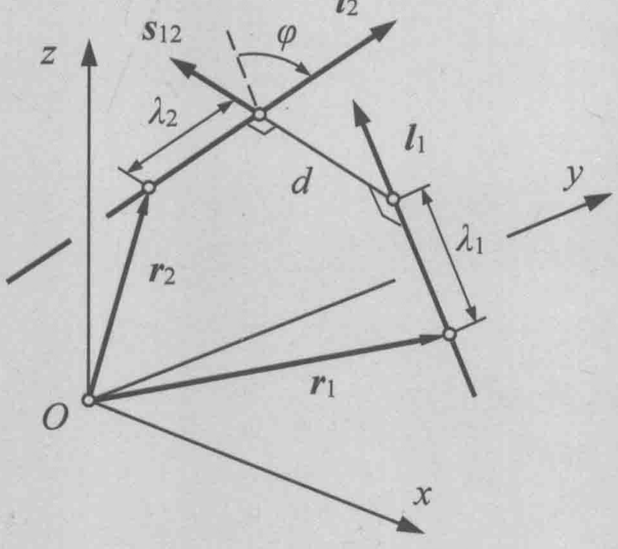
现代数学基础

42 旋量代数与李群、李代数

■ 戴建生



高等教育出版社

现代数学基础

42

旋量代数与李群、李代数

XUANLIANG DAISHU YU LIQUN、LIDAISHU

■ 戴建生

高等教育出版社·北京

内容简介

本书全面深入地讲述了旋量代数理论及其几何基础，是一本贯通旋量代数与李群、李代数理论，深入研究其内在特性与关联结构以及旋量系理论的著作。

本书起始于直线几何与线性代数，紧密联系李群、李代数、Hamilton 四元数、Clifford 双四元数、对偶数等基本概念而自然过渡到旋量代数与有限位移旋量。作者在书中首次全面深入地阐述了旋量代数在向量空间与射影几何理论下的演变与推理，提出旋量代数与李代数、四元数代数等以及有限位移旋量与李群的关联论，展现出旋量理论与经典数学及现代数学的内在联系，并总结提炼出许多论证严密、意义明确的定理。

本书以公式推导和几何演示为主体，既展现出旋量代数、李群与李代数、四元数代数及其关联论等代数理论的严谨性，又体现了射影几何、仿射几何等的直观性及旋量系理论应用的广泛性，可作为对运动几何学、机构学、机器人学与计算机图形学感兴趣的数学系与计算机科学系的研究生与高年级本科生的教学用书，也可供理工科类非数学专业的学生和有关方向的科研工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

旋量代数与李群、李代数 / 戴建生著. -- 北京：高等教育出版社，2014. 4
ISBN 978-7-04-031845-6

Ⅰ. ①旋… Ⅱ. ①戴… Ⅲ. ①旋量 - 高等学校 - 教材 ②李群 - 高等学校 - 教材③李代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 020648 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 刘占伟　　封面设计 张 楠　　版式设计 于 婕
插图绘制 尹 莉　　责任校对 李大鹏　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 22.75
字　　数 350 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014 年 4 月第 1 版
印　　次 2014 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 59.00 元

物 料 号 31845-00

献给我的祖父母、大姑母、父母亲和夫人丛建青、儿子戴明博

与本书同时发行

戴建生. (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京.

Dai, J. S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

对本书的引用可采取下面形式

Dai, J. S. (2014) *Screw Algebra and Lie Groups and Lie Algebras*, Higher Education Press, Beijing, also *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

序　言

众所周知, 三维刚体运动有三个平移自由度和三个旋转自由度, 组成六自由度的连续运动群 (六维李群). 它的李代数是所有无穷小刚体运动组成的六维向量空间, 为李群单位元处的切空间, 其中无穷小平移占有三个维数, 无穷小旋转占有另外三个维数. 这个空间的任意向量都被称为一个旋量, 通过指数映射生成一个三维刚体运动.

