

新课标**高考数学**
第二轮复习用书

2014



洞穿高考

数学辅导丛书

30分钟拿下高考数学 选择题、填空题

文科版



本书系统总结选择题和填空题的6种解题方法与技巧，精编30套限时训练题，帮助考生30分钟拿下高考数学选择题和填空题。

方法篇与实战篇配有视频讲解，
在线观看：www.zhongguoshuxue.com

主编 ● 张永辉

清华大学出版社

014045847

G634.6
05



洞穿高考

数学辅导丛书

30分钟拿下高考数学 选择题、填空题

文科版



主 编 ● 张永辉

G634.6
05



北航

C1733912

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

《30 分钟拿下高考数学选择题、填空题》是为快速提高考生的高考数学解题水平和技巧而编写的高考第二轮复习用书。本书根据高考数学复习大纲(或考试说明)以及历年高考数学真题和模拟题,归纳、总结出高考数学选择题、填空题的考点,遴选出最能代表该考点的试题,并高度概括该考点的通解通法与特殊技巧。本书不仅可以提高考生们分析和解决问题的能力,同时还可以提高考生们洞察试题变异的能力。本书通过方法篇、题组篇与实战篇的训练,能让考生在考场高效地解答选择题、填空题。

本书适合高中师生参考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

30 分钟拿下高考数学选择题、填空题:文科版/张永辉主编. —北京:清华大学出版社,2013 (2014.3 重印)
(洞穿高考数学辅导丛书)

ISBN 978-7-302-34261-8

I. ①3… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 249560 号

责任编辑:陈仕云

封面设计:刘 超

版式设计:文森时代

责任校对:赵丽杰

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市漂源装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:203mm×280mm

印 张:11.5

字 数:363 千字

版 次:2014 年 1 月第 1 版

印 次:2014 年 3 月第 2 次印刷

印 数:4501~7500

定 价:28.00 元

产品编号:053486-01

做最好的高考数学书

本书编委会

——“洞穿高考数学解题丛书”总序

主 编 张永辉

副主编 余 臣 王小明 张喜金 张宏卫 董安林

张作卿 李拴柱 王国庆 颜亚冰 安 英

白立星

编 委 张俊宇 董家兴 王亦豪 徐贵冬 徐宣庆

廖家斌 孙大勇 李 鹏

做最好的高考数学书

——“洞穿高考数学辅导丛书”总序

我一直认为,数学是最难的一科.高考成功一定要经过努力,但努力不一定能成功,选择永远比努力更重要.从最新数学高考的命题特点来看,试题明显从过去单纯地强调简单的观察能力和特殊技巧,转变为现在深刻地强调要把握数学问题的原理及解题的通法通性.于是,打造最好的高考数学书成为时代赋予我们的使命.

笔者出版了多本高考数学专著,历经八载,与国内权威出版社合作,联合打造了中国数学教辅研发品牌——“洞穿高考数学辅导丛书”.本丛书摒弃了目前教辅图书的编写模式,每一个例题、变式题、巩固训练题都经过编者的精心研究,从备战高考的三个复习阶段入手,从不同角度给所有学生全程、全方位的辅导.笔者多年致力于高考数学教学与研究,通过对优秀考生的调查统计,发现大多数考生在复习中经历了一个“发现自我,改造自我,突破自我”的过程,即不知道自己做什么(全面复习)——知道自己做什么(重点突破)——知道自己不知道什么(冲刺高考)——全知道(决胜高考),而我们寻求的正是这种应对考试的复习之道.

第一轮复习的重点是“三基”训练,目标是全面、扎实、系统、灵活,即夯实基础,全面复习.学生应该重点建构自己的知识体系,弄清高考考什么,怎么考?与第一轮复习配套的用书为《新课标高考数学题型全归纳》,采用“题型+模型”的编写模式.全书以200个题型为主线,总结了高考所有重要考点和题型的解题思路及科学有效的套路方法.对于重要的题型,我们给出“分析”,引导学生自己找到解题的突破口,还给出“评注”来升华解题方法,从而达到归纳解题方法的目的.有些评注写得入木三分,直接揭示了高考题母题的来源.书中的“模型”部分,更是将许多相关问题一网打尽,使考生能以不变应万变,达到“无招胜有招”的境界.

第二轮复习的重点是专题强化训练,目标在于提高学生解决高考解答题的能力,重点突破.考生要集中练习高考的核心考点,不求面面俱到,但是一定要把重要考点各个击破,真正做到触类旁通、闻一知十.与第二轮复习配套的用书为《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》、《洞穿高考数学解答题核心考点》.这两本辅导书从高考数学选择题、填空题与解答题的实战角度进行编写,对于选择题、填空题,我们的目标是30分钟轻取70分.《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》一书通过方法篇、题组篇与实战篇的训练,能让考生在考场上高效地解答选择题、填空题;《洞穿高考数学解答题核心考点》一书能帮助考生快速掌握“秒杀”高考解答题的方法与技巧.为了提高考生解决解答题的能力,我们从历年高考真题和众多模拟题中筛选核心考点,归纳总结出各种解题方法和技巧,以求达到口述解答题的从容境界.

经过两轮复习后,很多考生仍然感觉做题时心中没谱,那么,这就需要第三轮复习:模拟、强化.这是第一、二轮复习的提升,不仅要检验对各考点的掌握情况,更重要的是对知识的融会贯通、查漏补缺、答题技巧的训练乃至对学生智能、情感和意志等进行调节.因此,我们悉心研发了第三轮复习用书——《高考数学临门一脚》.本书整合了全国各地权威数学名家的研究成果,研发出最后30题,将最前沿的考试方向与命题趋势以密押题的形式呈现给大家,密押

试题的考点相互补充,形成整体,是一份临考前不可或缺的重要材料,希望同学们在使用时一定要做到“卷做三遍,题后三思”。

总之,这三轮复习用书功能各异,但合起来又构成一个有机整体.这就是我们倾心为考生打造的成功计划的三部曲,按我们的计划,一步一个脚印,结果定在掌控中!希望中国千万名高考考生通过使用这四本书,考进自己理想的大学,这是我們最开心、最幸福的事情.希望大家能从中得到启发,并肯定我们的成果.当然,我们也会继续努力前进,“做最好的高考数学书”是我们不变的信念,永恒的追求。

为了满足理科和文科考生的学习需要,上述每一个阶段的复习用书均分为理科版和文科版两个分册,欢迎广大考生订购.同时,第一阶段复习用书《新课标高考数学题型全归纳》还有配套电子课件免费赠送,为教学提供了便利,让老师备课变得轻松而高效!

