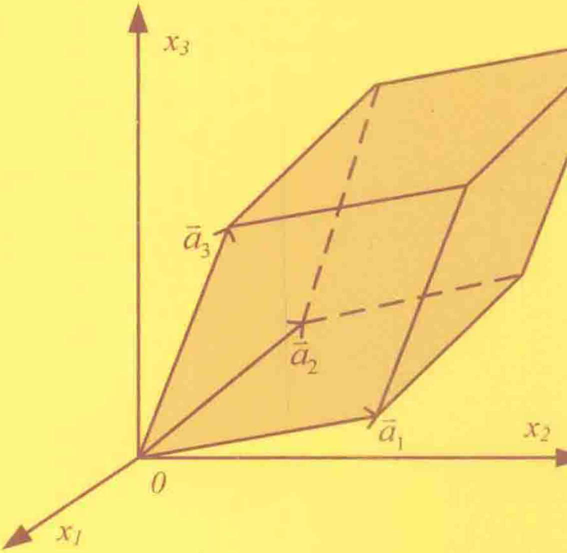
矩阵论札记

梁昌洪 著



科学出版社

矩阵论札记

梁昌洪 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书的核心主题是矩阵。矩阵理论又是代数和几何的完美结合。本书在侧重矩阵代数的同时，强调了矩阵几何的应用，由此引出了矩阵空间、矩阵变换等。书中附录也可以给广大工程技术人员在工作中带来很大的方便。

本书适合理工科本科生和硕士、博士研究生学习使用，也可以作为相关专业的广大科技和工程人员的入门读物和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论札记/梁昌洪著. —北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-041631-5

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①梁… Ⅲ.①矩阵论 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 185690 号

责任编辑：[illegible] 孙 芳 / 责任校对：胡小洁

责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张：23 1/4

字数：456 000

定价：60.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书是作者的第三本工程数学札记，前两本分别是《矢算场论札记》(科学出版社，2007)和《复变函数札记》(科学出版社，2011)。十分明显，我们的意图是想建立某种工程数学类型，更加强调在数学与工程之间架设读者能自如跨越的桥梁。

本书的核心主题是矩阵。刚过去的20世纪，计算机的发明和应用是人类的一件大事，而也正因为计算机，使得矩阵在数学中逐渐进入中心地位。不论是力学中的有限元法还是电磁学中的矩量法都离不开计算机的介入，它们分别称之为计算力学和计算电磁学。另一方面，有限元法、矩量法又离不开矩阵的应用。究其深层原因，矩阵的两个核心本质是线性和离散，它们在物理中的线性问题和计算机的离散特性中相得益彰、相互结合甚至可以达到相互融合的较高境界。

矩阵理论又是代数和几何的完美结合。目前，不少书籍往往相对注意到矩阵代数的一个侧面。实质上，矩阵几何是我们研究很多问题中必不可少的，广义上矩阵构成一个变换。作为一典型实例：坐标转动即可以采用矩阵表示；同时，矩阵也独立地构成了空间，典型的有 Euclid 空间。千万不要小看矩阵空间，更不要以为它仅仅是形式语言，正是这一思想使物理有了飞跃的发展。1905年，爱因斯坦创立了狭义相对论，这是一场物理学的革命，但完全令人没有想到的是，仅仅过了两年，即1907年，他的数学老师 Minkovski 建立了四维矩阵空间$[x, y, z, ict]$，即用矩阵把四维时空真正放到一起。注意到，ict 也是长度量纲。建立了完整的 Minkovski 复矩阵空间，其突出真空中光速 c 是空间的不变量，由此，爱因斯坦深为自己没有修好线性代数(矩阵论)而后悔不已。

