中央民族大学“211”工程项目

脉冲微分方程与模型构建

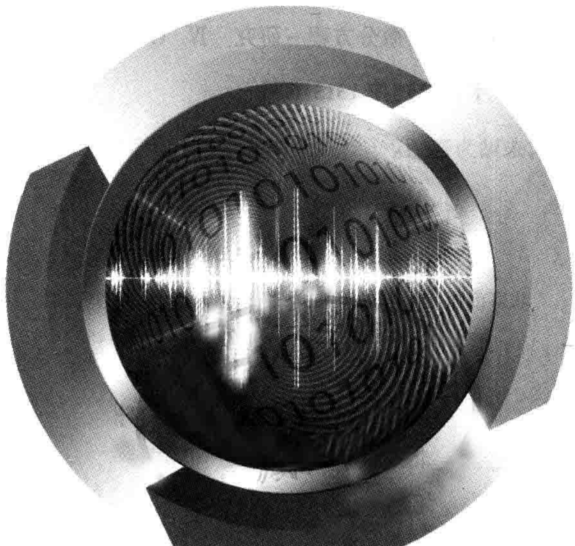
□ 蔡果兰/著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

中央民族大学"211"工程项目

脉冲微分方程与模型构建

蔡果兰 著



中国科学技术出版社

·北 京·

内 容 提 要

本书是作者近年来研究工作的总结。主要内容包括:基于拓扑度理论的共振、非共振条件下二阶脉冲微分方程几类边值问题正解存在性的研究;不动点定理的推广及在脉冲微分方程边值问题中的应用; Hammerstein 脉冲微分积分方程边值问题及微分方程模型构建。书中重点展示了几类新的研究对象以及新的研究视角和方法,首次给出了脉冲微分方程各类边值问题的 Green 函数。

本书可作为数学及相关专业的教材,也可供有关科研人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

脉冲微分方程与模型构建/蔡果兰著.—北京:中国科学技术出版社,2011.8

ISBN 978-7-5046-5891-3

Ⅰ.①脉… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①微分方程-研究 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131316 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:010-62173865 传真:010-62179148
http://www.cspbooks.com.cn
中国科学技术出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:11 字数:260 千字
2011 年 7 月第 1 版 2011 年 7 月第 1 次印刷
定价:35.00 元
ISBN 978-7-5046-5891-3/O·155

前　言

常微分方程是应用性很强的数学分支，它以各类常微分方程模型为研究对象，通过数学推导，给出求解的一般方法和相应结果，讨论有解的条件和解的性态，关注数学推理所得解在实际应用中的合理性。由于常微分方程与实际问题的密切联系，随着科学技术的发展，理论体系得到进一步完善和提升。

近些年，随着微分方程理论在应用领域的进一步深化，新兴交叉学科、边缘学科（如生物数学、生态数学等）的不断产生和发展，一个新的微分方程领域——脉冲微分方程受到国际国内学者们的广泛关注。就理论而言，脉冲微分方程理论研究已经取得了很大进展，学者们也相继出版了一些专著，但就整个理论体系而言还存在一定的研究断层和研究空间。就应用而言，虽然常微分方程已经成为解决实际问题的重要数学模型。但是，常微分方程模型要求系统本身的状态是依时间而连续的，建立模型要求假设研究对象在研究时段依时间而连续，也即，不能有突发事件或人为干扰。以往人们在解决生态、医学、力学、工程等问题时建立的数学模型大多是这种类型的微分方程模型。然而，许多自然现象或实际问题常常出现不受系统本身控制的瞬间作用，使系统的连续状态发生间断，如生态种群研究中，投放天敌和喷洒农药等人为作用对种

群的影响，也或战争、瘟疫、自然灾害等突发事件的爆发都呈现一种瞬动的形态。这种瞬动的数学表述就是脉冲作用。即，要更客观地描述这些现象，必须在已有模型基础上考虑脉冲扰动，对于这类数学模型的研究和解决均归结为脉冲微分方程的研究。脉冲微分方程以其对自然现象更客观、更准确、更实际的刻画引起了学者对其理论和应用的广泛关注。

全书共7章，第1章介绍脉冲微分方程理论的研究现状、研究背景及本书的主要工作。着重介绍了主要工作的创新与独到之处。

第2章研究中立型微分方程以及带脉冲的中立型时滞微分方程的正解存在性。

第3章研究具共振条件的脉冲微分方程边值问题，利用Mawhin重合度连续定理得到适用于脉冲微分方程算子的连续定理，并把所得到的推广定理应用于几类脉冲微分方程非局部边值问题。这些工作都是相关方面的重要进展。