高考长路,拼搏依旧,温柔依旧——因为有我们相伴!

温家宝同志曾以诗明志,今天,我们把这句诗转赠给紧张备考的高三学子,也送给辛勤教学、默默无闻、无私奉献的高中毕业班的园丁们。

“华山再高,顶有过路。”

张永辉

2013年9月

前言

高考数学选择题、填空题在全国卷和各省市自主命题的试卷中所占分数的比重是比较大的(46.7%),在短时间(30~45分钟)内准确无误地解答这两类题是数学考高分的关键.

为了帮助同学们赢得时间,取得考试成功,我们编写了至今市面上还没有的这样一本辅导书,相信本书对开拓思路、启迪思维、提高应试技巧等诸方面将起到良师益友的作用.

本书特点:

(1)介绍了我们在长期教学、高考辅导中归纳、总结出来的解答选择题、填空题的六种方法和技巧.

(2)根据高考数学复习大纲(和考试说明)以及历年高考数学真题和模拟题,归纳总结出高考数学选择题、填空题的常考题型,并高度概括每种题型的通解通法与特殊技巧.在例题的选取上我们反复琢磨,从题库中遴选出最能代表该题型的试题.例题的解答有四部分:分析,解析,评注,变式.其目的在于:不仅提高考生们分析和解决问题的能力,同时还使他们初步学会洞察题型变异的能力.变式试题,不是简单地修改题目的已知条件,而是从本质上探究试题内在的联系,达到举一反三、触类旁通的效果.

(3)我们精心研发了30套选择、填空题的限时训练,能够让考生最大限度地训练并提高做选择题、填空题的能力.

书中的不足之处在所难免,敬请数学同仁及广大考生指正.

张永辉

2013年9月

目 录

总述	1	限时训练(六)	68
第一部分 方法篇	3	限时训练(七)	69
方法一 推演法	3	限时训练(八)	70
方法二 图像法	5	限时训练(九)	71
方法三 构造法	8	限时训练(十)	72
方法四 特例法	10	限时训练(十一)	73
方法五 排除法	13	限时训练(十二)	74
方法六 信息迁移法	15	限时训练(十三)	75
第二部分 题组篇	19	限时训练(十四)	76
第一章 集合与常用逻辑用语	19	限时训练(十五)	77
第二章 函数	21	限时训练(十六)	78
第三章 导数	28	限时训练(十七)	79
第四章 三角函数	32	限时训练(十八)	80
第五章 平面向量	36	限时训练(十九)	81
第六章 数列	39	限时训练(二十)	82
第七章 不等式	42	限时训练(二十一)	83
第八章 立体几何	47	限时训练(二十二)	84
第九章 直线与圆的方程	52	限时训练(二十三)	85
第十章 圆锥曲线	54	限时训练(二十四)	86
第十一章 算法	56	限时训练(二十五)	87
第十二章 概率与统计	58	限时训练(二十六)	88
第十三章 推理证明	60	限时训练(二十七)	89
第十四章 复数	61	限时训练(二十八)	90
第三部分 实战篇	63	限时训练(二十九)	91
限时训练(一)	63	限时训练(三十)	92
限时训练(二)	64	参考答案	93
限时训练(三)	65	第一部分	93
限时训练(四)	66	第二部分	107
限时训练(五)	67	第三部分	139

一、填空题的类型特点

1. 填空题在高考试卷中的地位

填空题是一种只要求写出结果,不需要写出解答过程的客观性试题.填空题的题型一般可分为:定形填空题、多项填空题、条件与结论开放型填空题.这说明了填空题是高考数学命题改革的试验田,创新型填空题将合不断出现.近几年高考,市属考试填空题的数量和分值都有增加的趋势,分值最高达16分,最高达48分,就分值来看是不可轻视的.

2. 填空题的命题特点

填空题和选择题同属客观性试题,它们有许多共同特点,即:题小、题精、考查目标集中、答案简明、明确、具体,不会出现解答分歧,评分客观、公正、准确,等等.

3. 填空题命题有以下特点

(1)填空题没有备选选项,因此,解答时既不受选项

“选对,多快好省”为宗旨,题设具有“小、巧、活、新”

3. 填空题的命题原则与原则

“选择”是一个心智活动的概念,据有关专家研究,选择题的作答时间应在3分钟左右,每人按自己的定位高低,有题量选择得分量及难易程度而定.正是由于该题型与其他题型特点不同,其解答方法也有很大区别.选择法,解数学选择题的基本策略有两个,一是直接法;二是间接法.

选择法解题的基本策略包括以下两点:

(1)充分利用题干和选项文提供的信息,快速、准确地作出判断,是解答选择题的基本策略.

(2)要掌握选择题的解题思路,原则上都可以用排除法解题.要会排除,根据这题型的特殊点,必须存在对于各选项的排除策略.

选择法的基本策略有以下四点:

(1)仔细审题,吃透题意.第一,关键是弄相关概念、公

总 述

著名物理学家阿基米德曾说过：“给我一个支点，我能撬动地球。”无独有偶，在中国武学中也有“四两拨千斤”的说法，这里运用的都是技巧、巧劲。同样，高考题的解法也有一定的技巧。今天，我们就一起来探索高考选择题和填空题的解题技巧，体验数学研究的魅力。通过系统地学习和训练，你就可以彻底告别高考数学选择题、填空题之痛！我们的口号是：无需忍痛，芬（分）必得!!!