另一方面, 三维空间中的一条直线上的所有点都可以由其上的两点通过仿射组合得到. 相应地在三维射影空间中, 一条直线可由四维齐次坐标表示的四维线性空间上两个向量的线性扩张唯一表示; 所有这种线性扩张组成一个六维线性空间, 这就是直线的 Plücker 坐标所在的六维空间. 三维空间中的任意一条直线具有六个 Plücker 坐标, 三个表示直线的方向, 另外三个表示直线对坐标原点的矩; 它们完全确定了直线的位置和姿态.

一个经典的一一对应是建立在三维刚体运动的李代数空间与三维空间中直线的 Plücker 坐标空间之间的: 李代数中无穷小平移的三个维数正好对应于表示直线方向的三个坐标, 而无穷小旋转的三个维数正好对应于表示直线对坐标原点的矩的另外三个坐标. 由此, 表示空间运动的旋量与表示空间几何体的 Plücker 坐标天然地合为一体, 构成了旋量几何理论的基本框架.

瞬时旋量是射影李代数空间的元素, 通过指数映射可生成李群. 李群 $SE(3)$ 的伴随作用可用有限位移旋量矩阵 (也称为有限位移旋量算子) 表示,

可完成三维空间内刚体的 Chasles 运动以及旋量的坐标变换, 也可用于生成非瞬时的有限位移旋量. 本书作者建立的有限位移旋量理论实现了旋量理论由瞬时量向非瞬时量的飞跃, 也是本书贯通有限位移旋量与李群、旋量与李代数的关键所在.

在力学理论中, 旋量有时被称为螺旋量, 由爱尔兰数学家 Robert S. Ball 爵士在他相继于 1876 年和 1900 年发表的著作 *Theory of Screws* 和 *A Treatise on the Theory of Screws* 中建立. 如果将三维刚体运动的李代数空间作为一个六维线性空间, 其中的元素表示 (无穷小) 运动, 那么这个六维空间的对偶空间同样是两个三维空间张成的一个六维线性空间, 其中的元素表示动力 (力和力矩, 各占直线 Plücker 坐标的三个分量). 这两个六维空间的配对就是力相对于运动所做的功. 从数学上讲, 这些结构属于五维射影几何的范围.

事实上, 在六维线性空间中可以引入各种乘法. 一个典型的方式是由英国数学家 W. K. Clifford 在 1873 年给出的. 他引入唯一的所谓对偶元 (与任何元素的乘积具有交换性的幂零元), 在两个三维向量代数 (拥有向量的内积和叉积) 的基础上构造所谓的对偶向量代数, 它是一个六维线性空间, 具有六维对偶向量的内积和叉积结构. 一个六维对偶向量是一个普通三维向量与一个纯虚三维向量的和, 前者表示方向, 后者是由对偶元乘以另外一个三维空间的向量得到的, 表示位置 (矩). 两个直线所对应的对偶向量的乘积完全刻画了它们之间的所有几何关系, 包括夹角、公垂直线、距离等. 其后 Clifford 将对偶向量代数推广到任意维数和任意内积结构, 这就是现代微分几何中的指标定理、多复变函数论中的 Clifford 分析以及计算机图形学中的几何代数的公共基础: Clifford 代数.

三维空间中直线的 Plücker 坐标组成的集合并不是线性的, 而是五维射影空间中满足一个二次代数方程的超曲面, 因此组成一个无论是从几何还是从代数角度来看都是最简单之一的所谓不可约代数簇. 关于这一代数簇的拓扑不变量的研究激发了一系列的重要工作, 例如吴文俊示性类的发现.

向量空间理论向旋量代数延伸, 可衍生出一系列力学含义明确的运算, 为旋量系理论. 本书作者发明了比 Gauss-Seidel 消元法运算效率更高但误差阶数更低的求解齐次线性方程组的算法, 进而建立了旋量系零空间构造理论. 这一理论与作者在本书中建立的旋量系关联关系理论、旋量系分解理论、旋量系对偶理论共同构成了本书的旋量系理论.