1925年，海森堡在研究原子核外双电子的问题中遇到了难关，最后，他引入了自己称之为"能量表格"给予如下解决：

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

他的导师玻恩看到后大笑，说："这个'能量表格'就是矩阵，你还没学过，好吧！我请我的另一学生约旦来给你补补课。"于是创立了量子矩阵力学，进而有了测不准关系。

由上可以看出，矩阵的发展离不开应用的刺激，如今有了计算机，情况更为如此了。

有了这第三本书，我们可以冒昧地讨论这套书的不同特色。

（1）思想特色。这是很多初学者所希望探求的：出了一个概念，出了一种方法，它们在思想上是如何想到的？

（2）内容特色。即十分强调工程数学中数学和工程的相互联系，相互交流，相互提高。

（3）文字特色。摆脱某种数学书的枯燥特点，想吸引读者，引其入胜，想学、要学和努力学。正如龚昇教授所言，书中“不求句句话都十分严格，而求通俗易懂”。

虽然作者尽了最大努力，但不可避免仍会存在缺点和不足，热诚期望专家和读者批评指正，以使本书质量进一步提高。

作　者

2014 年 3 月于西安

目　　录

第三部分 线性方程组

第四部分　矩阵空间

第五部分　本征问题与二次型

第六部分 矩阵变换

第七部分 矩阵应用

第一部分　线 性 基 础

第 1 章　线性思想

世界从本质上讲必定是非线性的，但我们却常常采用线性方法给予近似分析和处理。这正是人类在世界认识上对线性与非线性的辩证统一。

本书的核心主题是矩阵。矩阵有明显的三大特点：①矩阵是线性的；②矩阵是离散的；③矩阵是代数和几何交融的。因此，从线性思想作为本书出发点十分自然贴切。

注意到，周围的很多事物全局是非线性的，而在局部则是线性的。一个典型实例是：铁路和高速公路总长距离肯定是非线性的，但对于一小段则完全可以看做是（近似为）直线。众所周知，铺设轨道所准备的铁轨（绝大部分）都是直的，或者是线性的。

同时，还注意到，存在另外一类事物，其局部（如每个人、每顿饭）有多少是非线性的，而全局（如部队一个团的每月粮食消耗）则（在统计平均意义上）是线性的。

1.1　引　　子

由上可知，线性方法是处理实际事物的一种重要分析方法。首先举一个典型的微积分例子。

$$y=\sin x \tag{1-1}$$

式(1-1)表示正弦曲线，要求出 $x\in[0,\pi/2]$ 段曲线长度（图 1-1），最简单的办法是采用直线（线性段）去逼近它。

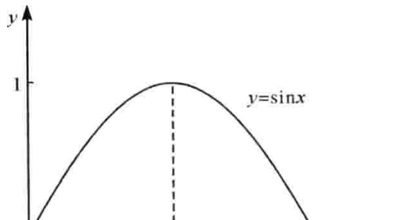


图 1-1　$y=\sin x, x\in[0,\pi/2]$ 段的曲线长度

Case 1　一段逼近

在区间[0,π/2]上采用一段直线逼近，如图 1-2 所示。

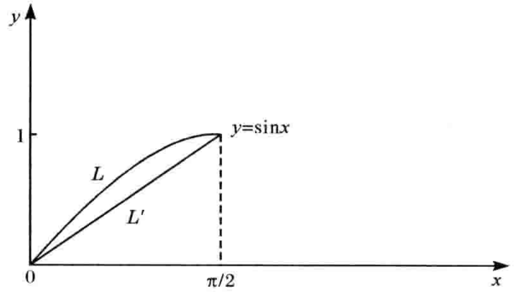


图 1-2　采用一段 L' 逼近 L

$$L'=\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=1.862095889 \tag{1-2}$$

