数学分析参攷资料

第五册

华南师范学院数学系函数論教研室编

一九八〇年二月

目 录

第Ⅷ篇　广义积分与带参变量的积分

第二十四章　广义积分

§1、广义积分的问题：

1 计算下列无穷积分

(1) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$

解： $\because \int_1^u \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^u \ln x\, d(-\frac{1}{x})$

$$= -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^u + \int_1^u \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{u}\ln u + (-\frac{1}{x})\Big|_1^u$$

$$= -\frac{1}{u}\ln u - \frac{1}{u} + 1$$

$\therefore \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{u\to\infty}(-\frac{1}{u}\ln u - 1/u + 1)$

$$= 1$$

(2) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

解： $\because \int_0^u \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int_0^u (\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3})dx$

$$= [\ln(x+2) - \ln(x+3)]\Big|_0^u$$

$$= \ln\frac{u+2}{u+3} - \ln\frac{2}{3}$$

$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

$$= \lim_{u\to\infty}(\ln\frac{u+2}{u+3} - \ln\frac{2}{3})$$

$$= -\ln\frac{2}{3}$$

$$= \ln\frac{3}{2}$$

(3) $\int_0^\infty \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}$

解： $\because \int_0^u \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x} = \int_0^u \frac{\mathrm{ch}\,x\,dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \int_0^u \frac{d\,\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{sh}^2 x}$

$$= \mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{sh}\,u$$

$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x} = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x} = \lim_{u\to\infty}(\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{sh}\,u) = \frac{\pi}{2}$

(4) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)}$

解：$\because \int_{e^2}^{u} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)} = \int_{e^2}^{u} \frac{d\ln x}{\ln x \ln^2(\ln x)}$

$$\xlongequal{令 t=\ln x} \int_{2}^{\ln u} \frac{dt}{t\ln^2 t}$$

$$= \int_{2}^{\ln u} \frac{d\ln t}{(\ln t)^2}$$

$$= -\frac{1}{\ln t}\Big|_{2}^{\ln u}$$

$$= -\frac{1}{\ln\ln u} + \frac{1}{\ln 2}$$

$\therefore \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)} = \lim_{u\to\infty} \int_{e^2}^{u} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)}$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln\ln u} + \frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

(5) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$

解：$\because \int_0^{u} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}(-a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}\Big|_0^{u}$

$$= \frac{e^{-au}(-a\cos bu + b\sin bu)}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}$$

$\therefore \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^{u} e^{-ax}\cos bx\,dx$

$$= \lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{-au}(-a\cos bu + b\sin bu)}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}\right]$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}.$$

(6) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$

解：$\because \int_0^{u} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \int_0^{u} \frac{x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{u}\left[\frac{x}{1-\sqrt{2}x+x^2} - \frac{x}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right]dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{u}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right]dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int_0^{u}\frac{(2x-\sqrt{2})dx}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}\,dx}{1-\sqrt{2}x+x^2} - \int_0^{u}\frac{(2x+\sqrt{2})dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right.$$

$$\left. + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}\,dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1-\sqrt{2}x+x^2}{1+\sqrt{2}x+x^2}\Big|_0^{u} + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}\,dx}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1-\sqrt{2}u+u^2}{1+\sqrt{2}u+u^2} + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx + \int_0^{u}\frac{\sqrt{2}\,dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left\{ \ln \frac{1-\sqrt{2}u+u^2}{1+\sqrt{2}u+u^2} + [\,2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(x-\tfrac{\sqrt{2}}{2})\right.$$

$$\left. + 2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(x+\tfrac{\sqrt{2}}{2})]\Big|_0^u \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left\{ \ln \frac{1-\sqrt{2}u+u^2}{1+\sqrt{2}u+u^2} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(u-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) + 2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(u+\tfrac{\sqrt{2}}{2})\right\}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1-\sqrt{2}u+u^2}{1+\sqrt{2}u+u^2} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(u-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) + 2\mathrm{arctg}\sqrt{2}(u+\tfrac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