拥有如此众多现代数学交集的旋量理论 (screw theory), 其本身具有几何概念清晰、代数运算简便、物理意义明确等特点, 从而成为机构学和机器人学的数学基础之一, 被广泛应用于力学和计算几何等领域. 在 Google 上搜索 “screw theory”, 有四千多万条相关信息.

但是, 除了 1900 年 Ball 和 1978 年 Hunt 的旋量理论英文书外, 几乎没有一部完整的叙述旋量理论方法的著作. 旋量理论的大部分内容散见于研究论文以及与机构学相关的专著中. 这对旋量理论的发展与应用十分不利.

本书作者戴建生教授为世界著名理论运动学与机构学专家, 长期从事旋量理论与机构学的研究, 对旋量理论与机构学的发展作出了许多重要贡献. 这本旋量代数理论专著由作者基于自己二十五年的研究成果, 以及十五余年在国内一些大学授课、讲座的教案和讲义整理、著述而成. 本专著详细而系统地阐述了旋量理论的几何基础与数学内涵及其与李群、李代数的关联, 结合作者自己的若干研究成果, 深入讲解了旋量代数在运动学和力学中的应用以及其几何内涵, 对于推动旋量代数在我国的发展与应用具有重要的意义.

中国科学院数学与系统科学研究院副院长

中国科学院数学机械化重点实验室主任

2013 年夏

前 言

代数、几何、分析是数学的三大支柱, 三者有着密不可分的联系. 从《周髀算经》中的 "勾股各自乘, 并而开方除之" 到古希腊的 "毕达哥拉斯定理", 从欧几里得的《几何原本》到东汉前期的《九章算术》, 几何自古以来就同以算术形式呈现的代数有着共同的渊源和联系. 这种关联在 19 世纪各个数学分支的快速发展中得到了有效的验证, 在旋量代数中得到了完美的展现.

旋量 (screw) 也被著名数学家 William Kingdon Clifford (1883) 和 Louis Brand (1947) 称为矩量 (motor). 矩量是矩 (moment) 和向量 (vector) 的合称. Spinor 的中文译名也为旋量, 与 screw 的译名相同, 虽然两个量应用在不同领域, 但有着共同的数学渊源.

Spinor 是由法国数学家 Élie Cartan 在 1913 年提出的, 由德国数学家与物理学家 Theodor Kaluza 和瑞典理论物理学家 Oskar Klein 在 20 世纪 20 年代用于原子物理学和量子力学中电子和质子内在自动量的研究. 电子旋转的三维向量以三个 2×2 的 Pauli 基本矩阵表示. 以 Dirac 旋量形式表示的 spinor 是一个包括左旋态和右旋态二分量的 Weyl 的 spinor. 其与群论关系可采用 n 阶特殊酉群 $SU(n)$ 表示, 在粒子物理中有广泛的应用. Spinor 复数表述对应于 Clifford 代数, 具有旋转与平移作用, 它与 screw 存在着内在的联系, 但目前仍局限于质点研究的应用.

与 spinor 目前用于质点研究相比, screw (旋量, 以下所称旋量均为 screw) 用于直线在空间的旋转和平移的描述, 进而用于刚体在空间的运动研究. 有

