考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版 2015

考研数学 历年真题标准解析

（数学二适用）

全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

主审 张宇

送精讲导学课程

登陆中国教育考试在线

http://www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI BIAOZHUN JIEXI
(SHUXUE ER SHIYONG)

高教版
2015

考研数学

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

历年真题标准解析

主审 张宇

送精讲导学课程

（数学二适用）

登陆中国教育考试在线
http://www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

《2015考研数学历年真题标准解析（数学二适用）》一书编者深谙命题原则、试题的选择方法以及题目的难易程度的比例，对数学二2004—2013年的试题进行了分类归纳总结和详细解读，并单独对2014年考研数学数学二试卷进行了分析。通过本书的学习，考生定能了解试题的难度和分布，熟悉必考的知识点及有关的解题思路和解题方法，对考研数学有更清晰的认识，进而有助于考生合理安排时间，制定出适合自己的复习计划，最终取得更好的成绩。

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学历年真题标准解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京:高等教育出版社,2014.6

数学二适用

ISBN 978-7-04-039947-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第099588号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 余 杨
责任校对 孟 玲　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	12	版　次	2014年6月第1版
字　数	280千字	印　次	2014年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	22.00元

物 料 号　39947-00

编者的话

2010年以来,全国报考硕士研究生的人数呈逐年增加的趋势,考研竞争的程度越来越激烈,因此为广大考生提供一本既实用又具针对性的考研书是非常必要的!我们认真研究了教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容,详细解读了数学(二)10年的全部考题:考题的知识点、试题类型、命题方法、解题思路、解题方法与解题技巧等、本书编者深谙命题原则、试题的选择方法以及题目的难易程度的比例等.在考研的辅导过程中(最早的从1986年就开始辅导考研),我们按知识点的分类进行讲授,效果非常好,学生的收益也有明显的提高、所以我们总结了这方面的经验,认为非常有必要对近10年的考研试题进行分类归纳总结,这对考生复习迎考是非常有帮助的,因为它可以使考生一目了然地知道:

1. 哪些知识点是必考的或从未考过.

例如(1) 参数方程求导,隐函数求导:10年中有12题.

(2) 导数的应用:10年中有19题.

(3) 未定式极限的计算:10年中有11题.

(4) 一元积分学:10年中有14题.

(5) 二重积分:10年中有19题.

(6) 微分方程:10年中有23题.

(7) 矩阵:10年中有14题.

(8) 向量:10年中有9题.

(9) 线性方程组:10年中有10题(共有9题为计算题).

(10) 矩阵的特征值与特征向量:10年中有13题.

(11) 行列式:无单个考题(只在计算题中涉及).

(12) 二次型:08年以前没有考题.

2. 试题的题型是什么?

3. 涉及的解题方法是什么?有何解题技巧?

考生了解这些内容后定能熟练地掌握必考的知识点及有关的解题思路和解题方法.而无需花费时间去做那些在考试中不出现或极少出现的内容与题目,而对必考的题目则集中精力,势必更有得分的把握,从而提高考试成绩.

在解题思路和解题方法上,以我们近40年的教学经验以及20多年辅导考研的体会,尽可能地以通俗易懂、简捷、容易理解和掌握的方法介绍给考生.例如编者给出许多知识点或公式的"结构式",简单、易懂、好掌握.中值定理是考试的重点和难点,编者根据多年的经验,总结归纳出简捷有效的"直接构造法"和"常数变易法"(详见"中值定理"的解题思路与解题方法),这无疑会极大地提高考生的解题能力.

本书的特点是:

1. 重点突出,考点的内容清晰、类型醒目

我们把相同知识点的考题总结归纳在一起,既突出了重点,又对每年必考的题目一目了然,建议考生对10年中考到7次以上的题目视为必考题,而对考到的概率为50%左右的题目应予以加倍的关注,它考到的可能性较大.

