**.

例如,函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为无论 x 取任何实数, $|\sin x| \leqslant 1$ 都能成立. 这里 $M = 1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M,而 $|\sin x| \leqslant M$ 成立). 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 事实上,对于任意取定的正数 M(不妨设 $M > 1$),则 $\dfrac{1}{2M} \in (0,1)$,当 $x_1 = \dfrac{1}{2M}$ 时, $\left|\dfrac{1}{x_1}\right| = 2M > M$. 但是 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,如可取 $M = 1$,而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 值都成立.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义,如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加的**,区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间;如果对于 I 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有

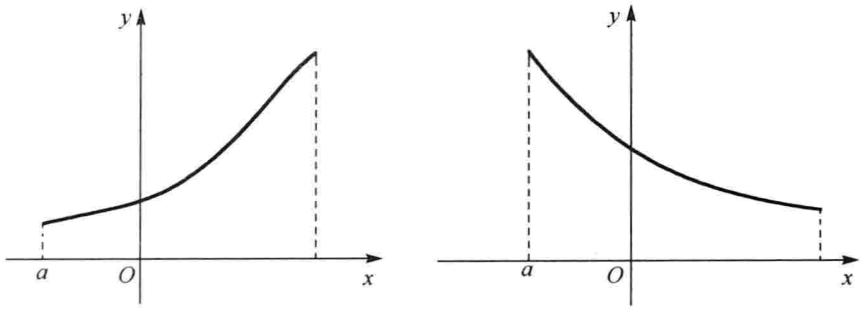
$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少的**,区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的;在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的.

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内是增函数(或是减函数),则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调函数**,区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 函数在区间 I 内的单调增加或单调减少的性质,称为**函数的单调性**.

显然单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图 1-2(a)所示;单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1-2(b)所示.



(a) 单调增函数的图像　(b) 单调减函数的图像

图 1-2　单调函数的图像

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果对于任意的 $x \in D$,恒有
$$f(-x) = f(x),$$
则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任意的 $x \in D$,恒有
$$f(-x) = -f(x),$$
则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如,$f(x) = x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. 而 $f(x) = x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

奇函数图像关于原点对称,偶函数图像关于 y 轴对称. 如图 1-3(a),(b)所示.

4. 周期性

对于函数 $y = f(x)$,如果存在正数 T,使得
$$f(x) = f(x + T)$$
恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为**函数周期**. 显然 nT (n 是整数)也为函数

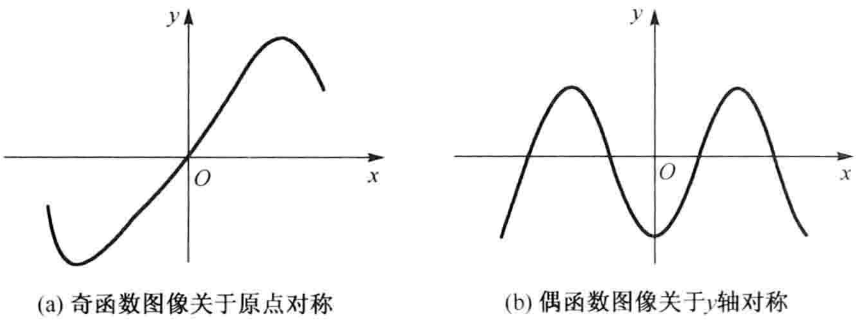


图 1-3　奇偶函数的图像

$f(x)$ 的周期,一般提到的周期均指最小正周期 T.

例如,三角函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期都为 2π; $y=\tan x$, $y=\cot x$ 的周期都是 π.

周期函数的图形特点:在函数的定义域内,每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状.

1.1.3　函数的运算

1. 函数的四则运算

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域依次为 D_1,D_2 , $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可以定义这两个函数的下列运算:

和(差)$f\pm g$: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$,$x\in D$;

积　$f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$,$x\in D$;

商　$\dfrac{f}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,　$x\in D\backslash\{x\mid g(x)=0\}$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 ,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)),\quad x\in D,$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**,它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

例如, $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$, $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义,且 $g(D)\subset[-1,1]$,则 g 与 f 可构成复合函数