一、选择题的题型特点

1. 选择题在高考试卷中的地位

数学选择题通常作为一套试卷的第一大题，基本上有 12 道小题（全国的选择題的題量主要以 8 道、10 道或 12 道三种形式为主），分值 60 分，约占总分的 40%，也就是说，选择题占据了试卷的“半壁江山”，其分量是绝不容忽视的。解选择题的快慢和成功率的高低对于能否进入做题的最佳状态及整个考试的成败起着举足轻重的作用。如果选择题做得比较顺手，会使考生自信心增强，有利于后续试题的解答。

2. 选择题的题型特点

数学选择题属于客观性试题，是单项选择题，选项中只有一个结论是正确的，而且以“四选一”为其主要形式。它与填空题、解答题的不同主要体现在以下三个方面。

(1) 立意新颖、构思精巧、迷惑性强，内容相关相近，真伪难分。

(2) 技巧性高、灵活性大、概念性强，题材含蓄多变。

(3) 知识面广、切入点多、综合性强，内容跨度较大。

由于解选择题不要求表述得出结论的过程，只要求用各种方法迅速、准确作出判断，因而选择题的解法有其独特的规律和技巧。因此，我们应熟练掌握选择题的解法，以“准确、迅速、多快好省”为宗旨，坚决反对“小题大做”。

3. 选择题的解答策略与原则

“选择”是一个心智范畴的概念，据有关专家测试：选择題的正常解答时间应在 3 分钟左右，每人按自己的定位高低、解题情况和得分重点适当调整完成。正是由于选择题与其他题型特点不同，其解答方法也有很大区别。总体来讲，解数学选择题的基本思路有两个：一是直接法；二是间接法。

选择题解法的基本思想包括以下两点：

(1) 充分利用题干和选择支提供的信息，快速、准确地作出判断，是解选择题的基本策略。

(2) 既要看到通常各类常规题的解题思想，原则上都可以指导选择题的解答；更应看到，根据选择题的特殊性，必定存在若干常规题的特殊解法。

选择题的基本做法有以下四点：

(1) 仔细审题，吃透题意。第一，关键是将相关概念、公

式、定理等基础知识集中整理。凡在题中出现的概念、公式、性质等内容都是平时理解、记忆、运用的重点，也是我们在解选择题时首先需要回忆的对象。第二，关键是发现题材中的“机关”，即题目中的一些隐含条件，往往是该题“价值”之所在，也是我们失分的“隐患”。

(2) 反复析题，去伪存真。析题的过程就是根据题意，联系知识，形成思路的过程。由于选择题具有相近、相关的特点，对于一些似是而非的选项，可以结合题目，将选项逐一比较，用一些“虚拟式”的“如果”，加以分析与验证，从而提高解题的正确率。

(3) 抓住关键，全面分析。通过审题、析题找到题目的关键所在是十分重要的，从关键处入手，找突破口，联系知识进行全面的分析形成正确的解题思路，就可以化难为易，化繁为简，从而解出正确的答案。

(4) 反复检查，认真核对。在审题、析题的过程中，由于思考问题不全面，往往会出现偏差，因而，再返回看一看，认真核对一次，也是解选择题必不可少的步骤。

另外，从近几年高考试题的特点来看，选择题以认识型和思维型的题目为主，减少了繁琐的运算，着力考查考生的逻辑思维与直觉思维能力，以及观察、分析、比较、选择简捷运算方法的能力，且许多题目既可用通性通法直接求解，也可用“特殊”方法求解。所以做选择题时最忌讳以下两点：

(1) 见到题就埋头运算，按着解答题的思路去求解，得到结果再去和选项对照，这样花费时间较长，有时还可能得不到正确答案。

(2) 随意“蒙”一个答案，准确率只有 25%！但经过筛选、淘汰，正确率就可以大幅度提高。

总之，解选择题的基本策略是“不择手段”。

二、填空题的题型特点

1. 填空题在高考试卷中的地位

数学填空题是一种只要求写出结果，不要求写出解答过程的客观性试题。填空题的类型一般可分为：完形填空题、多选填空题、条件与结论开放的填空题。这说明了填空题是高考数学命题改革的试验田，创新型的填空题将会不断出现。近几年各省、市高考填空题的数量和分值都有增加的趋势，分值最低到 16 分，最高到 48 分，就分值来看是不可轻视的。

2. 填空题的题型特点

填空题和选择题同属客观性试题，它们有许多共同特点：形态短小精悍，考查目标集中，答案简短、明确、具体，不必填写解答过程，评分客观、公正、准确，等等。

其主要特点有以下几点。

(1) 填空题没有备选选项。因此，解答时既有不受诱误

干扰的好处,又有缺乏提示帮助的不足,对考生独立思考和求解,在能力要求上会高一些,长期以来,填空题的答对率一直低于选择题的答对率,也许这就是一个重要的原因。

(2)填空题的考查方法灵活。填空题的结构,往往是在一个正确的命题或断言中,抽去其中的一些内容(既可以是条件,也可以是结论),留下空位,让考生独立填上。

(3)填空题的考点少,目标集中。否则,试题的区分度差,其考试的信度和效度都难以得到保证。这是因为:若填空题的考点多,解答过程长,影响结论的因素多,那么对于答错的考生便难以知道其出错的真正原因,不易判断考生的真正水平。

3. 填空题的解答策略与原则

作为填空题,绝大多数是计算型(尤其是推理型)和概念(性质)判断型的试题,应答时必须按规则进行切实的计算或者合乎逻辑的推理和判断,几乎没有间接的方法可言,更是无从猜答,所以在解填空题时,一般要有合理的分析和

判断,要求推理、运算的每一步骤都正确无误,并且还要将答案表达得准确、完整。合情推理、优化思路、少算多思将是快速、准确地解答填空题的基本要求,简言之,解填空题的基本原则就是“小题不能做大”,基本策略就是“准”、“巧”、“快”,其基本方法一般有:直接求解法、特殊数列法、图形特殊位置法(特殊点法、特殊方程法、特殊模型法)和等价转化法等。另外,在解答填空题时还应注意以下几点:

(1)结果要书写规范,如分式的分母不含根式,特殊角的函数要写出函数值,近似计算要达到准确度等要求。

(2)结果要完整,如函数的解析式要写出定义域,应用题不要忘记写单位,求轨迹要排除不满足条件的点等。

(3)结果要符合教材要求,如求不等式的解要写成集合或区间的形式,不能只用一个不等式表示。

(4)做完题后要仔细检查,看有没有遗漏的,可用不同的方法再做一下,验证答案。

总之,解填空题的基本原则是“直扑结果”。

首先,要审清题意,明确题目的要求,如求什么,已知什么,有什么限制条件,等等。其次,要选择适当的方法,如直接法、特殊法、数形结合法等。最后,要检查结果,看是否符合题意,有没有遗漏的情况。

在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题,明确题目的要求;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果,看是否符合题意;第四,要注意书写规范。

总之,解填空题的基本原则是“直扑结果”。在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果;第四,要注意书写规范。

在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果;第四,要注意书写规范。

在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果;第四,要注意书写规范。

在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果;第四,要注意书写规范。

在解答填空题时,要注意以下几点:第一,要认真审题;第二,要选择适当的方法;第三,要检查结果;第四,要注意书写规范。

第一部分 方法篇

方法一 推演法

方法概述

有些选择题、填空题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的.这类题型可直接从题设的条件出发,利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则、特殊结论,通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论.

