

科學圖書大庫

# 計畫向量代數

譯者 吳英格

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

# 計畫向量代數

譯者 吳英格

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月二十二日再版

## 計 畫 向 量 代 數

基本定價 1.80

譯者 吳英格 國立台灣大學數學碩士  
私立東海大學數學系講師

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號  
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號  
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

# 讀法指導

## 1. 最起碼之數學基礎

若欲完全瞭解本書，則讀者需具備之數學基礎如下：

(a) 兩度空間之坐標幾何學：直線與圓即可。

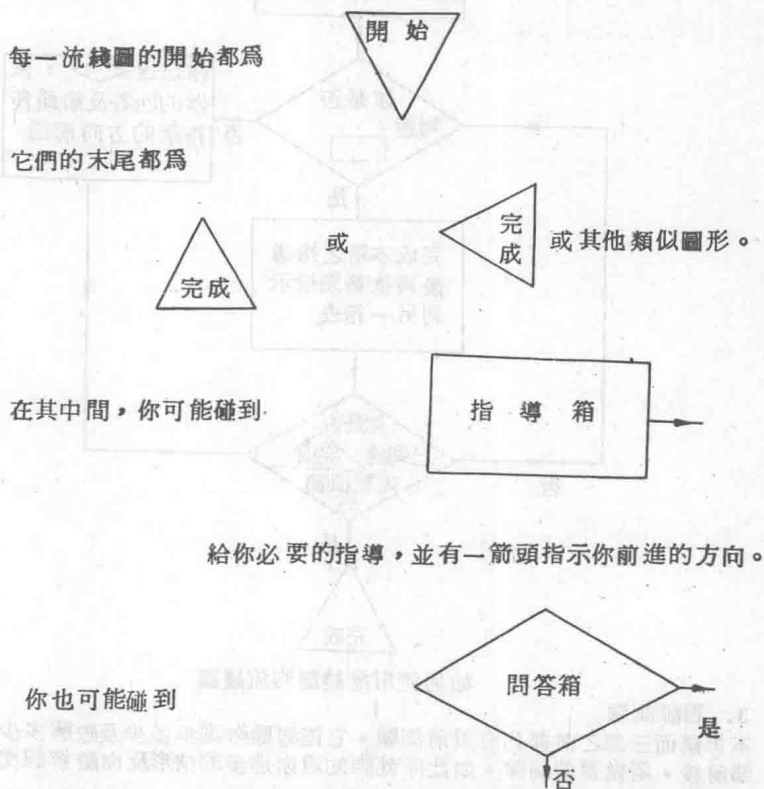
(b) 三角學： $30^\circ$  及  $45^\circ$  之正弦與餘弦值， $\sin(A+B)$  及  $\cos(A+B)$  之展開式。