(7) $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

解：$\because \int_0^u \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = \int_0^u x\,d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

$$= \frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^u - \int_0^u \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \frac{u}{1+e^{-u}} - \int_0^u \frac{1}{1+e^{-x}}dx$$

$$\xlongequal{令t=e^{-x}} \frac{u}{1+e^{-u}} - \int_1^{e^{-u}} \frac{1}{1+t}\cdot\left(\frac{-1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{u}{1+e^{-u}} + \int_1^{e^{-u}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{u}{1+e^{-u}} + [\ln t - \ln(1+t)]\Big|_1^{e^{-u}}$$

$$= \frac{u}{1+e^{-u}} - u - \ln(1+e^{-u}) + \ln 2$$

$$= \frac{-ue^{-u}}{1+e^{-u}} - \ln(1+e^{-u}) + \ln 2$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left\{\frac{-ue^{-u}}{1+e^{-u}} - \ln(1+e^{-u}) + \ln 2\right\}$$

$$= \ln 2$$

(8) $\int_0^\infty \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

解：对 $\int_0^u \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

令 $\sqrt{1+x^2} = t - x \quad \therefore t = \sqrt{1+x^2} + x$

则 $x = \frac{t^2-1}{2t}$

$$\therefore dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{1+x^2}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$$

$$\therefore \int_0^u \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{u+\sqrt{1+u^2}} \frac{(t^2+1)/2t^2}{\left[2\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2+1\right]\cdot\frac{t^2+1}{2t}}\,dt$$

$$=\int_0^{u+\sqrt{1+u^2}} \frac{2t}{t^4+1}\,dt=\operatorname{arctg} t^2\Big|_1^{u+\sqrt{1+u^2}}$$

$$=\operatorname{arctg}(u+\sqrt{1+u^2})^2-\pi/4$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(u+\sqrt{1+u^2})^2-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

2．利用递推公式计算下列无穷积分

(1) $I_n=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$

解：$\because \int_0^u x^n e^{-x}\,dx=-x^n e^{-x}\Big|_0^u+n\int_0^u x^{n-1}e^{-x}\,dx$

$\quad =-u^n e^{-u}+n\int_0^u x^{n-1}e^{-x}\,dx$

令 $u\to+\infty$ 则 $I_n=nI_{n-1}$

$\therefore I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots\cdots=n!\,I_0$

而 $I_0=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\,dx$

$\quad =\lim_{u\to\infty}(-e^{-x}+1)=1$

$\therefore I_n=n!$

(2) $I_n=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

解： 令 $x=\operatorname{tg} t$

则 $\int_0^u \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}=\int_0^{\operatorname{arctg} u}\cos^{2n-1}t\,dt$

$\overset{(注)}{=}\frac{1}{2n-1}\sin t\cos^{2n-2}t\Big|_0^{\operatorname{arctg} u}+\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\operatorname{arctg} u}\cos^{2n-3}t\,dt$

$=\frac{1}{2n-1}\sin(\operatorname{arctg} u)\cos^{2n-2}(\operatorname{arctg} u)+\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^u\frac{dx}{(1+x^2)^{(n-1)+1/2}}$

令 $u\to+\infty$ 则 $I_n=\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-1}$

$\therefore I_n=\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-1}=\cdots\cdots=\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}I_1$

$\quad =\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}I_1$

而 $I_1=\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\lim_{u\to\infty}\int_0^u\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\lim_{u\to\infty}\int_0^{\operatorname{arctg} u}\cos t\,dt$

$= \lim_{u\to\infty} [\sin(\operatorname{arctg} u)] = 1$

$\therefore \quad I_n = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

注：由吉大《数分》上册 P114 习题 2(2)，解答应《数学分析参考资料》第 0 册 P99

---

§2 无穷积分

1 研究下列无穷积分的收敛性

(1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

解：$\because \quad \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} > 0$ （当 $x\in[1,+\infty)$ 时）

且 $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = 1$

而 $\alpha = \frac{5}{3} > 1$ 由定理 4 知积分收敛。

(2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+10000}$

解：$\because \quad \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+10000} > 0$ （当 $x\in[0,+\infty)$）

且 $\lim_{x\to\infty} x \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+10000} = \frac{1}{2}$

而 $\alpha=1$ 由定理 4 知积分发散

(3) $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx \qquad (n\geq 0)$

解：当 $0\leq x<+\infty$ 时 $\quad \frac{x^m}{1+x^n}\geq 0$

又 $\lim_{x\to+\infty} x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n} = 1$

由定理 4 知

当 $n-m>1$ 时，即 $n>m+1$ 时，积分收敛。

当 $n-m\leq 1$ 时 即 $n\leq m+1$ 时，积分发散。

(4) $\int_0^{\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$，其中 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 是次数分别为 m 和 n 的互素多项式。

