

国际金融工程师协会推荐

衍生数学

数字算法设计工具

THE
MATHEMATICS
OF
DERIVATIVES

Tools for Designing Numerical Algorithms

[美] 罗伯特 L. 纳文 (Robert L. Navin) 著 姜昕 万正勇 译



机械工业出版社
China Machine Press

014057883

F830
494

衍生数学

数字算法设计工具

THE
MATHEMATICS
OF
DERIVATIVES

Tools for Designing Numerical Algorithms

[美] 罗伯特 L. 纳文 (Robert L. Navin) 著 姜昕 万正勇 译



北航

C1742553

F830
494



机械工业出版社
China Machine Press

388720110

图书在版编目 (CIP) 数据

衍生数学: 数字算法设计工具/(美) 纳文 (Navin, R. L.) 著; 姜昕等译. —北京: 机械工业出版社, 2014.7

书名原文: The Mathematics of Derivatives: Tools for Designing Numerical Algorithms

ISBN 978-7-111-47219-3

I. 衍… II. ①纳… ②姜… III. 经济数学-应用-金融产品-产品设计 IV. F830

中国版本图书馆CIP数据核字 (2014) 第144582号

本书版权登记号: 图字: 01-2013-6499

Robert L. Navin. The Mathematics of Derivatives: Tools for Designing Numerical Algorithms.
Copyright © 2007 by Robert L. Navin.

This translation published under license. Simplified Chinese translation copyright © 2014 by China Machine Press.

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system, without permission, in writing, from the publisher.

All rights reserved.

本书中文简体字版由 John Wiley & Sons 公司授权机械工业出版社在全球独家出版发行。未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 John Wiley & Sons 公司防伪标签, 无标签者不得销售。

衍生数学: 数字算法设计工具

[美] 罗伯特 L. 纳文 (Robert L. Navin) 著

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 程 琨

责任校对: 董纪丽

印 刷: 三河市宏图印务有限公司

版 次: 2014年9月第1版第1次印刷

开 本: 170mm × 242mm 1/16

印 张: 10.75

书 号: ISBN 978-7-111-47219-3

定 价: 49.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 68995261 88361066

投稿热线: (010) 88379007

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjg@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光/邹晓东



谨以此书献给

泰伊斯·罗达·诺亚 (Thais Roda Noya)

前 言

本书是基于面向专业软件设计者的金融衍生品数学知识课程的教材。本书的编写初衷也是为了我刚成立的交易分析软件公司——实时风险系统有限公司。我们开展了一项关于大型衍生品交易的业务，提供给用户操作灵活、快速的实时风险软件应用，这个应用适用于大量的衍生品产品。这个应用设计最大的特点是允许在原有软件包中“嵌入”复杂的衍生品价格模型，而不需对原有软件包进行修改以写入这些模型。

在本书的编写和使用中，我发现本书对那些有相同目的的从业者非常有用：它可以作为程序员的培训教材（甚至是针对量化分析师的培训）。当然专业的程序员不需要成为专业的“量化分析师”。但是他们也需要尽快掌握衍生品数学模型的基础知识。他们需要详尽地知道大量的细节，获得扎实的基础信息，相对而言没有过高的数学严谨性要求。

致 谢

本书所有的内容并不是原创，但是所有内容都是按照我的思路重新推导，或者按照我的记忆编排，因而只具有我的风格。而其中 8.1.1 节的简单而优雅的内容来自 O. 切蒂 (O. Cheyette) 的原创论文，关于这些内容，我没有更多的补充。有很多相关的教程可供选择：其中有约翰 C. 赫尔 (John C. Hull) 的《期权、期货及其他衍生产品 (原书第 6 版)》、乔纳森 F. 英格索尔的《金融决策理论》、达莱尔·达菲 (Darrel Duffie) 的《动态资产定价理论》，这些书中介绍的内容，也是本书会涉及的。再一次说明本书旨在使非专业人士能快速掌握金融衍生品相关的数学知识。基于深度和严密性，我极力推荐约翰 C. 赫尔的书，以及其他综合的衍生品教材。