(c)  $3 \times 3$  行列式之展開（見附錄 A）

(d) 結合、交換及分配律（見附錄 B）。

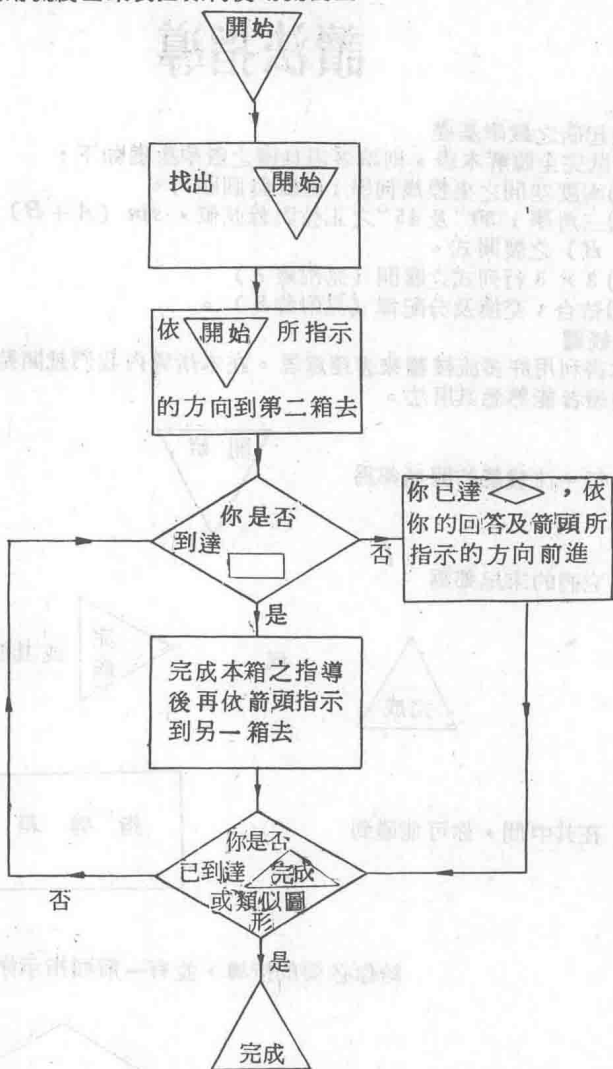
## 2. 流綫圖

本書利用許多流綫圖來表達意思。在本指導內我們就開始使用流綫圖，使讀者能熟悉其用法。



這種問答箱都有一問題需要你回答，然後你再依你的回答及箭頭所指示的方向前進。

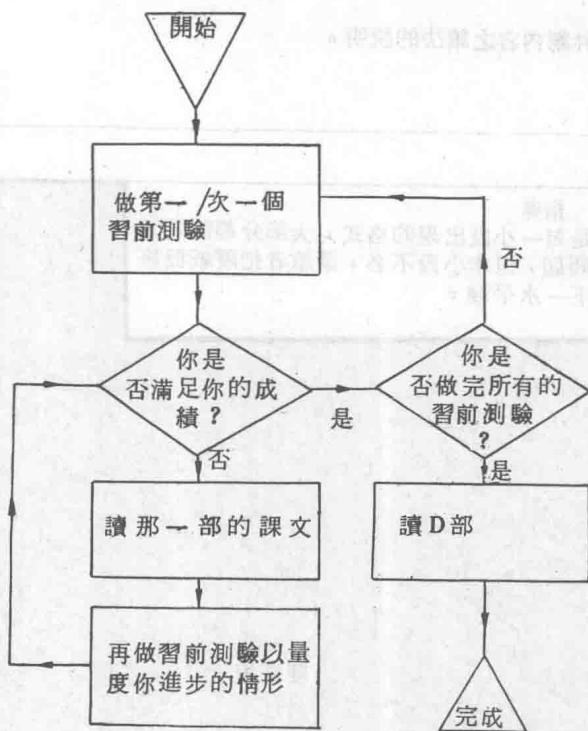
現在我們用流綫圖來表出如何使用流綫圖



如何使用流綫圖的流綫圖

### 3. 習前測驗

本書前面三部之前都列有習前測驗。它能測驗你進步多少及瞭解多少。讀每部前後，請做習前測驗。如此你就能知道你進步的情形及你瞭解課文的程度。



說明習前測驗用法之流綫圖

#### 4. 計劃摘要及習題

每一部分分成幾個計劃（D部除外）。大部分的計劃都包括計劃內容、摘要及問題。如有其他內容加入，當會另加說明。

計劃內容是一小段一小段分開，這使讀者容易完全吸收。讀者時常需要回答問題，這也對讀者的吸收大有幫助。但這種寫法也有其缺點。因它太鬆散，故易使讀者“只見樹木不見林”。為了補救此缺點，我們才用摘要及流綫圖，希望讀者好好利用。