推演法就是将选择题、填空题作为解答题来解决的一种最常见的基本方法,低档选择题、填空题可用此法迅速求解.通过阅读条件主动地反映性质,再将得到的性质结合相关结论进行直截了当的推理与计算,然后将其推理和计算的结果作为答案.这一方法要求对于数学的概念、定义、定理和公式成立的充分条件和必要条件的理解要尽可能地全面、透彻、深入;对于数学公式的推导、应用、计算要尽可能地熟练、迅速、准确.

典例精讲

典例一 推演法在函数问题中的应用举例

例1 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m =$ _____.

【分析】 本题重点考查了函数的奇偶性与最值之间的关系, 若奇函数在给定区间上有最大值, 则一定存在最小值, 且两者之和为 0, 用推演法求解本题.

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 + \sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$, 令 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$), 则有 $g(-x) = \frac{-2x - \sin x}{x^2 + 1} = -g(x)$, 即 $g(x)$ 为奇函数, 显然 $g(x)_{\max} = -g(x)_{\min}$.

所以 $M+m = 1 + g(x)_{\max} + 1 + g(x)_{\min} = 2$. 故填 2.

【评注】 本题要求学生理解: 若奇函数在给定区间上存在最大值与最小值, 则其最大值与最小值互为相反数.

变式1 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$, 则 $f(\lg 2) + f(\lg \frac{1}{2}) =$ _____.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

例2 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 且 $f(1+m) + f(m) < 0$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【分析】 本题为函数不等式的问题, 利用函数的性质(单调性, 奇偶性)求解, 同时应注意函数的定义域.

【解析】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 所以 $-2 \leq m \leq 2$, $-2 \leq 1+m \leq 2$, 又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 又 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 又 $f(1+m) + f(m) < 0$, 即 $f(m+1) < -f(m) = f(-m)$, 所以 $m+1 > -m$, 综上, 原不等式等价于
$$\begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq 1+m \leq 2, \text{解得 } -\frac{1}{2} < m \leq 1, \text{即实数 } m \text{ 的取值范围是 } (-\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

【评注】 求解本题中的函数不等式, 除注意定义域外, 主要是找到核心不等关系, 若奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $f(x_1) + f(x_2) < 0$, 则 $x_1 + x_2 > 0$; 同理, 若奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $f(x_1) + f(x_2) < 0$, 则 $x_1 + x_2 < 0$, 反之, $f(x_1) + f(x_2) \geq 0$, 则 $x_1 + x_2 \geq 0$.

变式1 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x^2 - 2x) \leq -f(2y - y^2)$ 均成立, 且 $y = f(x-1)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称, 则当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 _____.

典例二 推演法在三角函数问题中的应用举例

例3 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, AB 边上的高为 $\frac{4}{3}$, 则 $AC + BC =$ _____.

【分析】 如图 1-1 所示, 设角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 由面积公式及正、余弦定理求解本题.

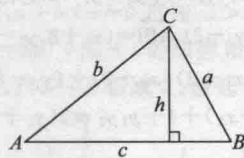


图 1-1

【解析】 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$, 得 $ab = \frac{8}{3}$, 又由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab = 3$, 所以 $a + b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{3 + 3ab} = \sqrt{11}$.

【评注】 解三角形问题需熟练掌握正、余弦定理, 并且要求习惯三角恒等变换与代数的混合运算之间的相互转化.

变式1 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $b+c=2a$, $3\sin A=5\sin B$, 则角 $C =$ _____.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

典例三 推演法在不等式问题中的应用举例

例4 已知 $x, y, z \in (0, +\infty)$, $x - 2y + 3z = 0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为_____.

【分析】由已知等式可知 y 与 x, z 的关系, 利用均值不等式求解本题.

【解析】由 $x, y, z \in (0, +\infty)$, $x - 2y + 3z = 0$ 得 $2y = x + 3z$
 $\geq 2\sqrt{3xz}$, 故 $y^2 \geq 3xz$, 即 $\frac{y^2}{xz} \geq 3$, 当且仅当 $x = 3z$ 时, 等号成立. 故 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为 3.

【评注】本题重点要抓住等式 $x - 2y + 3z = 0$, $x, y, z \in (0, +\infty)$, 即 $2y = x + 3z$, 故所求 $\frac{y^2}{xz} = \frac{(\frac{x+3z}{2})^2}{xz} \geq \frac{(\sqrt{3xz})^2}{xz} = 3$, 降元是求解本题的关键.

变式1 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时, $x + 2y - z$ 的最大值为().

- A. 0 B. $\frac{9}{8}$ C. 2 D. $\frac{9}{4}$

典例四 推演法在解析几何问题中的应用举例

例5 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与点 $M(-2, 2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【分析】设直线 AB 的方程, 利用 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 的坐标运算直接求解.

【解析】依题意, 设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 2)$, 由题意知 $k \neq 0$, 则 $x = \frac{1}{k}y + 2$, 令 $t = \frac{1}{k}$, 则 $\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$, 消去 x 得,

$$y^2 - 8ty - 16 = 0, \text{ 显然 } \Delta = 64t^2 + 64 > 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = 8t, y_1 y_2 = -16,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MA} = (x_1 + 2, y_1 - 2), \overrightarrow{MB} = (x_2 + 2, y_2 - 2)$$

$$\text{则 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + (y_1 - 2)(y_2 - 2)$$

$$= x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 - 2(y_1 + y_2) + 4$$

$$= \frac{y_1^2 y_2^2}{64} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} + 4 - 16 - 16t + 4$$

$$= 4 + \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{4} - 8 - 16t$$

$$= -4 - 16t + 16t^2 + 8 = 0$$

$$\text{解得 } t = \frac{1}{2}, \text{ 故 } k = 2. \text{ 故选 D.}$$

【评注】直线与圆锥曲线位置关系的选择題、填空题一般可借助图像, 利用推演法求解. 但为了更快地得到答案, 也可以记忆一些常见的二级结论.

例如本题, 如图 1-2 所示, 直线 AB 过抛物线的焦点 F , 所以以 AB 为直径的圆与准线 $x = -2$ 相切, 因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 所以 M 为切点. 过 A 作 $AA_1 \perp A_1M$, 过 B

作 $BB_1 \perp B_1M$, 则以 A_1B_1 为直径的圆与直线 AB 相切, 切点为 F , 即 $MF \perp AB$. 易知 $k_{MF} = -\frac{1}{2}$, 所以 $k_{AB} = 2$.