解：当 $P_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有零点时，此时超出本节研究范围。

故不妨设 $P_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内无零点（或设 $P_n(x)$ 最多只能有负根）又当 x 足够大时 $P_m(x)$、$P_n(x)$ 均为常号的。

$\therefore$ 不妨设 $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)} \geqslant 0$

（若 $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)} \leqslant 0$ 则 $-\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)} \geqslant 0$）

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} \dfrac{P_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{a_m}{b_n} > 0$ （由 $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)} \geqslant 0$，知 $\dfrac{a_m}{b_n} > 0$）

这里 a_m 为 $P_m(x)$ 最高次数项的系数。

b_n 为 $P_n(x)$ 最高次数项的系数。

由定理4知：当 $P_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点（或设 $P_n(x)$ 最多只能有负根），且：

当 $n-m>1$ 即 $n>m+1$ 时，积分收敛。

当 $n-m\leqslant 1$ 即 $n\leqslant m+1$ 时，积分发散。

(5) $\int_0^{\infty} x^{10000} e^{-\frac{x}{10000}}\,dx$

解：当 $0\leqslant x\leqslant+\infty$ 时，$x^{10000} e^{-\frac{x}{10000}} \geqslant 0$

又 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot x^{10000} \cdot e^{-\frac{x}{10000}} = 0$

而 $\alpha = 2 > 1$，$\therefore$ 积分收敛。

(6) $\int_2^{\infty} \dfrac{dx}{x^p \ln^q x}$

解：①当 $p>1$，q 任意时

可取足够小的 $\varepsilon>0$，使 $p-\varepsilon>1$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-\varepsilon} \dfrac{1}{x^p \ln^q x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\varepsilon} \ln^q x} = 0$

而 $p-\varepsilon>1$ 由定理4知积分收敛

②当 $p<1$，q 任意时

可取足够小的 $\varepsilon>0$ 使 $p+\varepsilon<1$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+\varepsilon} \dfrac{1}{x^p \ln^q x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\varepsilon}}{\ln^q x} = +\infty$

而 $p+\varepsilon<1$ 由定理4知积分发散

③当 $p=1$ 时

<1> 若 $1-q>0$ 即 $q<1$ 时

$\because \int_2^u \dfrac{1}{x^p \ln^q x}dx = \int_2^u \dfrac{1}{x \ln^q x}dx$

$= \int_2^u \dfrac{1}{\ln^q x} d\ln x = (\ln x)^{1-q}\Big|_2^u$

$= (\ln u)^{1-q} - (\ln 2)^{1-q} \longrightarrow +\infty$ （当 $u \longrightarrow +\infty$ 时）

$\therefore$ 积分发散。

<2> 若 $1-q<0$ 即 $q>1$ 时

$\because \int_2^u \frac{1}{x^p \ln^q x}dx = (\ln u)^{1-q} - (\ln 2)^{1-q}$

$\longrightarrow -(\ln 2)^{1-q}$ （当 $u \to +\infty$ 时）

$\therefore$ 积分收敛

<3> 若 $1-q=0$，即 $q=1$ 时

$\int_2^u \frac{1}{x^p \ln^q x}dx = \int_2^u \frac{1}{x\ln x}dx$

$= \ln\ln x \Big|_2^u = \ln\ln u - \ln\ln 2 \longrightarrow +\infty$

（当 $u \to +\infty$ 时）

$\therefore$ 积分发散。

综上所述，有：

当 $p>1$，q 任意时，或 $p=1$，$q>1$ 时积分收敛，其余情况积分发散。

(7) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x^{3/2} = 0$

$\therefore \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

又在 $[1, +\infty)$ 上有 $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$

而 $\int_1^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 发散

$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}dx$ 收敛

[因 $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \leq 0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

又 $\left|\int_1^u \cos 2x\, dx\right| = \left|\frac{1}{2}\sin 2x \Big|_1^u\right| \leqslant 1$ 对任意 $u>1$ 成立

由定理7知积分收敛。]

$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}dx$ 发散，即 $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$ 发散。

$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$ 也发散。

(8) $\int_1^{\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]dx$

解：$\because \ln(1+1/x) = \ln(x+1) - \ln x \xlongequal{\text{中值定理}} \frac{1}{\xi}$