第4章研究非共振条件的脉冲微分方程边值问题的正解，首次给出二阶脉冲微分方程三点边值问题的Green函数，将脉冲微分方程边值问题转化为积分形式，进而定义算子，利用各类锥上不动点定理研究了这类问题的正解存在性。

第5章扩展了已有的Krasnoselskii拉伸压缩定理。该定理的推广主要是放宽了原定理的条件，把严格的范数限制拓广为泛函限制。作为应用，讨论了$p-$Laplacian脉冲微分方程多点边值问题，得到正解存在性定理。

第6章提出并讨论了Hammerstein脉冲积分方程，从积分方程的角度出发，探讨了脉冲微分方程边值问题。这是一种

新的研究思路，拓展了脉冲微分方程边值问题的研究视野。运用 Hammerstein 脉冲积分方程的结果研究脉冲微分方程，极大地放松了对方程中非线性项的限制，在不要求算子是全连续或是紧性的情况下得到了全新的结果。

第7章介绍建立微分方程模型的原则与基本方法，并举经典例子加以说明，便于脉冲微分方程在实际应用中的模型构建。

本书全部内容以理论有据、方法通用、联系实际作为追求目标。书中对脉冲微分方程的相关基本定理给出了文献出处，并对新的定理给出详尽的数学论证，书中结果绝大部分已发表于国内外学术刊物。在整理成书时，进行了简化、改进。但错漏不当之处在所难免，敬请专家、读者指正。

本书的出版得到了中央民族大学“211”工程三期项目中国少数民族经济发展研究的子项目：中国少数民族地区经济社会发展分析与预测研究(021211030312)的资助，谨致谢意。

值此本书出版之际，由衷感谢我的博士生导师葛渭高教授和硕士生导师燕居让教授，他们渊博的学识、开阔的思路赋予我完备的专业知识，严谨求实、一丝不苟的学术作风及不断进取的拼搏精神给予我良好的科学素养。其次，感谢中央民族大学理学院领导，特别是徐世英副院长的鼎立支持和帮助。最后，感谢家人、朋友一直以来的关心、理解和支持。

作　者

2010年9月于北京

目　录

第1章　绪　论

1.1　脉冲微分方程发展概况

近些年来，医学、生物数学、现代物理等自然科学和边缘学科的进一步拓展，促进了脉冲微分方程的发展.事实上，人们在解决生态、医学、金融、力学、工程等问题时建立的数学模型大多是微分方程模型，而在经典的微分方程理论中，系统本身的状态是依时间而连续的.在模型上不能客观而真实地反映自然界的许多实际问题.因为许多实际问题常常出现不受系统本身控制的瞬间作用，改变了系统的连续状态，如医学上，对癌细胞的放射治疗；在生物种群中投放天敌和喷洒农药，战争、瘟疫、自然灾害等突发事件的爆发，人们及时采取的一系列措施对金融市场的影响等等，都呈现一种瞬动的形态.为了更精确地描述这些现象，必须在已有的模型基础上考虑脉冲扰动，建立新的数学模型.脉冲微分方程对这些现象给出了一个更自然的描述.由于脉冲微分方程对自然界发展过程给出更真实的描述，从20世纪80年代末期，越来越多的学者关注脉冲微分方程理论及其应用，已有多部专著出版[1-3].

对于脉冲微分方程，按方程的类型可分为:脉冲常微分方程、脉冲时滞常微分方程、脉冲积分方程和脉冲偏微分方程等.从研究内容上，大体有以下几个方面:脉冲微分方程基本理论研究、稳定性理论研究、振动性理论研究、边值问题研究、脉冲微分方程在其他学科中的应用等.有关脉冲微分方程理论可参阅 V. Laskshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov 所著书[1,2]，振动理论参阅 I. Grori and G. ladas 所著书[4]和燕居让所著书[5]等，自多部专著出版以来，脉冲微分方程振动性研究日益受到人们的重视，现已有研究相关问题的大量文献可供参考，如文献[6-12].

在关注脉冲时滞微分方程研究领域的过程中，我们发现学者们关注有关

振动性的研究较多，而对相应方程的正解存在性的研究则关注不足. 而实际应用背景，如种群动力学中物种的繁衍和灭迹；渔业生产中，鱼苗的投放和成鱼的收获等表明正解存在性的要求是普遍的，这引发了我们对正解存在性的研究兴趣. 在本书中我们将对微分方程的正解存在性进行研究. 得到的一些结果详 见文献[13－16].