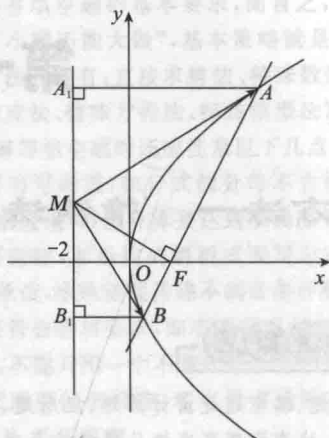


图 1-2

变式1 如图 1-3 所示, F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形, 则 C_2 的离心率是().

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

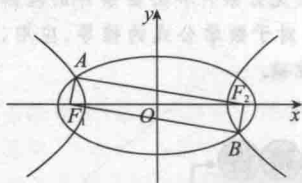


图 1-3



强化训练

- 复数 $\frac{i}{1+2i}$ (i 是虚数单位) 的实部是().
 A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
- 若 e_1, e_2 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量, 且 $a = 2e_1 + e_2, b = -3e_1 + 2e_2$, 则 $a \cdot b$ 等于().
 A. 1 B. -4 C. $-\frac{7}{2}$ D. $\frac{7}{2}$
- 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2 = 3, a_6 = 11$, 则 S_7 等于().
 A. 13 B. 35 C. 49 D. 63
- 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $(a+b)^2 - c^2 = 4$, 且 $C = 60^\circ$, 则 ab 的值为().
 A. $\frac{4}{3}$ B. $8 - 4\sqrt{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$
- 已知曲线 $y = x^4 + ax^2 + 1$ 在点 $(-1, a+2)$ 处切线的斜率为 8, 则 $a =$ ().
 A. 9 B. 6 C. -9 D. -6

6. 已知函数 $f(x) = ax^3 + b\sin x + 4 (a, b \in \mathbf{R})$, $f(\lg(\log_2 10)) = 5$, 则 $f(\lg(\lg 2)) =$ ().

- A. -5 B. -1 C. 3 D. 4

7. 阅读如图 1-4 所示的程序框图, 若输出的 S 值等于 16, 那么判断框内应填写的条件是 ().

- A. $i > 5?$ B. $i > 6?$ C. $i > 7?$ D. $i > 8?$

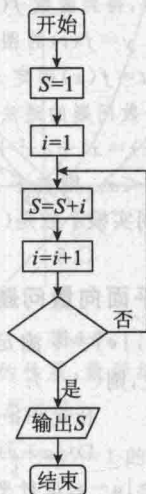


图 1-4

8. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列结论中错误的是 ().

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) = 0$
 B. 函数 $y = f(x)$ 的图像是中心对称图形
 C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 单调递减
 D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$

9. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A, B 两点, 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值等于 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

10. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2ax + 4 > 0$ 恒成立; $q: f(x) = (3-2a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 则实数 a 的取值范围是 _____.

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 = 4, a_9 + a_{10} = 36$, 则 $S_{10} =$ _____.

12. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$, 若 $f(1) = -5$, 则 $f(f(5)) =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, B = 45^\circ, b = \sqrt{2}, a = 1$, 则 A 等于 _____.

14. 若三个数 a_1, a_2, a_3 的方差为 1, 则 $3a_1 + 2, 3a_2 + 2, 3a_3 + 2$ 的方差为 _____.

15. 已知 $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为 _____.

16. 设 $f(x) = \sin 3x + \cos 3x$, 若对任意实数 x 都有 $|f(x)| \leq a$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

17. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, M, N 是椭圆的左、右顶

点, P 是椭圆上任意一点, 且直线 PM, PN 的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 k_2 \neq 0)$, 若 $|k_1| + |k_2|$ 的最小值为 1, 则椭圆的离心率为 _____.

方法二 图像法



方法概述

图像法也叫图解法, 它体现了数形结合的思想. 图像法是利用函数图像或数学结果的几何意义, 将数的问题(如解方程、解不等式、求最值、求取值范围等)与某些图形结合起来, 利用几何图形的直观性, 再辅以简单计算, 确定正确答案的方法.

这种解法贯穿数形结合思想, 每年高考均有很多选择题、填空题(也有解答题)可以用数形结合思想解决, 既简捷又迅速. 如: ①借助集合中的韦恩图明确集合的交、并、补的关系; ②借助三角函数线和三角函数图像, 可以解决有关三角的问题; ③借助直线和曲线的位置关系, 通过作图求交点, 分清上下位置来解决某些方程、不等式的系列问题.



典例精讲

典例一 图像法在函数问题中的应用举例

例 1 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 且 $a > b > c, a + b + c = 0$, 则 ().

- A. $\forall x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) > 0$
 B. $\forall x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) < 0$
 C. $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = 0$
 D. $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) > 0$

【分析】 利用函数与方程的思想求解本题, 由不等式 $a > b > c$, 及方程 $a + b + c = 0$, 作函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像, 结合选项得出正确结论.

【解析】 由 $a > b > c, a + b + c = 0$ 可知: $a > 0, c < 0, f(1) = 0$, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像如图 1-5 所示, 由图知, $\forall x \in (0, 1), f(x) < 0$ 恒成立. 故选 B.

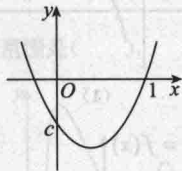


图 1-5

【评注】 深入挖掘函数 $f(x)$ 的性质特征作出函数 $f(x)$ 的图像, 由 $a + b + c = 0$ 知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像恒过 $(1, 0)$ 点, 又 $a > b > c$, 所以 $a > 0$, 抛物线开口向上, $c < 0$, 则与 y 轴交点 $(0, c)$ 在 y 轴负半轴上.

变式 1 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 若 $f(0) = f(4) > f(1)$, 则 ().

- A. $a > 0, 4a + b = 0$ B. $a < 0, 4a + b = 0$

C. $a > 0, 2a + b = 0$

D. $a < 0, 2a + b = 0$

例2 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 不等式 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

【分析】 利用图像法求解本题, 不等式 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$ 等价于函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 的图像在直线 $y = kx$ 上方(可有公共点).