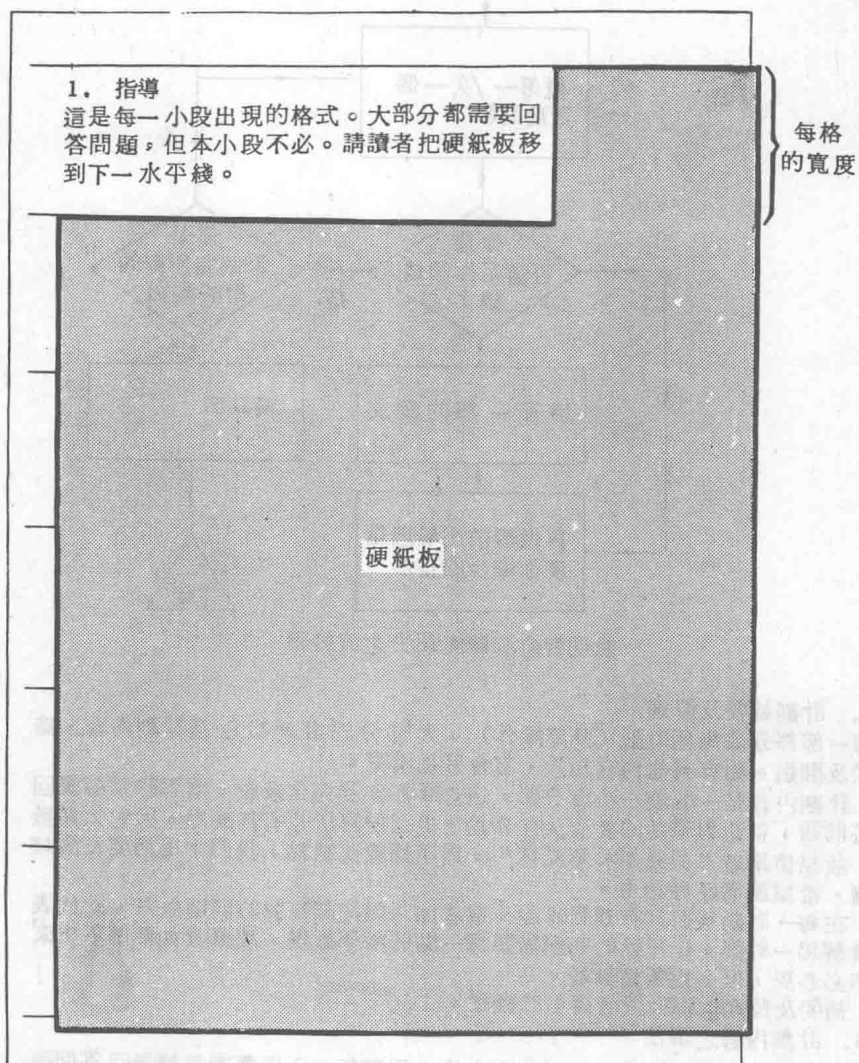
在每一計劃後面都有幾個問題，讀者如果能把無星號的問題做完，就代表瞭解那一計劃。有星號的問題需要深一點的數學基礎，故讀者如果做不出來不必心灰，但一定要做做看。

摘要及習題也提供讀者複習的機會。

#### 5. 計劃內容之讀法

每一計劃內容通常分為三十或四十小段。通常每一小段都需要讀者回答問題，而其答案就在右邊一欄內。讀者需要筆及紙寫答案及另外一張如下圖所示的硬紙板遮蓋其他問題及答案。請讀者務必使用硬紙板，否則瞭解程度會降低。

下面是計劃內容之讀法的說明。



造一硬紙板，把它放置在下頁，如上圖所示，並按指示進行。

<p>1. 指導 這是每一小段出現的格式。大部分都需要回答問題，但本小段不必。請讀者把硬紙板移到下一水平線。</p>	
<p>2. 有些小段要你從兩個答案中選一個答案。那兩個答案都用一斜線分開。回答下面問題後再把硬紙板移到下一水平線。 本小段是 /否需要你回答問題。</p>	是
<p>3. 當你移動硬紙板後，你已看到上一格右邊的答案了。檢驗你的答案後回答下之問題。 你是 /否讀了本句。 再把硬紙板移到下一水平線。</p>	是
<p>4. 檢驗你的答案。 有些問題是需要你 填充。 故 <math>2 \times 2 =</math> _____。 在下面你要自動將硬紙板移到次一 _____，我們將不再說明。</p>	4 水平綫
<p>5. 檢驗你的 _____。 有時要你填的字如果太多的話，我們就用三個星號表示。 在每一小段的末尾，你要自動將硬紙板移到 * * *。</p>	答案 下一水平綫
<p>6. 上面兩小段的開始都要你去檢驗你的 _____。 我們也可寫：上面兩小段時開始都要你去 * * *。</p>	答案 檢驗你的答案