限位移旋量属于六维特殊欧几里得群 $SE(3)$, 瞬时旋量属于五维射影李代数 $se(3)$. 旋量研究应该追溯到 1763 年意大利数学家 Giulio Mozzi 提出的刚体瞬时运动轴、1806 年法国数学家及物理学家 Louis Poinsot 提出的合力中心轴定理以及 1830 年法国数学家 Michel Floréal Chasles 提出的刚体位移理论. 旋量理论研究在 19 世纪进入了鼎盛时期. 1830 年, Chasles 首次将力与运动分离, 提出空间任意运动均可表示为绕一轴的旋转和沿该轴的平移. Chasles 的研究为有限位移旋量的研究以及今天旋量矩阵的发展奠定了基础. 旋量理论研究在 19 世纪 60 年代取得了许多重大突破, 初步形成了旋量理论体系. 在这一时期, 英国数学家、皇家科学院院士 Arthur Cayley 建立了空间直线的六维坐标, 德国数学家、波恩大学数学与物理学教授 Julius Plücker 建立了 Plücker 坐标. Cayley 和 Plücker 的研究系统地总结了过去两个世纪几何学的研究成果并建立了这些成果与当时代数研究的紧密联系. 此外, Plücker 的博士研究生 Christian Felix Klein(1868 年获得博士学位) 与剑桥大学天文学家、几何学教授 Robert Stawell Ball 爵士几乎同时发现了互易旋量. Klein 的后续研究将旋距为零的旋量即线矢量由三维空间中的直线映射为五维射影空间中超二次曲面上的点, 这种五维射影空间的超二次曲面也被称为 Klein 二次曲面.

19 世纪下半叶, 欧洲经历了第二次工业革命, 数学领域研究不断推进. 在这一大环境下, 几何与代数的研究出现了几次重大突破. 其中具有代表性的是剑桥大学天文学家和几何学家、英国皇家科学院院士、都柏林皇家科学院应用数学与机构学教授 Robert Stawell Ball 爵士针对旋量所作的系统研究. Ball 分别于 1873 年和 1876 年发表了系统研究旋量理论的文章和专著, 使旋量理论研究达到了巅峰.

与此同时, 伦敦大学数学家和力学家、英国皇家科学院院士 Clifford 在 1873 年提出对偶四元数后, 又于 1882 年系统地研究了旋量同向量、四元数与对偶四元数的关系, 总结出了著名的 “旋量表格”, 揭示了旋量与对偶四元数代数 (后来称为 “Clifford 代数”) 的关联. 关于这将近半个世纪的研究, Ball[1]在世纪之交 (1900 年) 出版的旋量专著中作了系统的表述和总结, 奠定了旋量理论的数学基础.

[1] Ball, R.S. (1900) *A treatise on the theory of screws*, Cambridge University Press, Cambridge, England.

此后不久, 由于德国数学家 Eduard Study 发明了对偶角, Felix Klein 提出了五维射影空间的超二次曲面, 旋量理论研究得以进一步发展. 综上所述, 旋量理论研究在 19 世纪下半叶和 20 世纪之初达到了高潮. 旋量理论的美妙体现在它的几何特性及其与许多数学分支的耦合和交叉, 体现在它的几何内涵以及与代数的有机融合.

旋量代数与李群、李代数的有机结合在 19 世纪中叶李代数未成形前就已经初露端倪. 19 世纪下半叶, 对旋量理论研究有突出贡献的德国数学家 Felix Klein 于 1872 年分类与挖掘了射影几何与群论的几何特性及其与许多几何分支的关联, 提出了著名的 Erlangen 纲领[2], 从而同挪威数学家 Marius Sophus Lie 一起奠定了李群和李代数的基础. Klein 在研究李群和李代数的同时对互易旋量以及超二次曲面做了大量研究[3], 因此他具有通晓旋量代数与李群、李代数理论的优势, 进而将群论研究合理地扩展到了旋量的几何研究领域. 这些理论的关联也可从 Clifford 的研究中得到启示, 在 Clifford 的理论中, 瞬时旋量被视为李代数的一部分.