且

$$L>L' \tag{1-3}$$

Case 2　两段逼近

即把 $x\in[0,\pi/4]$ 和 $x\in[\pi/4,\pi/2]$ 作两段逼近，采用 $L''_1+L''_2$ 逼近 L，如图 1-3所示。

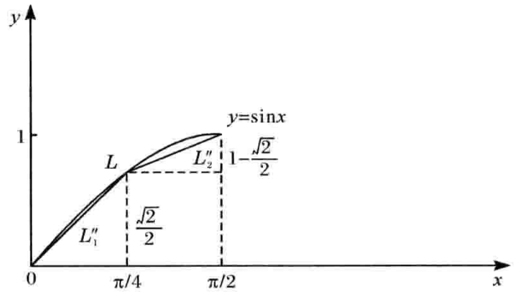


图 1-3　采用 $x\in[0,\pi/4]$ 和 $x\in[\pi/4,\pi/2]$ 两段直线 L''_1 和 L''_2 逼近 L

从图 1-3 中可以看出，

$$L''_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=1.056811372$$

$$L''_2=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=0.838234282$$

有

$$L''=L''_1+L''_2=1.895045635 \tag{1-4}$$

且

$$L>L'' \tag{1-5}$$

Case 3　微分逼近

大家是否注意到，牛顿微分逼近的几何实质是在很小的区间内（$\Delta\to0$），曲线可以用直线作出逼近（即曲线与直线的统一），如图 1-4 所示。

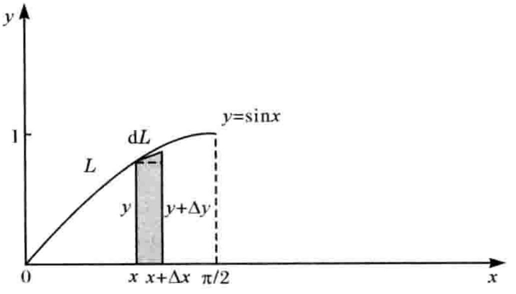


图 1-4　$y=\sin x$ 曲线的微分逼近

从图 1-4 中可以看出，

$$\mathrm{d}L=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{1-6}$$

于是，得到曲线长度为

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \tag{1-7}$$

这一积分目前还无法用解析加以表达。于是，我们想到了积分中值定理，即把曲线长度转化为曲线下的面积。当然，这也是一种**近似**，如图 1-5 所示。

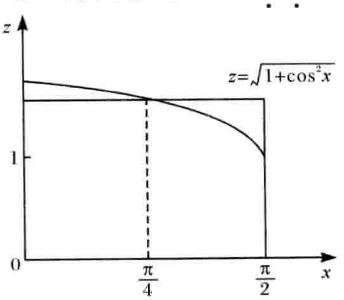


图 1-5　积分中值定理

$$L''' \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\cos^2 x_0} \tag{1-8}$$

式中，$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$。为方便，可取 x_0 的中值有

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \cos^2 x_0 = \frac{1}{2} \tag{1-9}$$

得到

$$L''' \approx \frac{\sqrt{6}\pi}{4} = 1.923824745 \tag{1-10}$$

作为对比，精确的数值积分为

$$L = 1.910098938 \tag{1-11}$$

相对误差 δ 为

$$\delta = 0.007185914 \approx 0.72\% \tag{1-12}$$

可见，采用中值定理有很好的效果。

1.2 线性代数实例

牛顿微积分的出现和广泛应用使人们兴奋若狂，在很长一段时间内都吹捧微积分可以解决一切问题。但冷静下来之后，尤其是在实际中不断碰壁后，人们才意识到，世界存在一大类问题，其研究对象是**离散**的，而不是微积分中的**连续**函数。尤其值得指出，计算机处理离散得心应手，使我们再次回归到“离散世界”。

线性和**离散**是矩阵论中最重要的两大特征。具体可见如下实例。

【例 1-1】 $x'oy'$坐标系是 xoy 坐标系正向旋转 θ 角而成，现要求 $x'oy'$ 与 xoy 之间的**坐标变换**关系，如图 1-6 所示。

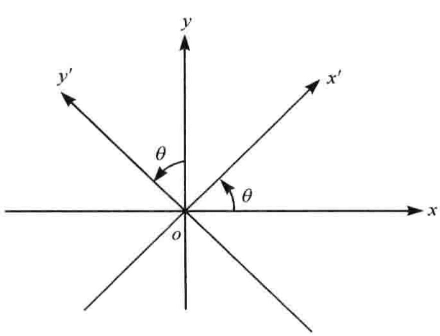


图 1-6　$x'oy'$坐标系对 xoy 坐标系的正向 θ 转动

【解】 由图 1-6 所示的几何关系，可以写出

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x + \sin\theta y \\ y' = -\sin\theta x + \cos\theta y \end{cases} \tag{1-13}$$

$x'oy'$ 和 xoy 两者之间是线性关系。在本书后边，完全可以把式(1-13)写成更为简洁的形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

式(1-4)表示二维情况下的坐标变换关系，而

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1-15}$$

就是本书后边的“主角”——**变换矩阵**。

【评注】 矩阵论给我们提供了一个十分重要的发展潜能，即把几何上难以直接表达的 n 维空间(如四维空间)很简洁地表述出来，这就造成了**矩阵是代数和几何之间的深刻交融**。

【例 1-2】 平滑曲线拟合。

在物理实验中，我们测得对应的三对物量关系：(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和 (x_3, y_3)。现在需把它们用二次抛物线表示出来，即

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1-16}$$

试求出 a、b 和 c，如图 1-7 所示。

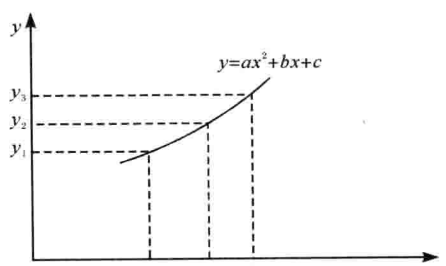


图 1-7 物理实验平滑曲线的拟合问题

【解】 根据二次抛物线式(1-16)，容易写出

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 a + x_1 b + c \\ y_2 = x_2^2 a + x_2 b + c \\ y_3 = x_3^2 a + x_3 b + c \end{cases} \tag{1-17}$$

十分明显，式(1-17)表示线性方程组，三个方程，三个未知数(a、b 和 c)。同时可写出