$(x < \xi < x+1)$

$\therefore \frac{1}{x+1} \leqslant 1/\xi < \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1+1/x) < 1/x$$

$\therefore \quad \ln(1+1/x) - 1/(x+1) \geq 0$

且 $\ln(1+1/x) - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

而 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ 收敛。

$\therefore \quad \int_1^{\infty} [\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}] dx$ 也收敛

(9) $\int_1^{\infty} \ln(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}) dx$

解：$\because \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}) \geq \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

$\therefore \ln(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}) \geq 0$

又 $\ln(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\ln(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x})^2$

$= \frac{1}{2}\ln(1+\sin\frac{2}{x})$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2/x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\sin 2/x}\ln(1+\sin 2/x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}\cdot\ln(1+\sin 2/x)^{\frac{1}{\sin 2/x}}$

$= 1\cdot\ln e = 1$

这里 $\alpha = 1$

由定理4知积分发散

(10) $\int_2^{\infty} [\cos(\frac{e^{-1/x}}{x}) - \cos(\frac{e^{1/x}}{x})] dx$

解：$\cos(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}) - \cos(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x})$

$= 2\sin(\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{2x})\sin(\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2x}) \geq 0$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 [\cos(\frac{e^{-1/x}}{x}) - \cos(\frac{e^{1/x}}{x})]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sin(\frac{e^{1/x}+e^{-1/x}}{2x})\cdot\sin(\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{2x})}{\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} [\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{e^{1/x}+e^{-1/x}}{2x})}{(\frac{e^{1/x}+e^{-1/x}}{2x})}\cdot(e^{1/x}+e^{-1/x})\cdot\frac{\sin(\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2x})}{(\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2x})}\cdot(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 0 = 0$

而 $\alpha = 2 > 1$

$\therefore$ 积分收敛。

2．研究下列无穷积分的绝对收敛性和条件收敛（所谓条件收敛性即收敛而非绝对收敛）：

(1) $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$

解 ① $\because \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\leqslant 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

又 $\left|\int_1^u \cos x\,dx\right|=\left|\sin u-\sin 1\right|\leqslant 2$

由定理7知积分收敛，

② 对 $\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx$

$\because \left|\frac{\cos x}{x}\right|\geqslant\frac{\cos^2 x}{x}=\frac{1+\cos 2x}{2x}$

而 $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散

$\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛，（类似①）

$\therefore \int_1^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{2x}dx$ 发散

（不然若 $\int_1^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{2x}dx$ 收敛

则 $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx=\int_1^{\infty}\left(\frac{1+\cos 2x}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)dx$ 也收敛

这就与 $\int_0^{\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散矛盾）

即 $\int_1^{\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ 发散 $\therefore \int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx$ 发散

由①②知 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 是条件收敛。

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx$

解：① $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)'=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\leqslant 0$ （当 $x\geqslant 1$ 时）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=0$

又 $\left|\int_0^u \sin x\,dx\right|\leqslant 2$

由定理7知积分收敛

② 对 $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\right|dx$

因当 $x>3$ 时，$x\sqrt{x}\geqslant x+1$

即 $\frac{\sqrt{x}}{x+1}\geqslant\frac{1}{x}$

$\therefore \left|\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\right|\geqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|$

而 $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散 （证明方法类似题(1)）

$\therefore \int_0^{\infty} \left| \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1} \right| dx$ 发散

由①②知 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1} dx$ 为条件收敛。

(3) $\int_2^{\infty} x(\arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x})dx$.

解：$\because$ $(\arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x})'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{x})^2}}(-\frac{2}{x^2}) - 2\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

$$= \frac{2}{x}(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}) \leq 0$$ 当 $x>2$ 时.

$\therefore (\arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x})$ 单调下降

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x}) = 0$

$\therefore \arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x} \geqslant 0$

$\therefore x(\arcsin\frac{2}{x} - 2\arcsin\frac{1}{x}) \geq 0$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[x(\arcsin 2/x - 2\arcsin 1/x)]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin 2/x - 2\arcsin 1/x}{1/x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}})}{-\frac{3}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}}}{-\frac{3}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}\frac{-3}{(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-1})\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-4}}}{-\frac{3}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{x^3}{(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-4}}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{(1+1)\cdot1\cdot1} = 1$$

而 $\lambda = 2 > 1$

由定理4知积分收敛

由于被积函数是常正的

故也其绝对收敛

(4) $\int_a^{\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$

其中 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 是次数分别为 m 和 n 的互素多项式的多项式，且当 $x\geq a$ 时 $P_n(x)>0$