【解析】 如图 1-6 所示, 作函数 $y_1 = \sin \frac{\pi x}{2}$ 与 $y_2 = x$ 的图像, 两个图像的交点恰好为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 要使 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$, 需使 $k \leq 1$, 故 k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

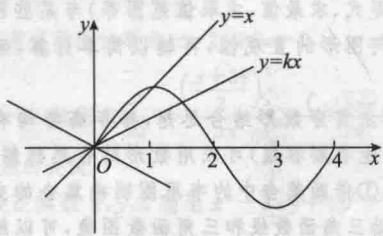


图 1-6

【评注】 本题可归结为不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题, 利用数形结合思想求解这类问题特别奏效.

变式 1 若存在正数 x 使 $2^x(x-a) < 1$ 成立, 则 a 的取值范围是().

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $(-2, +\infty)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

例3 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f[f(x)] + 1$ 的零点个数是().

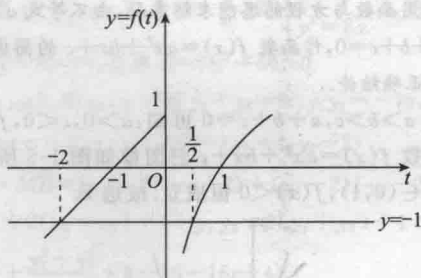
A. 4

B. 3

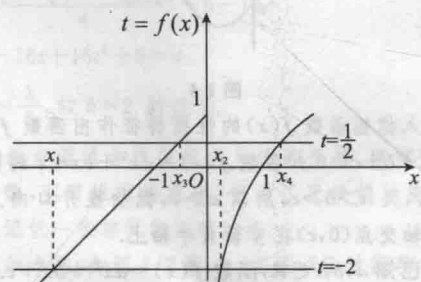
C. 2

D. 1

【分析】 对于复合函数的零点问题利用换元法与图像法综合求解.



(1)



(2)

图 1-7

【解析】 令 $t = f(x) \in \mathbb{R}$, 则 $y = f(t) + 1$. 如图 1-7(1) 所示, 若 $f(t) = -1$, 得 $t = -2$ 或 $\frac{1}{2}$, 对应如图 1-7(2) 所示, 知

$x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \sqrt{2}$. 因此函数 $y = f[f(x)] + 1$ 的零点个数是 4. 故选 A.

【评注】 本题通过换元后, 得到函数 $f(x) = t$ 与 $y = f(t) + 1$, 同时作出 $t = f(x)$ 与 $y = f(t)$ 的图像. 由 $f(t) = -1$ 得 t 的值(或范围), 再由 $t = f(x)$ 确定 x 的值(或范围), 这是复合函数求解零点个数问题的通法, 应该掌握.

变式 1 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若 $f(x_1) = x_1 < x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数是().

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

典例二 图像法在平面向量问题中的应用举例

例4 已知向量 $a \neq e, |e| = 1$ 满足: 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 恒有 $|a - te| \geq |a - e|$ 成立, 则().

A. $a \perp e$

B. $a \perp (a - e)$

C. $e \perp (a - e)$

D. $(a + e) \perp (a - e)$

【分析】 显然对 $|a - te| \geq |a - e|$ 进行平方处理会比较麻烦.

【解析】 设 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = e$, 则 $\vec{BA} = a - e$, 因为对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|a - te| \geq |a - e|$, 所以当 $t_1 > 1$ 时, 设 $\vec{OB}_1 = t_1 e$, 则 $a - t_1 e = \vec{B}_1 A$, 即 $|\vec{B}_1 A| \geq |\vec{BA}|$; 当 $t_2 < 1$ 时, 设 $\vec{OB}_2 = t_2 e$, 则 $a - t_2 e = \vec{B}_2 A$, 则 $|\vec{B}_2 A| \geq |\vec{BA}|$, 如图 1-8 所示, $|\vec{BA}|$ 是点 A 到直线 OB 的最短距离, 即 $BA \perp OB$, 所以 $e \perp (a - e)$. 故选 C.

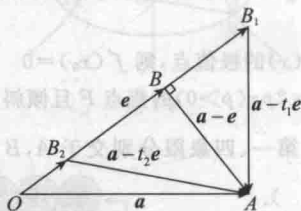


图 1-8

【评注】 利用向量运算的几何表示, 结合三角形法则、平行四边形法则, 可将代数运算转化为几何运算求解.

变式 1 已知平面向量 $a, b (a \neq 0, a \neq b)$ 满足 $|b| = 1$, 且 a 与 $b - a$ 的夹角为 120° , 则 $|a|$ 的取值范围是_____.

典例三 图像法在解析几何问题中的应用举例

例5 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点, 且 $|PA| = |AB|$, 则称点 P 为“ τ 点”, 那么下列结论中正确的是().

A. 直线 l 上的所有点都是“ τ 点”

B. 直线 l 上仅有有限个点是“ τ 点”

C. 直线 l 上的所有点都不是“ τ 点”

D. 直线 l 上有无穷多个点(不是所有的点)是“ τ 点”

【分析】 由题意知直接法求解难度较大, 但可以通过分析其图像, 根据数据变化的规律, 利用极限(极端值)的思想处理.

【解析】 如图 1-9 所示, 在直线 l 上任取一点 P , 作 $y = x^2$ 的切线 PT , 切点为 T , 此时, 可记为 $|PA| = |PT|$, $|AB| = 0$, 再作交线 PAB , A 在 P, B 两点之间, 当直线

PAB 绕点 P 旋转时, 易知 $|AB|$ 的长度变化区间为 $(0, +\infty)$, 而 $|PA|$ 的长度从 $|PT|$ 连续变化, 故一定存在一条直线 l' , 使得 $|PA| = |AB|$, 故直线 l 上的所有点都是 “ τ 点”. 故选 A.

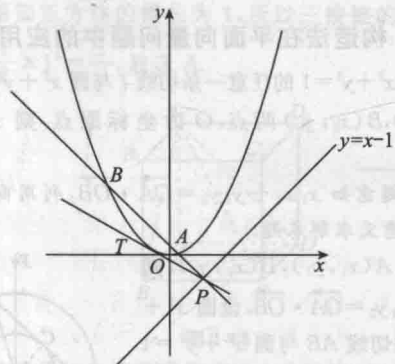


图 1-9

【评注】根据圆锥曲线的性质, 数形结合, 利用动态变换(取极限)可有效求解此类试题.

变式 1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 若点 P 在椭圆上, 且满足 $|PO|^2 = |PF_1| \cdot |PF_2|$, (其中 O 为坐标原点), 则称点 P 为 “ $\ast$ ” 点, 则此椭圆上的 “ $\ast$ ” 点有 () 个.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

典例四 图像法在线性规划问题中的应用举例

例 6 设二元一次不等式组 $\begin{cases} x+2y-19 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x+y-14 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面

区域为 M, 使函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像过区域 M 的 a 的取值范围是 ().