# X

## 6. 錯誤

如果你有前面所寫的數學基礎，你將能正確地回答大部分的問題。但是錯誤總是難免的，如果你知道錯誤的原因，那最好不過。如果不知道其原因，則最好重讀一遍。如果再不知其中原因（實際上應該很少人會如此），那就唯有向別人請教了。但是總得把錯誤的原因找出來，這樣你才能進步。

## 7. 摘要

現在你已知道如何使用流綫圖及計劃內容了。請你就從A部開始讀。當然你最先碰到的就是A部的習前測驗。

祝你好運！

# 目 錄

## 讀法指導

### A 部：基本運算

#### 習前測驗

#### 計劃一：基本觀念

平移

位移向量

$\overline{AB}$  記法

相等向量

$a$  記法

複習

摘要

習題

#### 計劃二：向量加法

複習

平移,  $[x, y]$  記法

向量之相加

向量相加之擴展

摘要

習題

#### 計劃三：向量相減

負向量

向量相減

摘要

習題

#### 計劃四：亞倍爾 (Abel) 群公設

封閉性與唯一性

結合性

零向量

負向量

交換性

亞倍爾群

摘要

習題

#### 計劃五：向量空間公設

純量

有理數純量

1
1
2
2
3
3
4
5
6
7
9
10
10
10
11
14
17
18
19
19
20
24
25
26
27
28
28
29
29
29
30
30
31
31
32

無理數純量	32
負純量	33
第一 部分之摘要	33
混合結合律	34
第一分配律	35
第二分配律	35
中性純量	35
摘要	36
習題	37
<b>B 部：點、線和面</b>	38
習前測驗	38
計劃六：點和線	39
位置向量	39
$OR = r$ 習慣用法	39
$XY = y - x$	40
經原點之直線方程式	40
不通過原點之直線方程式	42
通過兩點之直線方程式	44
摘要	46
習題	48
計劃七：以所給的比例分一線段	49
複習	49
以所給的比例分一線段	50
摘要	52
習題	56
計劃八：兩純量變數	61
經過原點的平面	61
基底向量	61
綫性相依與綫性獨立	63
方程式之解	64
摘要	68
習題	71
計劃九：向量與笛卡爾坐標	75
單位向量 ( $\hat{a}$ 記法)	75
互相垂直的單位向量 ( $i, j$ 記法)	76
笛卡爾坐標	77
向量與笛卡爾方程式	77
摘要	80
習題	84
計劃十：三純量變數	85
綫性相依與綫性獨立	85
三維空間	85

不經原點的平面	87
經三點的平面	88
平面上之直線	89
兩固定純量	90
摘要	92
習題	95
計劃十一：三維空間之笛卡爾坐標	96
$i, j$ 及 $k$	96
右手系	97
三維空間之坐標	98
兩點間之向量	100
向量終點之坐標	100
摘要	101
習題	103
計劃一至十一之習題解答	104
計劃十二：笛卡爾方程式之形式	106
由向量方程式求直線及平面之笛卡爾方程式	106
檢驗一已知點是否在一已知平面或直線上	106
求一已知平面上之一點	106
求一已知直線上之一點	107
檢驗一已知向量是否在一已知平面或直線上	108
求一已知平面或直線上之一向量	109
摘要	114
習題	114
<b>C部：純量與向量積</b>	115
習前測驗	115
計劃十三：純量積	116
兩向量之夾角	116
純量積	118
以 $i, j$ 及 $k$ 表示之向量的純量積	121
摘要	123
習題	126
計劃十四：長度，角度及方向	129
長度	129
模之符號	129
兩向量之夾角	131
方向餘弦	133
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$	136
摘要	137
習題	139
計劃十五：垂直性	141
垂直性	141