在经历了两次世界大战后, 旋量理论研究开始复苏. 1947 年, 美国 MD Anderson 杰出数学家 Brand[4]系统地研究了旋量的运算, 出版了向量和张量分析方面的专著. 该书第二章为矩量 (泛旋量) 代数, 提出了旋量的运算规则. 这些研究从 20 世纪 60 年代起得到了机构学研究者的重视. 首先苏联的机构学专家 Dimentberg[5]发表了相关的研究论文, 随后澳大利亚莫纳什大学机构学教授 Kenneth Hunt[6]于 1978 年出版了机构运动几何学方面的专著, 荷兰数学家 Oene Bottema 和斯坦福大学机构学教授 Bernard Roth[7]于 1979 年出

[2]Klein, F. (1872) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Mathematische Annalen*, **43**(1893): 63-100, also: *Gesammelte Abh.* **1**, Springer (1921), 460-497; English translation by Haskell, M.: Comparative review of recent researches in geometry, *Bull. N.Y. Math*, Soc **2** (1892—1893), 215-249, http://arxiv.org/abs/0807.3161.

[3]Klein, F.(1908) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*; *Teil II, Geometrie*, B.G. Teubner, Leipzig; English translation: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Part I: arithmetic, algebra, analysis; Part II: geometry*, Dover (2004), New York.

[4]Brand, L. (1947) *Vector and tensor analysis*, 7th printing (1958), John Wiley & Sons, Inc. New York.

[5]Dimentberg, F.M. (1965) *The screw calculus and its application to mechanics* (in Russian) Izdat. Nauka, Moscow, 1965, English Translation, Foreign Technology Division, U.S. Department of Commerce, (N.T.I.S), No. AD 680-993, WP-APB, Ohio.

[6]Hunt, K.H. (1978) *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, Oxford.

[7]Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical kinematics*, North-Holland, Amsterdam.

版了理论运动学方面的专著, 加利福尼亚大学欧文分校机构学教授 Michael McCarthy[8]于 1990 年出版了介绍理论运动学的著作, 佛罗里达大学机构学教授 Joseph Duffy[9]于 1996 年出版了旋量平面机理与应用方面的专著. Hunt 的专著首次从机构学家的角度审视和分析了旋量, 系统地提出了旋量系并阐述了其应用. Bottema 和 Roth 的专著展示了理论运动学的丰厚数学基础, 独到地将理论运动学与现代数学关联起来. McCarthy 的专著用简洁的语言介绍了与理论运动学相关的数学知识, 建立了四元数与机构学的紧密联系, 并以此进行了机构综合. Duffy 的专著将旋量几何与具体的机构相关联, 从而展现了 Jacobian 矩阵及其逆矩阵的几何含义. 在此之后, 在国际上有关旋量理论或理论运动学的专著只有 2004 年的亚利桑那大学机构学教授 Joseph Davidson 与 Kenneth Hunt[10]合著的《旋量理论与机器人学》一书.

随着 20 世纪下半叶现代数学的爆炸式发展, 国际数学界与机构学界对旋量的研究成果已经出现在许多李群、李代数、微分流形的专著中. 许多研究 Clifford 代数的文章也直接或间接地研究旋量代数. 同时, 随着机器人学研究热潮的兴起, 旋量受到许多机器人学专家的青睐. 国际上几乎三分之一以上研究机器人学与机构学的文章采用旋量方法, 许多研究机器人的书籍也经常用到旋量, 可以说, 旋量已成为机器人研究的重要工具. 进入 21 世纪后, 旋量理论的研究又出现了新的飞跃, 并与李群、李代数的研究紧密融合.

我对旋量理论的青睐始于对数学的钟爱. 记得第一次感受到数学的美妙是在 1967 年至 1968 年年间. 那时, 我无意间邂逅了父亲珍藏的 50 年代的旧皮发黄、晦涩难懂的因式分解书. 在大量变量交错的题目中, 逐渐找出相同变量, 提取公因式, 再重新组合. 那些问题看似繁琐难解, 但最终的答案总能显示出优美与对称, 如同诗词的对仗, 韵律的协畅. 在 1969 年的中学复课到 1972 年的高中期间, 我爱上了三角函数和解析几何, 几何的对称与美妙将我引进了数学的殿堂. 1978 年到 1984 年在上海交通大学进行本科和硕士研究生学习期间, 我对定理推导的严谨性和解题过程的完美性感触颇深, 对数学的理解和体会也提升到了一个新的境界. 线性代数的完整理论, 矩阵推算的内在关联以及几何演变的空间机理使我如痴如醉.