2. 特点鲜明的“解题思路和解题方法”,其思路清晰,方法好掌握

对每一类重点或必考题型都介绍了它们的“解题思路和解题方法”.例如我们给出了利用泰勒公式必须遵循的两个原则:“上下同阶”原则与“幂次最低”原则,这无疑给了考生一把开锁的钥匙.既能提高分析问题的能力,又能提高解题能力.

3. 独特的“错误防范”,效果明显,收效显著

对考生中容易犯的错误或被忽略的地方,给予必要的提醒,这必能较大幅度的提升考生的解题能力,不犯或少犯错误!效果明显,收效显著.

4. 查漏补缺,增强信心

我们特意保留了2014年的试题,考生在复习完了全部内容后,再认真地完成一套完整的试题,从而发现不足,再进行查漏补缺,必能增强必胜的信心.实现自己的理想和目的.

本书在编写过程中得到了高等教育出版社刘佳与张耀明老师的大力支持和帮助,特此致谢!书中的“高等数学”和“线性代数”部分由首都经济贸易大学刘长乃教授编写.其他由吉林大学高彦伟教授编写.

书中错误难免,欢迎批评指正!

编写组

2014年3月

目　录

第一部分 高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

无穷小量的概念、无穷小量阶的比较、未定式极限的求解以及函数在一点处的连续与间断的概念都属于考试中常出现的基本题型.也是必考的内容.

1. 无穷小(大)量的概念以及"阶"的比较

(1)(1301)设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$,则当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)$ 是

(A)比 x 高阶的无穷小.　　(B)比 x 低阶的无穷小.

(C)与 x 同阶但不等价的无穷小.　　(D)与 x 等价的无穷小.

(2)(1315)当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值.

(3)(1101)已知当 $x\to0$ 时,$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则

(A)$k=1,c=4$.　(B)$k=1,c=-4$.　(C)$k=3,c=4$.　(D)$k=3,c=-4$.

(4)(0902)当 $x\to0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$.　(B)$a=1,b=\frac{1}{6}$.　(C)$a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　(D)$a=-1,b=\frac{1}{6}$.

(5)(0701)当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　(B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

(6)(0615)试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

(7)(0505)当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量,则 $k=$__________.

(8)(0407)把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)α,β,γ.　(B)α,γ,β.　(C)β,α,γ.　(D)β,γ,α.

注:(1301)的前两位数表示试卷的年份,后两位数表示题号,即 2013 年试卷的第一题,(0917)为 2009 年试卷的第 17 题,其余类似.

解题思路与解题方法

无穷小量的判定应根据定义.而两个无穷小量的比较就是求它们比的极限.

两个无穷小量有如下的运算法则:(设 m,n 为正整数)

(1)加减法时低阶"吸收"高阶,即

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=\min(m,n).$$

(2) 乘法时阶数“相加”,即

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}).$$

(3) 非零常数不影响阶数,即

$$o(x^m)=o(kx^m)=ko(x^m)\quad(k\neq 0).$$

解答

(1) 答:选(C).

考点:无穷小阶的比较.

解 由已知,$\alpha(x)=\arcsin\dfrac{\cos x-1}{x}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\dfrac{\cos x-1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

因此选(C).

错误防范:由于对概念的掌握不扎实,没有将 $\alpha(x)$ 与 x 进行比较.

(2) 考点:无穷小的比较;洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\cos x\sin 2x\cos 3x+3\cos x\cos 2x\sin 3x}{anx^{n-1}}.$

由于当 $n=2$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin 2x\cos 3x}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos 2x\sin 3x}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=\dfrac{7}{a}$,由题设知$\dfrac{7}{a}=1$,故 $a=7$.

当 $n\neq 2$ 时,不合题意,所以 $a=7,n=2$.

(3) 答:选(C).

考点:洛必达法则或麦克劳林公式.