A. $[1, 3]$ B. $[2, \sqrt{10}]$ C. $[2, 9]$ D. $[\sqrt{10}, 9]$

【分析】目标函数中参数的取值范围问题, 先画出平面区域, 确定最优解, 从而求出 a 的范围.

【解析】作出不等式组表示的平面区域 M, 如图 1-10 所示,

由 $\begin{cases} x+2y-19=0 \\ 2x+y-14=0 \end{cases}$, 得 $A(3, 8)$. 由 $\begin{cases} x+2y-19=0 \\ x-y+8=0 \end{cases}$,

得 $B(1, 9)$. 由图知, 若 $y = a^x$ 的图像过区域 M, 则当 $y = a^x$ 的图像过点 $A(3, 8)$, 即 $a^3 = 8$, $a = 2$ 时, a 最小; 当 $y = a^x$ 的图像过点 $B(1, 9)$ 时, 即 $a = 9$ 时, a 最大. 所以 $2 \leq a \leq 9$. 故选 C.

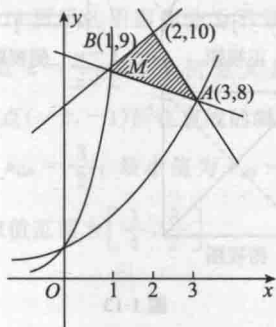


图 1-10

变式 1 设 O 为坐标原点, 点 $M(2, 1)$, 点 $N(x, y)$ 满足不

等式组 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x-y+6 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围

是 _____.



强化训练

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 的零点所在的一个区间是 ().

A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(a) > f(-a)$, 则

实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

4. 下列区间中, 函数 $f(x) = |\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的区间是 ().

A. $(-\infty, 1]$ B. $[-1, \frac{3}{4}]$
C. $[0, \frac{3}{2})$ D. $[1, 2)$

5. 在直角坐标系 xOy 中, 如果两点 $A(a, b)$, $B(-a, -b)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图像上, 那么称 $[A, B]$ 为函数 $f(x)$ 的一组关于原点的中心对称点 ($[A, B]$ 与 $[B, A]$ 看作一组). 函数 $g(x) =$

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x, & x \leq 0 \\ \log_4(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 关于原点的中心对称点的组数为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知 a, b 是单位向量, $a \cdot b = 0$. 若向量 c 满足 $|c - a - b| = 1$, 则 $|c|$ 的最大值为 ().

A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

7. 函数 $y = f(x)$ 的图像如图 1-11 所示, 在区间 $[a, b]$ 上可找到 n ($n \geq 2$) 个不同的数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \dots = \frac{f(x_n)}{x_n}$, 则 n 的取值范围是 ().

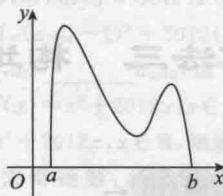


图 1-11

A. $\{2, 3\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{3, 4, 5\}$

8. 已知函数 $f(x) = x + 2^x$, $g(x) = x + \ln x$, $h(x) = x + \sqrt{x}$ 的零点分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ().

A. $x_1 < x_2 < x_3$ B. $x_2 < x_1 < x_3$

- C. $x_1 < x_3 < x_2$ D. $x_3 < x_2 < x_1$
9. 设函数 $f(x) = e^x + x - 2$, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$. 若实数 a, b 满足 $f(a) = 0, g(b) = 0$, 则().
- A. $g(a) < 0 < f(b)$ B. $f(b) < 0 < g(a)$
C. $0 < g(a) < f(b)$ D. $f(b) < g(a) < 0$
10. 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$ 的定义域为 $[a, b]$ ($a < b$), 值域为 $[1, 5]$, 则在平面直角坐标系内, 点 (a, b) 的运动轨迹与直角坐标轴围成的图形的面积为().
- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
11. 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点 P 向 x 轴作垂线, 垂足恰为左焦点 F_1 , A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点, B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点, 且 $AB \parallel OP$ (O 是坐标原点), 则该椭圆的离心率是().
- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
12. 设 A, B 是两个集合, 定义集合运算 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $M = \{x | |x+1| \leq 2\}$, $N = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M - N =$ _____.
13. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - |\ln x|$ 的零点个数为 _____.
14. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2} > (a-1)x$ 的解集为 A , 且 $A \subseteq \{x | 0 < x < 1\}$, 则实数 a 的取值范围为 _____.
15. 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为不等式组 $\begin{cases} 2x+3y-6 \leq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所表示的区域上一动点, 则 $|OM|$ 的最小值是 _____.
16. 在直角坐标系 xOy 中, 设集合 $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 在区域 Ω 内任取一点 $P(x, y)$, 则满足 $x+y \leq 1$ 的概率等于 _____.
17. 抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点 A, B 满足 $|AB| = 3$, 则 AB 中点横坐标的最小值为 _____.
18. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非零实数 l 使得对任意 $x \in M$ ($M \subseteq D$), 有 $x+l \in D$, 且 $f(x+l) \geq f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 高调函数. 如果定义域为 $[-1, +\infty)$ 的函数 $f(x) = x^2$ 是 $[-1, +\infty)$ 上的 m 高调函数, 那么实数 m 的取值范围是 _____; 如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = |x-a^2| - a^2$, 且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 4 高调函数, 那么实数 a 的取值范围是 _____.

方法三 构造法

方法概述

在解决某些数学问题时, 我们常会采用这样的方法: 通过对条件和结论充分细致地分析, 抓住问题的本质特征, 联想熟知的数学模型, 然后变换命题, 恰当地构造辅助元素, 它可以是一个图形、一个函数、一个方程、一个等价命题等, 以此架起一座连接条件和结论的桥梁, 从而使问题得以解

决, 这种解题的数学方法, 我们称为构造法.



典例精讲

典例一 构造法在平面向量问题中的应用举例

例1 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的任意一条切线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, O 为坐标原点, 则 $x_1 x_2 + y_1 y_2 =$ _____.

【分析】 由题意知 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, 利用向量数量积的几何意义求解本题.

【解析】 由 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$. 设圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切于点 C , 如图 1-12 所示, 易知 $OC = 1, OA = OB = 2$, 且 $OC \perp AB$, 则 $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \times 2 \times$

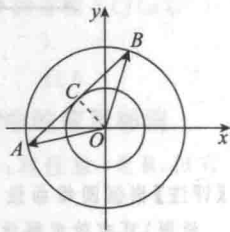


图 1-12

$\cos \frac{2\pi}{3} = -2$, 即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = -2$.