关于微分方程边值问题研究，早在 20 世纪中后期，由于 Banach 压缩映象原理的提出以及 Leray－schauder 拓扑度理论、Mawhin 叠合度理论和临界点理论等的不断更新和完善，极大地促进了非线性常微分方程边值问题的研究，获得了丰硕的成果. 广泛的应用背景要求微分方程边值问题模型必须考虑脉冲扰动，从而建立新的数学模型，这使得脉冲微分方程边值问题成为一个前沿性的研究领域.

目前，脉冲微分方程边值问题的研究主要集中于一阶脉冲微分方程两点边值问题或周期边值问题的研究，如文献[17－19]. 有关应用也主要集中在这些一阶脉冲微分方程两点边值问题或周期边值问题在种群动力学和生物管理资源等生物数学领域，如文献[20－22]. 对于二阶脉冲微分方程多点边值问题的研究结果，如文献[23－25]等. 作为微分方程研究领域的一个前沿性课题，存在较大研究空间.

方法的改进和创新是研究领域的重大突破，是研究课题必不可少的理论基础，只有方法和理论性的突破，才能带动相关领域的快速发展，研究成果才会更丰富. 近年来，葛渭高教授在理论方法上做出的创新，极大地拓展了微分方程的研究范围. 如文献[26]，葛渭高教授对 Mawhin 连续定理进行了推广，推广的 Mawhin 连续定理成功地解决了 p－Lapacian 共振边值问题解的存在性问题. 在文献[27]中，葛渭高教授推广了 Kranoselskii 不动点定理，在双锥下证明了一系列不动点定理，并命名为双锥不动点定理. 此定理的给出，去掉了长期以来非线性项是非负的限制假设，为研究可变号非线性项的边值问题提供了新的理论依据. 这些定理和方法的改进也为脉冲微分方程的研究提供了很好的理论基础. 实际上，微分方程边值问题的研究一方面使不动点理论得到应用，而显示其活力，另一方面又不断提出新的有待解决的问题，推动了不动点理论的完善和提高.

1.2 研究背景及主要工作

书中研究内容主要涉及脉冲微分方程及其边值问题、脉冲积分方程、不动点定理的推广及其应用。对二阶脉冲微分方程多点边值问题从共振和非共振两个角度做了比较系统的研究，得到一些结果[28-30]. 特别是由于其应用背景更多地考虑非负解或正解，因而在理论研究中，我们特别关注了非负解或正解的存在性研究. 把微分方程问题转化为积分方程，以算子理论为基础，利用各种不动点定理的研究思路，是我们研究微分方程的重要思路之一. 而就积分方程而言，又有其独立而独特的研究方法和理论，这些理论反过来可以为解决某些微分方程提供很好的方法. 书中为了拓展研究思路和方法，尝试了对脉冲积分方程的研究，并把研究结果应用于二阶脉冲微分方程多点边值问题，得到了简便而清新的结论.

1. 中立型微分方程的正解

近年来，有关中立型微分方程振动性的研究已有很多结果[31,32]及其相关文献. 但相应方程正解存在性的研究则比较少见[33,34]，而且所用方法 均为 Banach 压缩映象原理和 Schauder 不动点定理. 1992 年，张柄根、庾建设在文献[35]中，使用 Krasnoselskii 不动点定理，给出了二阶中立型微分方程：

$$[x(t)-cx(t-\tau)]''+p(t)x(g(t))=0 \qquad t\geqslant 0 \qquad (1.2.1)$$

存在渐近衰退正解的若干充分条件. 通过论证表明 Krasnoselskii 不动点定理对于研究中立型微分方程正解存在性是非常有效的. 这些结论易于推广到偶数阶中立型方程，但是对于一阶中立型方程或奇数阶的情形却不能直接推广. 这是我们在第 2 章关注的视点之一.

1995 年，Grace 在文献[36]中，给出了混合中立型微分方程：

$$[x(t)+cx(t-h)-c^*x(t+h^*)]'=qx(t-g)+px(t+g^*) \quad (1.2.2)$$

振动性的充分条件. 这是较早研究混合中立型方程的文献，此类方程振动性的研究已有一些学者关注，但相应方程的正解存在性的研究在文献中还很少见到. 而中立型种群模型中，对这种渐近衰退正解是很关注的，它显示了种群的衰落轨迹，结合此两个关注点，我们研究混合中立型微分方程

$$[x(t)-cx(t-h)-c^{*}x(t+h^{*})]'=p(t)x(g(t)) \tag{1.2.3}$$

渐近衰退正解的存在性.