解法 1 因为 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

$$\sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3),$$

所以 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$

$$=3x-\frac{1}{2}x^3-3x+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

$$=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3(\text{当 } x\to 0\text{ 时}),$$

所以 $c=4,k=3$.

解法 2 洛必达法则

原式$\xlongequal{\text{洛法}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\qquad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}\xlongequal{\text{题设等价}}1.$$

只有当 $k=3,c=4$ 时,其极限值才是 1,所以选(C).

解法 3 利用了倍角的公式

因为 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\quad(\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x)$,

立即可得 $c=4,k=3$.

(4) 答:选(A).

考点:函数等价无穷小的概念以及函数极限的计算.

解 由题意,本题的另一种命题为:已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,求参数 a,b. 改为计算题后,其分值要提高.

对原题的分母使用等价无穷小代换,则有 $x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$.

注意到分母是三阶无穷小,根据"上下同阶"的原则,则对原式的分子使用泰勒公式要保留到三阶无穷小,即当 $x\to 0$ 时,$\sin ax=ax-\frac{1}{3!}(ax)^3+o(x^3)$,则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-ax+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)+\frac{a^3}{6}x^2+o(x^2)}{-bx^2}\xlongequal{\text{题设等价}}1,$$

所以 $a=1,b=-\frac{1}{6}$,选(A).

错误防范:如果先将分母用等价无穷小代换后,再用洛必达法则求解,会出现无法求得 a,b 的情况.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{分母用等价}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{a^3\cos ax}{-6b}\xlongequal{\text{题设}}1.$$

只能得到 $a^3=-6b$,无法求得 a 和 b 的值.

由此可见:洛必达法则不是万能的!建议考生在极限计算中,尤其在分子(或分母)是二阶以上的无穷小量时,尽可能地用泰勒公式,这是个档次高,效率显著的好方法!但一定要注意"上下同阶"的原则!

(5) 答:选(B).

考点:几个重要的等价无穷小量及用洛必达法则求极限.

解法 1 排除法.

当 $x\to 0^+$ 时,$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x}$;$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$;$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$,所以选(B).

解法 2 利用等价无穷小量,直接可得(B)正确.

当 $x\to 0^+$ 时,$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$.

解法 3 用洛必达法则计算.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=1.$$

(6) 考点: 麦克劳林公式.

解 因为 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,

将其代入题设等式,整理得

$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3=1+Ax+o(x^3),$$

故有 $$\begin{cases}1+B=A,\\ \frac{1}{2}+B+C=0,\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

(7) 答: 填$\frac{3}{4}$.

考点: 无穷小量的比较的概念以及极限的求法.

解法 1 $$1=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})kx^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{kx}+\frac{1-\cos x}{kx^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}\right),$$

故 $k=\frac{3}{4}$.

解法 2 等价无穷小量代换.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{等价}}\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-\cos x}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\cos x})kx^2}\qquad(x\to0\text{ 时 }\arcsin x\sim x)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{kx^2}\xlongequal{\text{题设}}1,$$

解得 $k=\frac{3}{4}$.

(8) 答: 选(B).

考点: 无穷小量的比较、变限积分求导.

解 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\ \tan x}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x\sqrt{x})}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x\sqrt{x})}=+\infty\ ,$$

所以排列次序为 α,γ,β,故选项(B)正确.

2. 连续与间断

(1)(1303)设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

(2)(1001)函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(3)(0901)函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(4)(0804)设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ 有

(A) 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点.

(B) 1 个可去间断点,1 个无穷间断点.

(C) 2 个跳跃间断点.

(D) 2 个无穷间断点.