	平面之法向	142
	平面之方向	143
	平面之方程式	143
	以笛卡爾方程式表示之平面的方向	148
	摘要 151 習題 153	
計劃十六：	向量積	155
	旋轉	155
	向量積	156
	群與向量積	160
	封閉性與唯一性	160
	結合性	160
	單位元素及反元素	160
	交換律	161
	摘要 161 習題 162	
計劃十七：	向量積之計算	163
	分配律	167
	以 $i, j$ 及 $k$ 表示之向量的向量積	167
	行列式	169
	複習	170
	摘要 172 習題 173	
計劃十八：	向量積之應用	174
	平行四邊形的面積	175
	三角形的面積	176
	平行六面體的體積	177
	純量三重積	179
	摘要 181 習題 184	
計劃十九：	球	185
	球之向量方程式	186
	笛卡爾式	187
	切面	188
	摘要 190 習題 192	
D部：	複習及更進一步的應用	193
計劃二十：	複習及更進一步的應用	193
	兩直綫之夾角	194
	兩平面之夾角	196
	定點到一平面的垂直距離	198
	檢驗一平面是否為球之切面	200
	一點 $P$ 到一直綫的垂直距離	202
	歪斜綫之最短距離	204
計劃十二至二十之	習題解答	206
附錄 A	附錄 B	

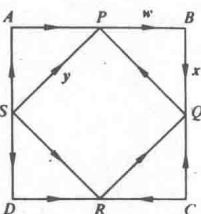
## A部：基本運算

### 習前測驗

1. 平移是什麼？

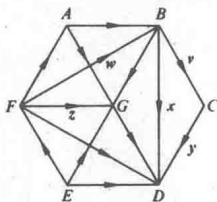
一火車頭沿着一直的軌道平穩地前進，試決定下列各點的移動是否為平移並說明其理由：

- 在輪周上的一點；
- 輪心；
- 在前面緩衝器上的一點。

2.  (a) 利用如符號  $\overrightarrow{AB}$  的記法，寫出圍成小正方形之各邊的位移向量。  
 (b) 圖中那些位移向量與  $\overrightarrow{AP}$  相等？  
 (c) 那些位移向量可記為  $w$ ？  
 (d) 那些位移向量與  $x$  相等？  
 (e) 那些位移向量的長度是  $|y|$ ？  
 (f) 那些位移向量與  $\overrightarrow{RQ}$  相等？

3. 利用像  $[a, b]$  這種記法，如何描述平移？當幾個用這種符號表示的連接向量加起來時，如何找出其和向量？

4. 利用  $\overrightarrow{AB}$  和  $a$  兩種向量表示法，表出下面諸和向量：




- $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{ED}$ ;
- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}$ ;
- $w + y$ ;
- $z + y$ .

5. 劃出 (a)  $a - b$ ,

(b)  $b - a$ ,

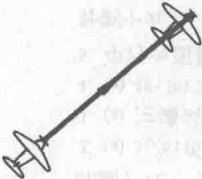


並證明你所用的方法為正確。


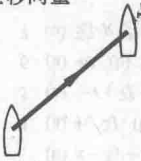

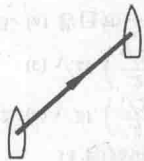

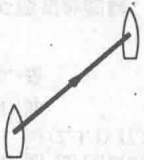
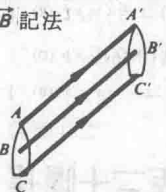


6.  劃出下列諸向量： $3x$ ,  $\frac{1}{2}x$ ,  $-2x$ 。如用  $[a, b]$  這種記法，那些向量如何表示？

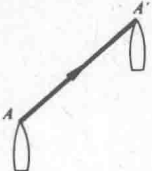
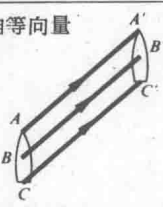
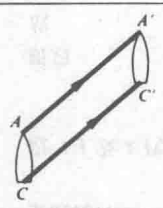
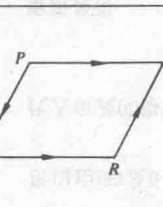
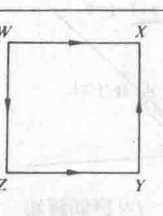
$[-1, 2]$