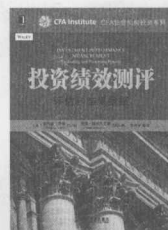
我需要感谢很多人，他们帮助我更加了解衍生品。他们是：洛杉矶 CMS 的冈纳·金哈曼和巴里·瑞恩，他们教会了我风险定价理论；从芝加哥瑞士银行的斯科特·沃尔兹、艾伯特·西昆、比尔·切尔尼、阿米塔哈·森和吉耶尔莫·巴布利克那里，我和杰夫·米勒学会 (并互相讨论) 了金融理论及其应用，包括数值计算理论。在和杰夫·米勒讨论的过程中，琼·菲利普·布沙尔的成果对我关于风险中性定价以及对冲策略的理解有着深刻的影响。我还要感谢罗西·拉什对本书初期的整

理与编辑，让本书得以出版。还要十分感谢 John Wiley & Sons 公司的帕梅拉·凡·吉森对本项目的大力支持。

我还要感谢我的同事克里斯·莱昂和尼古拉·埃文特尼弗，他们是我的“矿井中的金丝雀”，他们接受了我基于本书的演讲。

CFA协会投资系列

机械工业出版社华章公司、Wiley出版社和CFA协会非常荣幸地推出CFA协会投资系列及CFA协会机构投资系列丛书，这套丛书通过享有盛誉的学者和金融专业人士的努力，针对金融领域的重要问题提供了大量的关键资料。在每一本书中，这些善于思考的领导者在理论和实践层面针对金融问题提出了自己的洞见。这些书籍是金融研究生和从业人员的理想读物。



序号	丛书名	中文书号	中文书名	原作者	译者	定价
1	CFA协会投资系列	978-7-111-45367-3	公司金融：实用方法	Michelle R. Clayman, Martin S. Fridson, George H. Troughton	汤震宇 等	99
2	CFA协会投资系列	978-7-111-38805-0	股权资产估值(原书第2版)	Jeffrey K. Pinto, Elaine Henry, Jerald E. Pinto, Thomas R. Robinson, John D. Stowe, Abby Cohen	刘醒云 等	99
3	CFA协会投资系列	978-7-111-38802-9	定量投资分析(原书第2版)	Jerald E. Pinto, Richard A. DeFusco, Dennis W. McLeavey, David E. Runkle	劳兰珺 等	99
4	CFA协会投资系列	978-7-111-38719-0	投资组合管理：动态过程 (原书第3版)	John L. Maglinn, Donald L. Tuttle, Dennis W. McLeavey, Jerald E. Pinto	李翔 等	149
5	CFA协会投资系列	2014即将出版	固定收益证券分析(原书第2版)	Frank J. Fabozzi	汤震宇 等	99
6	CFA协会投资系列	2014即将出版	国际财务报表分析	Thomas R. Robinson, Elaine Henry, Wendy L. Pirie, Michael A. Broihahn	汤震宇 等	149
7	CFA协会投资系列	2014即将出版	投资决策经济学： 微观、宏观与国际经济学	Christopher D. Piros	韩复龄 等	99
8	CFA协会投资系列	2014即将出版	投资学：投资组合理论和证券分析	Michael G. McMillan	王晋忠 等	99
9	CFA协会投资系列	2014即将出版	新财富管理： 理财顾问客户资产管理指南	Roger C. Gibson	翟立宏 等	99
10	CFA协会机构投资系列	978-7-111-43668-3	投资绩效测评：评估和结果呈报	Todd Jankowski, Watts S. Humphrey, James W. Over	潘席龙 等	99
11	CFA协会机构投资系列	2015即将出版	风险管理：变化的金融世界的基础	Austan Goolsbee, Steven Levitt, Chad Syverson	郑磊 等	149
12	CFA协会机构投资系列	2014即将出版	估值技术：现金流贴现、收益质量、 增加值衡量和实物期权	David T. Larrabee	王晋忠 等	99
13	CFA协会机构投资系列	2014即将出版	私人财富管理：财富管理实践	Stephen M. Horan	翟立宏 等	99