(5)(0702)函数 $f(x)=\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A) 0 . (B) 1 . (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

(6)(0602)设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2\,dt, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

(7)(0512)设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则

（A）$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

（B）$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

（8）（0401）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

解题思路与解题方法

函数的连续主要是研究分段函数在分段点处的连续性. 常用的方法是计算分段点处的左、右极限和在该点是否有定义. 若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，则在点 x_0 处，$f(x)$ 就是连续的. 其中有任何一个等式不成立，则 x_0 为不连续点，也就是间断点. 间断点的关键是其分类：第一类间断点中尤其要关注"可去间断点". 注意"可去"的含义是指"修改"$f(x_0)$ 的值或"补充定义"$f(x_0)$ 的值，使 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

解答

（1）答：选（C）.

考点：分段函数的积分上限函数与间断点的类型.

解 由已知，$F(x)=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2x+2-2\pi, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$

显然在 $x=\pi$ 处连续，又

$$F'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{-1-\cos x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1}=0,$$

$$F'_+(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{2x-2\pi}{x-\pi}=2,$$

$$F'_-(\pi)\neq F'_+(\pi),$$

所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续，但不可导.

错误防范：没有准确写出 $F(x)$ 的表达式.

（2）答：选（B）.

考点：函数间断点的概念与分类.

解 $f(x)$ 在 $x=0,1,-1$ 处无定义，所以 $f(x)$ 有 3 个间断点. 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt2}{2},$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=-\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\infty,$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点. 应选

(B).

(3) 答:选(C).

考点:函数极限的运算和间断点的概念与分类.

解　当 $x=k,k\in\mathbf{Z}$ 时 $f(x)$ 间断,故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个.但左、右极限都存在的可去间断点应在 $x-x^3=0$ 的解 $x=0,\pm1$ 中去寻找.因为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

所以可去间断点有 3 个,即 $x=0,\pm1$,应选(C).

(4) 答:选(A).

考点:函数的间断点及其分类.

解　$x=0,x=1$ 是间断点.因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x\cos x}=0,$$

故 $x=0$ 是可去间断点;而

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin1,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin1.$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.选(A).

(5) 答:选(A).

考点:函数的间断点及其分类.

解　易知 $x=0,x=1,x=\pm\frac{\pi}{2}$ 是所给函数的间断点,不难验出 $x=1,x=\pm\frac{\pi}{2}$ 是无穷间断点,故只能选(A).事实上,由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1+e^{1-\frac{1}{x}}}{1-e^{1-\frac{1}{x}}}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1,$$

因此 $x=1$ 是跳跃间断点,即第一类间断点.选(A).

(6) 答:填$\frac{1}{3}$.

考点:函数在一点处连续的定义.

解 $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

(7) 答:选(D).

考点:函数的间断点及其分类.

解 显然 $x=0$,$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$,$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$,故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,应选(D).

(8) 答:填 0.

考点:极限,函数的间断点.

解 因为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

所以本题应填 0.

第二章　一元函数微分学

一元函数微分学是高等数学的基础. 导数概念及导数的四则运算,复合函数和隐函数的求导,导数的应用都属于必考内容之一,很多题都属于容易题,是得分率比较高的题型. 而未定式极限的求法则是常见题型,属于中等难度题. 中等难度题目约占试卷的 80%,考生必须熟练掌握. 中值定理的题目则属于较难的题型. 在研究生这类选拔性考试中是经常出现的试题,希望广大考生引起足够的重视.

1. 导数及其运算

(1) (1302) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=$

(A) 2 .　　(B) 1 .　　(C) -1 .　　(D) -2 .

(2) (1310) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ ________.

(3) (1202) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(4) (1102) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(5) (1011) 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ______.

(6) (1013) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加,则当 $l=12$ cm, $w=5$ cm 时,它的对角线增加的速率为______.

(7) (0704) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(8) (0713) 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(9) (0609) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x)=e^{1+g(x)}$, $h'(1)=1$, $g'(1)=2$,则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3-1$.　　(B) $-\ln 3-1$.　　(C) $-\ln 2-1$.　　(D) $\ln 2-1$.

(10) (0501) 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $dy\big|_{x=\pi}=$ ________.

(11) (0507) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内