---

[8]McCarthy, J.M. (1990) *An introduction to theoretical kinematics*, The MIT Press, London.

[9]Duffy, J. (1996) *Statics and kinematics with applications to robotics*, Cambridge University Press, New York.

[10]Davidson, J.K. and Hunt, K.H. (2004) *Robots and screw theory: Applications of kinematics and statics to robotics*, Oxford University Press, New York.

1989 年, 我来到英国 Salford 大学进行旋量理论研究, 采用直线几何学和旋量理论解决抓持的无摩擦和有摩擦问题, 并拜读了熊有伦院士推荐的 Rockafellar[11]的关于凸集论方面的著作, 深有感触. 英国 Salford 大学在 20 世纪 90 年代初对旋量理论的研究十分活跃, 是英国乃至欧洲研究旋量理论的中心. 由 John Sanger 教授和 David Kerr 博士牵头的机构学中心经常组织学术研讨会, 不断地有国际旋量理论专家访问. 在这期间, 我多次聆听了 Joseph Duffy 教授的旋量理论讲座, 参与了开放大学 Joseph Rooney 博士的代数空间的研讨班, 与 Joseph Davidson 教授谈及有限位移旋量, 同澳大利亚机构学专家 Jack Phillips 教授讨论位移旋量流形, 向俄勒冈大学机构学专家 Gene Fichter 教授讲述旋量系关联关系. 这是一个学术思想极其活跃的时期. 在这一时期, 我经常接触到旋量研究的前沿理论.

这些前沿理论以及在抓持理论研究和机构设计中所遇到的问题,将我带入经典论著的海洋. 我经常夜深人静时还在牛顿大楼里津津有味地翻读着一些数学和旋量理论领域的经典著作, 内容涵盖 20 世纪 20 年代 Woods[12]的高等几何, 40 年代 Brand[4] 的张量分析, 50 年代 Maxwell[13]的齐次空间, 60 年代 Dimentberg[5] 的旋量论, 70 年代 Hunt[6] 的机构运动几何、Bottema 与 Roth[7] 的理论运动学以及 Strang[14]的关于向量空间与正交子空间理论的线性代数, 80 年代 Duffy[15]的机构几何轨迹分析, 90 年代 McCarthy[8] 的理论运动学简介以及 Murray、Li 和 Sastry[16]的机器人操作数学基础. 通过这些经典著作以及 20 世纪六七十年代 Yang 与 Freudenstein[17]、Woo 与 Freudenstein[18]发表的许多旋量文章, 我深深感受到, 旋量理论能够凭借其自身发展的严谨性、学科交融的跨越性以及在机构学与机器人学方面的实用性在一个三维实体空间和抽

---

[11] Rockafellar, R.T. (1970) *Convex analysis*, Princeton, New Jersey.

[12] Woods, F.S. (1922) *Higher geometry, an introduction to advanced methods in analytic geometry*, Ginn and Company, New York.

[13] Maxwell, E.A. (1951) *General homogeneous coordinates in space of three dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Strang, G. (1976) *Linear algebra and its applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc. Philadelphia.

[15] Duffy, J. (1980) *Analysis of mechanisms and robot manipulators*, John Wiley and Sons, New York.

[16] Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC Press, New York.

[17] Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME J. Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.

[18] Woo, L. and Freudenstein, F. (1970) Application of line geometry to theoretical kinematics and the kinematic analysis of mechanical systems, *ASME J. Mechanisms*, **5**: 417-460.

象的六维空间及五维射影空间中迸发出无限的魅力, 令人寻味无穷. 许多经典的机器人学理论, 诸如 20 世纪 80 年代 Paul[19]的齐次变换与机械臂 RPY 旋转理论以及 Craig[20]的机械臂姿态多种描述与变换理论为旋量代数提供了应用的领域和驰骋的疆野.