北航

C1742553

推荐阅读

本系列丛书提供高端衍生品原理的基础和专业知识，它将工程思维引入金融科学研究，融现代金融学、信息技术与工程方法于一体，运用工程技术的方法设计、开发和试验各种不同类型的金融产品，创造并解决各种金融问题，满足各种市场需求，研发各种不同的风险对冲策略，对投资银行、信托公司、商业银行、保险公司、基金管理公司和证券公司等各类金融机构、金融监管部门甚至大中型企业等单位在资本市场的资金运作和分析控管将产生关键作用。



丛书名	书号	书名	定价
衍生品设计与金融创新实务丛书	978-7-111-45325-3	结构式金融产品设计与应用： 案例分析（一）	89
衍生品设计与金融创新实务丛书	978-7-111-45640-7	结构式金融产品设计与应用： 案例分析（二）	89
衍生品设计与金融创新实务丛书	978-7-111-45289-8	固定收益证券与衍生品： 原理与应用	89
衍生品设计与金融创新实务丛书	978-7-111-45405-2	利率衍生品设计原理与应用： 案例分析	69
衍生品设计与金融创新实务丛书	978-7-111-45275-1	信用挂钩产品设计与应用： 案例分析	89
衍生品设计与金融创新实务丛书	暂无	12种常见衍生证券： 原理与应用	59
金融风险管理实务丛书	978-7-111-45288-1	信用风险管理：对冲工具 与定价模型的实务运用	69
金融风险管理实务丛书	暂无	金融风险管理： 避险策略与风险值	69

目 录

前言
致谢

第一部分 模型

第 1 章 金融衍生品建模分析简介	3
1.1 引言	3
1.2 模型	3
第 2 章 预备数学工具	11
2.1 概率分布	11
2.2 n 维雅可比行列式和 n 次微分形式	14
2.3 泛函分析和傅里叶变换	16
2.4 中心极限定理	18
2.5 随机游走	19
2.6 相关性	21
2.7 双变量、多变量函数：路径积分	22

2.8 微分形式	25
第3章 随机计算	27
3.1 维纳过程	27
3.2 伊藤引理	29
3.3 变量代换的鞅	32
3.4 其他过程: 多变量的相关性	33
第4章 随机计算在金融中的应用	37
4.1 风险溢价的推导	37
4.2 欧式期权期望收益的解析公式	38
第5章 从随机过程形式到微分方程形式	43
5.1 向前和向后柯尔莫戈洛夫方程	43
5.2 布莱克-斯科尔斯方程的推导与风险中性定价	45
5.3 风险和交易策略	47
第6章 布莱克-斯科尔斯方程分析	49
6.1 布莱克-斯科尔斯方程: 一种向后柯尔莫戈洛夫方程	49
6.2 布莱克-斯科尔斯方程: 风险中性定价	51
6.3 布莱克-斯科尔斯方程: 和风险溢价定义的关系	51
6.4 货币期权的布莱克-斯科尔斯方程应用: 隐含对称性 1	52
6.5 布莱克-斯科尔斯方程应用: 隐含对称性 2	54
6.6 布莱克-斯科尔斯方程应用: 隐含对称性 3	56
第7章 利率的对冲策略	59
7.1 欧拉公式	59
7.2 利率的相关性	60
7.3 利率的期限结构对冲: 久期篮子	61
7.4 决定对冲工具的算法	63
第8章 利率衍生品: HJM 模型	65
8.1 赫尔-怀特模型的推导	65