解：设 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m \quad (a_0\neq 0)$

$P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n \quad (b_0\neq 0)$

由假设 $x\geq a$ 时 $P_n(x)>0$

$\therefore \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续

下面不妨设 $a_0b_0>0$

（若 $a_0b_0<0$ 可考虑 $\int_a^{\infty}[-\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x]dx$

① 当 $n-m>1$，即 $n>m+1$ 时

$\because \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\leqslant\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|$

而 $\int_a^{\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|dx$ 收敛 （见第1(4)题）

$\therefore \int_a^{\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$ 收敛

即原积分绝对收敛

② 当 $0<n-m\leq 1$ 即 $m<n\leq m+1$ 时

(i) $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=0$

又 $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'=\frac{P_m'(x)P_n(x)-P_n'(x)P_m(x)}{[P_n(x)]^2}$

而 $P_m'(x)P_n(x)-P_n'(x)P_m(x)$ 最高次数项为

$ma_0x^{m-1}\cdot b_0x^n-nb_0x^{n-1}a_0x^m=a_0b_0(m-n)x^{m+n-1}$

$\therefore$ 当 x 足够大时，$P_m'(x)P_n(x)-P_n'(x)P_m(x)\leq 0$

$\therefore \left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'\leqslant 0$

又 $\left|\int_a^{u}\sin x\,dx\right|\leqslant 2$

由定理7知积分收敛

(ii) 对 $\int_a^{\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$

$\because \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|\geqslant\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|\sin^2x=\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,\frac{1-\cos 2x}{2}$

而 $\int_a^{\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|dx$ 发散

（取 $\alpha=n-m$，用定理4可判别其发散）

但 $\int_a^{\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|\cos 2x\,dx$ 收敛

（可参照(i)也作出证明）

$\therefore \int_a^{\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$ 发散

$\therefore \int_a^{\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$ 发散

由(i)(ii)得 $\int_a^{\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 条件收敛

③ 当 $n-m\leq 0$，即 $n\leq m$ 时

$\because a_0b_0>0$； 又 $n\leq m$

$\therefore$ 当 x 足够大时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\geqslant 1$

$\because \left|\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx\right|$

$\underline{n\text{足够大时}}\ \int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$

$\geqslant\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2}1\cdot\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

由柯西准则知 $\int_a^{\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 发散

综上①②③所述，有：

当 $n>m+1$ 时，积分绝对收敛

当 $m<n\leq m+1$ 时，积分条件收敛

当 $n\leq m$ 时，积分发散。

3．若 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，是否必有 $f(x)\longrightarrow 0$？

答：若 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则当 $x\longrightarrow+\infty$ 时，不一定有 $f(x)\longrightarrow 0$。

例： $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leq x<1 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } n-1\leq x\leq n-1+\frac{1}{n^2} \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n-1+\frac{1}{n^2}\leq x<n \text{ 时}\end{cases}$ $n=2,3\cdots$

① $\int_0^{x}f(x)\,dx\leq\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^{1+1/4}f(x)\,dx+\int_{1+1/4}^{2}f(x)\,dx$

$+\int_2^{2+1/9}f(x)\,dx+\int_{2+1/9}^{3}f(x)\,dx+\cdots+\int_{[x]+\frac{1}{[x]^2}}^{[x]+1}f(x)\,dx$

$=\int_0^1 1dx+\int_1^{1+\frac14} 1dx+\int_{1+\frac14}^2 0dx+\int_2^{2+\frac19} 1dx+\int_{2+\frac19}^3 0dx$

$+\cdots+\int_{[u]+\frac{1}{[u]^2}}^{[u]+1} 0dx$

$=1+\frac14+0+\frac19+\cdots+\frac{1}{[u]^2}+0$

$=1+\frac14+\frac19+\cdots+\frac{1}{[u]^2}$

$\because$ 级数 $1+\frac14+\frac19+\cdots+\frac{1}{[u]^2}$ 是收敛的.