本书作者在过去三十余年的研究及近十五年与国内诸多大学教师与学生的交流中发现, 大家都在寻找一部完整、系统地研究旋量理论及其代数方法的教材或专著. 本书基于作者二十五年在英国的研究成果, 加之近十五年在国内一些大学的授课、讲座和交流的讲稿, 系统而深入地阐述旋量理论的数学基础及其代数方法. 全书从直线几何、射影几何与向量代数出发, 循序渐进、由浅入深地对旋量代数、李群与李代数、四元数及其关联论的相关概念、理论和公式进行了仔细推敲、系统推导以及详尽论述, 旨在将复杂而高深的旋量理论清晰地展现在读者眼前, 并在此基础上将其升华为简洁、优美、实用的数学公式与推理, 从而回归到数学的内涵本质上. 本书同时巧妙地应用经典数学理论, 展现这些经典理论与现代数学的内在联系, 深入浅出地引领读者到旋量代数及其与李群、李代数的关联研究的深处.

本书是基于射影几何、仿射几何及向量代数与矩阵内在特性研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论以及旋量系理论的专著. 本书基于旋量的几何内涵首次深入系统地阐述旋量代数的推理运算, 揭示旋量代数与李群、李代数的内在关联, 提出并建立涵盖旋量代数、李群和李代数与四元数代数的关联论以及贯通旋量代数与机构学、机器人学应用的旋量系理论, 旨在满足国内学者与学生长期以来对详细介绍旋量代数及其几何内涵的教材和论著的需求.

本书第一章为绪论, 介绍旋量与李群、李代数的发展史及相互关系. 第二章基于向量空间讲述旋量代数的几何基础, 介绍直线几何的点、线、面特性与其对偶规律, 揭示运动几何、射影几何与旋量代数的关联关系, 以及射线坐标与轴线坐标及其对偶性. 第三章阐述旋量代数及其在李代数中的理论基础以及几何内涵, 展示旋量代数的各种运算规则和方法, 全面介绍与引进旋量、速度旋量与力旋量, 从几何本质和代数角度阐述旋量代数知识及其相关的李代数 $so(3)$ 和 $se(3)$.

[19] Paul, R.P. (1981) *Robot manipulators: Mathematics, programming and control*, MIT press, Cambridge, MA.

[20] Craig, J.J. (1986) *Introduction to robotics: Mechanics and control*, Addison-Wesley, Reading, MA.

基于旋量代数及其几何含义, 在第四章和第五章中, 本书将旋量代数推广到矩阵理论及其与代数运算的关联关系与几何本质, 介绍刚体位移与 Rodrigues 参数以及与 Hamilton 四元数和 Clifford 对偶四元数的关联关系以及有限位移旋量的几何内涵与数学基础, 展现经典数学理论同旋量代数和刚体运动的内在联系与相互作用, 通过这些相关基础理论深入地剖析旋量矩阵与有限位移旋量的内在关联及其相关的李群 $SO(3)$ 和 $SE(3)$. 第五章阐述有限位移旋量与李群的内在关联, 讲解刚体位移中的 Chasles 运动, 从几何内涵揭示旋量矩阵的特性, 特别是其副部即对偶部特性, 并提出基于矩阵分解的旋量矩阵迹. 通过阐述对应于旋量特征值的有限位移旋量, 给出旋量矩阵的微分, 引出有限位移旋量与李代数的关联关系. 在第四、第五两章中, 本书首次展现出旋量理论与经典数学的关联关系, 并采用框图和年代表揭示出它们的内在联系和发展历史.

本书前五章起始于线性代数, 由几何基础自然过渡到旋量代数与旋量矩阵, 紧密联系李群和李代数, 并将这些数学理论与刚体运动关联, 提出旋量代数与李群、李代数的关联论, 演示数学理论的几何内涵. 在此基础上, 本书第六章、第七章和第八章系统地阐述旋量系理论, 尤其是旋量代数和旋量系理论在旋量矩阵以及向量空间中的应用和演变.