## 計劃一 基本觀念

1 平移	假如一物體在一直線上移動且無轉動現象發生，我們就稱此種移動為平移 (translation)。		
2.		這飛機在一直線上移動。 有 / 沒有轉動現象發生。 這種移動是 / 不是平移	沒有 是
3.		圖中所表示的路線是 / 不是直線。 所以此種移動是 / 不是平移。	不是 不是
4.	若一物體在一直線上移動且無轉動，則此種移動稱為 _____。	平移	
5.		牛頓頭上的蘋果所經過的路線是 / 不是平移。	是

<p>6. </p> <p>此車在一直線上移動但有_____現象發生。 這種移動是 / 不是平移。</p>	<p>轉動 不是</p>
<p>7. 平移是 * * *</p>	<p>在一直線上無轉動地移動</p>
<p>8. 位移向量</p> <p>此船的平移可以以  表示之。</p> <p> 稱為位移向量。</p>	
<p>9. </p> <p>位移向量  需表出一平</p> <p>移的長度或距離。更正確地說它也需要表出它的方向。</p>	
<p>10. </p> <p>不適宜表示船的平移，因為它沒有表出船運動的_____。</p> <p>所以它不是 _____ 向量。</p>	<p>方向 位移</p>
<p>11. <math>\overrightarrow{AB}</math> 記法</p> <p></p> <p>船首的位移向量乃從 A 到 A' 故可記為 <math>\overrightarrow{AA'}</math>。</p> <p>同理，圖中的另外兩個位移向量可分別記為 _____ 和 _____。</p>	<p><math>\overrightarrow{BB'}</math> , <math>\overrightarrow{CC'}</math></p>



<p>12.</p> 	<p><math>AA'</math> 表示從 <math>A</math> 到 <math>A'</math> 的 _____。</p> <p>對從 <math>A</math> 到 <math>A'</math> 的位移向量而言 <math>AA'</math> 是 / 不是 適宜的記法。</p> <p>為了得到正確的記法我們需要畫一 _____ 在 <math>AA'</math> 上。</p>	<p>距離 不是  矢</p>
<p>13.</p>	<p><math>\overrightarrow{AA'}</math> 表出從 <math>A</math> 到 <math>A'</math> 的位移向量之 _____ 和 _____。</p>	<p>長度、方向</p>
<p>14. 相等向量</p> 	<p>既然船的每一部都作同樣的移動，所以 <math>\overrightarrow{AA'}</math>、<math>\overrightarrow{BB'}</math>、<math>\overrightarrow{CC'}</math> 三個位移向量必 _____。</p>	<p>相等</p>
<p>15.</p> 	<p><math>\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}</math>.</p> <p>這表示兩個位移向量有相同的 _____ 和相同的 _____</p>	<p>長度，方向</p>
<p>16.</p> 	<p>在此平行四邊形上，位移向量 <math>\overrightarrow{PQ}</math> 和 <math>\overrightarrow{SR}</math> 有 / 沒有相同的長度。</p> <p>它們有 / 沒有相同的方向。</p> <p>它們是 / 不是相等。</p> <p><math>\overrightarrow{PS}</math> 和 <math>\overrightarrow{RQ}</math> 是 / 不是相等。</p>	<p>有 有 是 不是</p>
<p>17.</p> 	<p>在此正方形上，<math>\overrightarrow{WX}</math> 和 <math>\overrightarrow{WZ}</math> 有相同的 _____，但沒有相同的 _____。</p> <p>它們是 / 不是相等</p> <p><math>\overrightarrow{WX}</math> 和 <math>\overrightarrow{ZY}</math> 是 / 不是相等。</p> <p><math>\overrightarrow{WZ}</math> 和 <math>\overrightarrow{YX}</math> 是 / 不是相等。</p>	<p>長度 方向 不是  是 不是</p>