【评注】 由圆的性质知 $OC \perp AB$, 则点 C 为弦 AB 的中点, 向量的数量积 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 也可转化为 $\vec{OC}$ 和 $\frac{-\vec{AB}}{2}$ 相关的运算.

即 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OC} + \vec{CA}) \cdot (\vec{OC} + \vec{CB}) = (\vec{OC} - \vec{CB}) \cdot (\vec{OC} + \vec{CB}) = |\vec{OC}|^2 - |\vec{CB}|^2 = |\vec{OC}|^2 - \left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2 = 1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -2$.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中, 设 P_0 是边 AB 上一定点, 满足 $P_0 B = \frac{1}{4} AB$, 且对于边 AB 上任意一点 P , 恒有 $\vec{PB} \cdot \vec{PC} \geq \vec{P_0 B} \cdot \vec{P_0 C}$, 则().

- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $\angle BAC = 90^\circ$
C. $AB = AC$ D. $AC = BC$

典例二 构造法在立体几何问题中的应用举例

例2 某三棱锥的三视图如图 1-13 所示, 则该三棱锥的体积为().

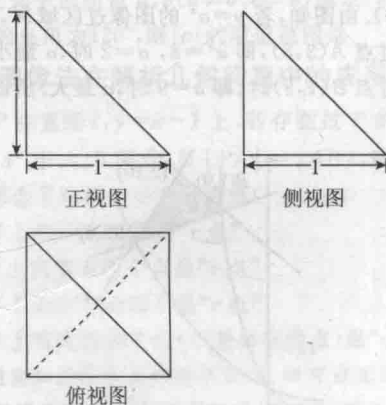


图 1-13

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【分析】本题直接还原几何体难度较大,故由三视图可构造特殊几何体(正方体)求解本题.

【解析】如图 1-14 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 A_1B, A_1C, A_1D, BD , 则三棱锥 A_1-BCD 即为所求,由三视图知正方体的棱长为 1, 所以三棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{6}$. 故选 A.

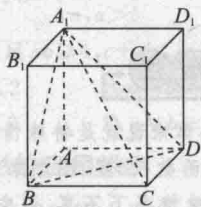
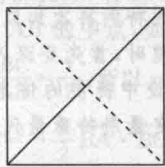


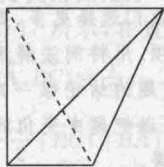
图 1-14

【评注】多面体的三视图可借助特殊的棱柱(长方体)处理.

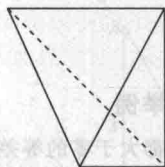
变式 1 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时,以 zOx 平面为投影面,则得到的正视图可以为().



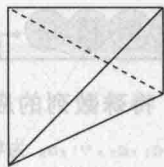
A.



B.



C.



D.

典例三 构造法在线性规划问题中的应用举例

【例 3】 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x-2y+4 \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数

$z = \frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围是_____.

【分析】构造几何图形由 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 知,该目标函数表示可行域内的点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(-2, -1)$ 所在直线的斜率.

【解析】如图 1-15 所示的阴影部分为不等式组所表示的区域. 目标函数 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的几何意义是区域内的动点 $P(x, y)$ 与定点 $(-2, -1)$ 所在直线的斜率,由图可知斜率的最大值为 $k_{QA} = \frac{3}{2}$, 最小值为 $k_{QB} = \frac{1}{4}$, 故目标函数 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围为 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$.

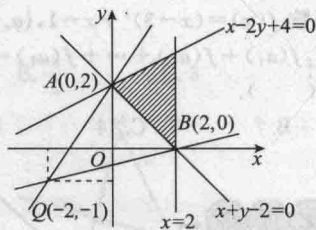


图 1-15

【评注】在求解简单的线性规划问题时,常遇到一些目标函数如截距 $(z=ax+by)$ 的形式,斜率 $(z=\frac{y-b}{x-a})$ 的形式,还有距离 $(z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$ 的形式,解题时需要从目标函数的形式上构造相关的几何模型,从而求解.

变式 1 已知 $P(x, y)$ 的坐标满足 $\begin{cases} \sqrt{3}x-y < 0 \\ x-\sqrt{3}y+2 < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则

$\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围为_____.

典例四 构造法在函数问题中的应用举例

【例 4】 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+x \cdot f'(x) > 0$, 若 $a > b$, 则().

- A. $af(b) > bf(a)$ B. $bf(a) > af(b)$
C. $af(a) > bf(b)$ D. $bf(b) > af(a)$

【分析】构造函数 $g(x) = xf(x)$, 利用函数的单调性比较大小.

【解析】令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, 因为 $x \in \mathbf{R}, f(x) + x \cdot f'(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $a > b$, 则 $g(a) > g(b)$, 即 $af(a) > bf(b)$. 故选 C.

【评注】通过挖掘函数的形式,从而构造函数,再利用函数的单调性比较大小,是比较大小的常用方法.

变式 1 设函数 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数和偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 且 $g(-3) = 0$, 则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集是().

- A. $(-3, 0) \cup (0, 3)$ B. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ D. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

典例五 构造法在数列问题中的应用举例

【例 5】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $(a_7-1)^3 + 2012(a_7-1) = 1$, $(a_{2006}-1)^3 + 2012(a_{2006}-1) = -1$, 则 $S_{2012} =$ _____, a_7 _____ a_{2006} (填“>”, “<”或“=”).

【分析】构造函数 $f(x) = x^3 + 2012x, x \in \mathbf{R}$.

【解析】令 $f(x) = x^3 + 2012x, x \in \mathbf{R}$, 知函数 $f(x)$ 在区间 $\mathbf{R}$ 上单调递增且为奇函数, 由题意知 $f(a_7-1) = 1$, $f(a_{2006}-1) = -1$, 则 $f(a_7-1) + f(a_{2006}-1) = 0$, 得 $a_7-1 + a_{2006}-1 = 0$, 即 $a_7 + a_{2006} = 2$,

则 $S_{2012} = \frac{(a_1 + a_{2012}) \times 2012}{2} = \frac{(a_7 + a_{2006}) \times 2012}{2} = 2012$,

且 $f(a_{2006}-1) < f(a_7-1)$, 得 $a_7 > a_{2006}$, 所以等差数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 故 $a_7 > a_{2012}$.