$\therefore F(u)=\int_0^u f(x)dx$ 有界

又 $f(x)\geq 0$

由定理1知 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛

② 但 $x\longrightarrow+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限却不存在

因取 $x_n=n-1$ 则 $f(x_n)=1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$

$x_n'=n-1+\frac{1}{n^2}$ 则 $f(x_n')=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=0$

故由海因定理知

$x\longrightarrow+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限不存在

4. 证明：若 $f(x)$ 连续可微，$\int_a^\infty f(x)dx$ 和 $\int_a^\infty f'(x)dx$ 都收敛，则当 $x\longrightarrow+\infty$ 时必有 $f(x)\longrightarrow 0$

证：$\because \int_a^\infty f'(x)dx$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(a)]$ 存在

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

现证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

（用反证法）若不然，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$

不妨设 $A>0$

则存在 $b>a$ 使当 $x\geq b$ 时 $f(x)>\frac{A}{2}>0$

又设 $M=\int_a^b f(x)dx$；取 $u>b$

$\therefore \int_a^u f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^u f(x)dx$

$\geq M+\frac{A}{2}(u-b)$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}[M+\frac{A}{2}(u-b)]=+\infty$

$\therefore \lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx=+\infty$

即 $\int_a^\infty f(x)dx=+\infty$

这与题设 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛矛盾.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

5 证明：若 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛，$f(x)$ 为单调函数，则 $f(x)=O(\frac{1}{x})$

证：不妨设 $f(x)$ 单调下降.

① 先证 $f(x)\geq 0$

若不然有某一 x_0 使 $f(x)<0$

由单调下降性知当 $x\geq x_0$ 时.

$f(x)\leq f(x_0)<0$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^x f(t)dt$

$\leq \int_a^{x_0} f(t)dt+f(x_0)(x-x_0) \longrightarrow -\infty$ （当 $x\longrightarrow +\infty$ 时）

$\therefore$ $\int_a^{\infty} f(t)dt$ 不收敛，与题设矛盾

$\therefore$ 有 $f(x)\geq 0$

② 设 $\int_a^{\infty} f(x)dx=A$

$\because f(x)\geq 0$

$\therefore A\geq \int_a^x f(t)dt$

由单调下降性得

$A\geq \int_a^x f(t)dt\geq f(x)(x-a)\geq 0$

即 $f(x)(x-a)=xf(x)-af(x)$ 有界.

由 $f(x)$ 单调下降且 $f(x)\geq 0$ 知 $f(x)$ 有界

$\therefore$ $xf(x)$ 也有界

或 $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$ 有界

$\therefore$ $f(x)=O(\frac{1}{x})$

6. 设 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛，函数 $\varphi(x)$ 有界，则积分 $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 是否必定收敛，举出适当的例子.

若 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛，问积分 $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 的收敛性如何？

①答：若 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛，$\varphi(x)$ 有界

则 $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 不一定收敛.

例 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛 （见 P310 例6）

$\sin x$ 有界

但 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\sin x\,dx$ 即 $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 却不收敛

（这是因为 $\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$ ，

而 $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散

$\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{2x}$ 收敛　　故 $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散）

② 若 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛　$\varphi(x)$ 有界，则 $\int_a^{\infty}f(x)\varphi(x)dx$ 绝对收敛

这是因 $|f(x)\varphi(x)|\le M|f(x)|$　$(|\varphi(x)|\le M)$

故由 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛 可推得

$\int_a^{\infty}|f(x)\varphi(x)|dx$ 收敛

7、设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的连续函数，$f(0^+)$ 存在，且对一切 $A>0$ 而言，$\int_A^{\infty}f(x)/x\cdot dx$ 恒有意义，则有下面的傅茹兰尼公式：

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0^+)\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)$$

证：$\because \int_A^{u}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_A^{u}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_A^{u}\frac{f(bx)}{x}dx$

$=\int_{aA}^{au}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{bA}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt$

$=\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{bA}^{au}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{bA}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt$

$=\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt$

又由 $\int_A^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 恒有意义，依无穷积分的柯西准则

有 $\lim\limits_{u\to\infty}\int_{au}^{bu}\frac{f(x)}{x}dx=0$

$\therefore \int_A^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_A^{u}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}dt\right]$

$=\int_{aA}^{bA}f(t)/t\cdot dt$

$=f(\xi)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{t}dt$

$=f(\xi)\ln t\Big|_{aA}^{bA}$

$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}$　　这里 $\xi\in[aA,bA]$

$\because \int_A^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(\xi)\ln\frac{b}{a}$

令 $A\to 0$　$\therefore \xi\to 0^+$

$\therefore \int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0^+)\ln\frac{b}{a}$。