8.2 利率衍生品的无套利定价: HJM	72
第9章 微分方程、边界条件和解	75
9.1 微分方程的边界条件和唯一解	75
9.2 热传导方程或布莱克-斯科尔斯方程的解析解	77
9.3 布莱克-斯科尔斯方程的数值解	79
第10章 信用价差	97
10.1 信用违约互换 (CDS) 和连续 CDS 曲线	97
10.2 利用连续 CDS 曲线对债券定价	100
10.3 债券和信用违约互换的运动方程	100
第11章 具体的模型	103
11.1 含有随机利率和违约的模型	103
11.2 可转换债券	105
11.3 指数期权和单只股票期权: 证券相关性交易	109
11.4 n 只股票极大值: 证券相关性交易	112
11.5 债务担保证券 (CDO): 信用相关性交易	114

第二部分 练习

第12章 习题	127
第13章 解答	133
附录 A 中心极限定理	149
附录 B 求解布莱克-斯科尔斯方程的格林函数	153
附录 C 离散布莱克-斯科尔斯方程的冯诺依曼稳定性方法的展开 ..	155
附录 D 给定相关违约概率的联合多债券生存概率	157
参考文献	162

第一部分

模 型



- 第 1 章 金融衍生品建模分析简介
- 第 2 章 预备数学工具
- 第 3 章 随机计算
- 第 4 章 随机计算在金融中的应用
- 第 5 章 从随机过程形式到微分方程形式
- 第 6 章 布莱克-斯科尔斯方程分析
- 第 7 章 利率的对冲策略
- 第 8 章 利率衍生品：HJM 模型
- 第 9 章 微分方程、边界条件和解
- 第 10 章 信用价差
- 第 11 章 具体的模型

第1章



金融衍生品建模分析简介

1.1 引言

如何对金融衍生品建模分析？

量化金融工程师 (desk-quant)、量化编程人员、量化交易、风险分析员等这些从业者在工作中常常接触到金融衍生品的交易、衍生品的风险控制或者审计等相关业务。所以他们需要回答这个问题。答案中包含了很完备的数学模型和先进技术。但是在实际工作中，这些从业者并不能全面深入地掌握衍生品定价的基础知识，不得不放弃数学上的安全性和严谨性。他们可以求助于其他具有扎实数学背景的团队或者风险控制部门，使用他们提供的更加安全精准的工具，而不需要了解其背景。但是事实上对于量化金融工程、量化编程人员和交易员而言，他们无需如此。本书的目的就是帮助这些读者能够快速掌握相关知识。

这一章介绍衍生品建模和定价中最典型而又重要的两个问题，并且启发性地利用股票的定价模型来阐述第一个问题，同时简单地实现第二个问题。本书的剩余章节将详细介绍这两个问题所需的所有数学工具以及其他相关内容。

1.2 模型

1.2.1 什么是衍生品

金融衍生品中典型的一种是股票期权。股票的看涨期权就是一个金融合约。一般来说，它是在交易所交易的证券，这一点和股票十分相似。它代表了

一种权利，而并不是一种义务。它提供给持有者在某个给定的日期（一般称为到期日）以一个约定的价格（行使价）购买某只股票的权利。而这个到期日和行使价都是合约双方在交易日时提前约定的。同样，看跌期权也是一种权利，使持有者可以在到期日以行使价卖出某只股票，但这种卖出的行为并不是一种义务。根据看涨或看跌期权的条款进行买卖股票的行为被称为行权。美式期权可以在到期日之前的任意一天行权，然而欧式期权只能在到期日当天行权。

图 1-1 显示的是一个看涨期权在到期日的内在价值。内在价值是该期权相关的股票市场价格（在期权到期之前，显然无法得到这个信息）的一个函数。所以如果到期日当天市场上这只股票的交易价格高于该合约所约定的行使价，持有者会行使该合约以低于市场价的价格购买该股票，通过行使价和市场价之间的差价获利。如果到期日当天的市场价格低于行使价，这个期权则毫无价值。图表中的内在价值显然是这个期权在到期时的公允价格。而在到期日前的任意一个时刻公允价格几乎都不相同。例如，在到期日前存在一个低于行使价的很小但非 0 的公允价值，代表了现实中可能存在一个小概率事件，使得这只股票在到期日的市场价会高于行使价。