本书第六章通过互易特性和线性相关性的几何意义与物理含义进一步阐述旋量系相关知识, 探讨旋量特性、旋量组合以及旋量线性相关性, 讲解机构运动学和静力学中的旋量系及其组合. 第七章自然过渡到旋量系与其互易旋量系之间的关联关系, 建立旋量系互易特性的代数模型, 从而引入集合论以提出旋量系关联关系的一般理论. 在此基础上, 本章讲解一阶旋量系、二阶旋量系和三阶旋量系以及高阶旋量系, 并阐述它们的几何本质与物理含义. 本章最后介绍一种通过求解旋量系互易基构造其互易旋量系的新方法.

本书第八章应用旋量矩阵探索旋量空间的算法和零空间, 讲解旋量代数的子空间、子空间分析及其在一维零空间和多维零空间的构造. 在引入移位分块法与逐级扩展法后, 给出求解互易旋量系的步骤和公式. 本章采用递归分块与逐级扩展的方法总结出一套求取旋量系零空间的算法. 本章进一步将理论与公式应用到齐次线性方程求解, 提出新的齐次线性方程组的求解法则, 并给出相对于 Gauss-Seidel 消元法的精度比较与效率比较. 这种求解法则比 Gauss-Seidel 消元法在精度上高一阶, 在算法上减少许多运算, 节省运算时间.

本书第九章将旋量系理论发展到旋量系分解, 尤其是约束旋量系的分解, 阐述公共约束、冗余约束以及不同类型约束之间的相互作用, 揭示约束旋量系的关联与其对机构自由运动的制约, 研究空间机构的连接度、活动度与自由度, 演示活动度扩展准则的理论基础. 本章同时介绍并讨论旋量系的对偶性及其在串联机构、并联机构与抓持机理中的耦合关系, 并以此研究 Sarrus 机构与 Hoberman 机构.

本书九章自成体系. 它全面、系统、深入地研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论以及相关的向量代数与矩阵特性、射影几何与仿射几何等数学理论, 揭示相关代数理论的几何内涵, 为空间机构与机器人分析和设计提供雄厚的几何基础与充分的数学依据.

本书内容涉及仿射几何与射影几何、线性代数与向量空间理论、矩阵论以及集合论, 可用于线性空间理论、机构学、机器人学、计算机科学、图形学、控制学及自动化科学等多个学科领域. 本书适合供上述相关领域的研究生、教师、科学研究人员及工程研究人员使用. 本书在数学基础方面仅涉及向量代数、线性代数、射影几何基础与有限群论基础, 可供理工科本科二年级以上对机构学与机器人学的几何基础与数学理论感兴趣的学生阅读和参考.

本书与作者的英文专著 *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*[21] 以及中文专著《机构学与机器人学的几何基础与旋量代数》[22] 同时著作而成. 作者感谢约翰 · 霍普金斯大学数学科学、计算机科学与机构学教授 Gregory Chirikjian, 杜伊斯堡 – 埃森大学机构学博士 Andreas Müller 对英文专著的逐章阅读与具体建议; 感谢加拿大拉瓦尔大学教授 Clément Gosselin、意大利博洛尼亚大学教授 Vincenzo Parenti Castelli、斯坦福大学教授 Bernard Roth 以及加利福尼亚大学欧文分校教授 Michael McCarthy 的热情支持与极力推荐.

在全书逾三年的写作过程中, 作者感谢天津大学先进机构学与机器人学中心博士生张新生对第二章至第五章的研读与校对、对第六章至第九章

[21] Dai, J.S. (2014) *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.

[22] 戴建生 (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京. 英文引用为 Dai, J.S. (2014) *Geometrical foundations and screw algebra for mechanisms and robotics*, Higher Education Press, Beijing, also *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.