一般来说，金融衍生品，或者更广泛概念——未定权益是指一种证券，该证券的价格依赖于其他证券。而这个决定该衍生品价格的另一证券则是该衍生品的标的证券。在某些情况下可能会存在不止一种的标的证券。例如，期权包含某种选择，我们可以断言在期权中至少存在两种标的证券。

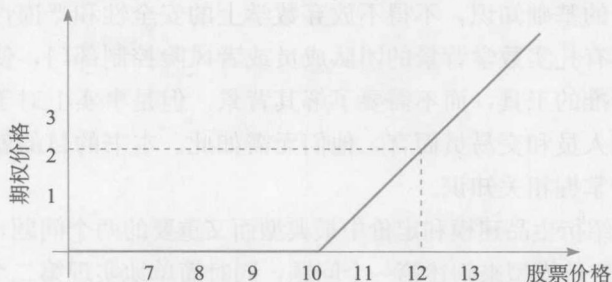


图 1-1 显示行使价为 10 的看涨期权的价格是其标的股票到期日价格的一个函数

衍生品提示^①：

读者需要区分衍生品和下面这个数学上的概念：函数的导数，它指的是一个函数，当其一个变量发生变化时，该函数的变化率。在金融衍生品的讨论中经常也会涉及导数的概念，它们可能出现在同一个句子中。

① 英文中衍生品和导数的单词是同一个。——译者注

1.2.2 模型介绍

最典型的期权定价模型是布莱克-斯科尔斯公式（见图 1-2），用于计算不含股息的股票欧式期权的理论公允价格。为了得到该期权的公允价格，必须知道如下信息：期权类型是看跌还是看涨、当前股票价格、期权的行使价、到期日、该股票从当日到到期日的未来平均波动率（如股票日收益率的标准差）、从今天至到期日为止的无风险利率当前的市场价（一般是由债券价格或大型银行之间的互换利率决定的）。

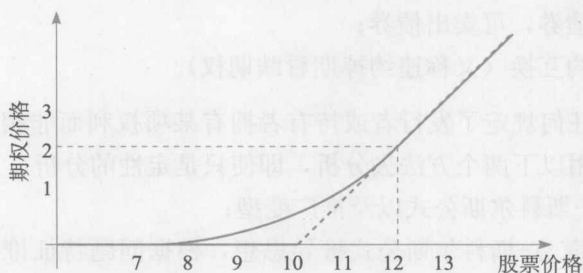


图 1-2 到期日行使价为 10 的期权价格与标的股票的当前价格的函数关系

在推导该公式之前，先了解模型的基本假设。本书后面会详尽地讨论这些假设的细节内容。正是这些假设决定了模型本身。假设的不同之处往往决定了模型之间的差别。布莱克-斯科尔斯公式是由如下假设构成的：

- 股票价格的变动是一个随机过程，这意味着这些变化是随机的但是遵循某种分布。
- 股票价格的变动是连续的。计算价格变动平均方差时，选取的时间间隔越短，则该值越小。
- 股票价格变动只与当天的股票价格以及当天的其他信息相关，而与历史价格或其他变量无关。（具有这种性质的模型被称为马尔科夫模型。）
- 股票价格收益率（如变动百分比）满足正态分布或钟形曲线分布，均值为该股票的增长百分比。

1.2.3 衍生品建模的两种基本方法

布莱克-斯科尔斯公式以及它的简单变形可以直接用于很多期权或其他衍生品的定性甚至定量的分析；如果缺少相关的技术，在面对现实中复杂问题的时候，其背后的推导机制和思路也能为定价分析提供框架和指导。