随着各类应用学科的推动，脉冲中立型时滞微分方程的振动性研究虽有了较大进展，但对于脉冲微分方程的正解存在性研究却不多见[37]. 据作者所知，脉冲中立型微分方程正解存在性的研究工作更是少见. 文献[38,39]研究了无脉冲影响的中立型微分方程的正解存在性；文献[6, 7]研究了脉冲中立型时滞微分方程的振动性. 实际应用背景引发了我们对正解存在性研究的极大兴趣. 所以，关于脉冲中立型微分方程正解存在性的研究成为第2章关注的视点之二. 在第2.3节研究了脉冲中立型微分方程：

$$\begin{cases}[y(t)+p(t)y(t-\tau)-r(t)y(t-\rho)]'+q(t)y(t-\sigma)=0 & t\geqslant 0,\ t\neq t_k\\ y(t_k^{+})-y(t_k)=b_k y(t_k) & k=1,2,\cdots\end{cases} \tag{1.2.4}$$

的正解存在性.

2. 脉冲微分方程边值问题

(1)随着微分方程边值问题研究的快速发展，对于共振条件下无脉冲影响的微分方程边值问题已经受到了广泛的关注，取得了很多的成果，参见文献[40－53]. 近些年来，许多学者开始关注相应的脉冲微分方程边值问题，取得了一些成果，参见文献[17－19]. 值得提出的是文献的结果都是以 Mawhin 连续定理结合自治曲率界集为研究依据给出的. 由于在研究过程中结合了自治曲率界集这一工具，所得结果有很大的局限性. 即，所得结论的条件多，验证难度大. 我们克服了这方面的局限性，摆脱自治曲率界集这个繁琐的工具，钻研对脉冲的处理以及先验界估计的处理，使问题得到更好的结果. 这些结果的条件是简便的，更便于应用和验证.

第3章研究了共振条件下脉冲微分方程边值问题解的存在性. 其中，3.2节研究具共振条件的一阶脉冲微分方程：

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)) & t\in J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}\\ \triangle x(t_i)=I_i(x(t_i)) & i=1,2,\cdots,k\\ x(0)=x(T)\end{cases} \tag{1.2.5}$$

的周期边值问题解的存在性;3.3 节研究共振条件下的二阶脉冲微分方程:

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x') & t \in J \backslash \{t_1, t_2, \cdots, t_k\} \\ \triangle x(t_i) = I_i(x(t_i), x'(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k \\ \triangle x'(t_i) = J_i(x(t_i), x'(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k \end{cases} \quad (1.2.6)$$

下列边值条件之一:

$$\begin{cases} x(0) = 0 & x'(1) = \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j x'(\eta_j) \\ x'(0) = 0 & x'(1) = \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j x'(\eta_j) \\ x(0) = 0 & x(1) = \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j x(\eta_j) \end{cases}$$

的 m－点边值问题解的存在性.

(2)对于非共振情形的微分方程边值问题正解存在性的研究，通常利用闭锥上的不动点理论.具体思路(指无脉冲情形)是:

①对给定的问题建立合适的空间及闭锥;

②借助 Green 函数将微分方程边值问题的解转化为积分形式的保锥全连续映射的不动点问题;

③对非线性项给以合适的条件，运用锥上的不动点定理(如 Krasnosel'skii 不动点定理，Leggett－Williams 不动点定理，五个泛函的不动点定理等)获得正解的存在性和多解性.

但是对于脉冲情形，空间的建立与闭锥的构造都带来一定的困难，特别是要转化为积分形式而利用各种不动点定理时，由于脉冲的出现，积分形式的给出或 Green 函数的给出是繁杂而困难的.第 4 章我们关注这个视点，着眼点是突破脉冲带来的诸多困难，使脉冲微分方程边值问题在非共振情形下正解的存在性及多解性研究有新的进展.首先，突破了脉冲微分方程三点边值问题 Green 函数的困难，使得经典的 Green 函数法能够在脉冲微分方程边值问题领域得到应用;然后，利用 Green 函数，使脉冲微分方程顺利转化为更具体、更直观的积分形式;最后，通过建立合适的锥使得各类不动点定理能够顺利应用于脉冲微分方程边值问题.这一方面的研究给我们带来了很大的困难，同时也给了我们极大的研究空间.

其中，4.2 节研究二阶脉冲微分方程三点边值问题：

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t))=0 & t\in J' \\ \triangle x(t_i)=I_i(x(t_i)) & i=1,2,\cdots,k \\ \triangle x'(t_i)=L_i(x(t_i)) & i=1,2,\cdots,k \\ x(0)=0=x(1)-\alpha x(\eta) \end{cases} \tag{1.2.7}$$

多个正解的存在性；4.3 节考虑 p – Laplacain 四阶脉冲微分方程三点边值问题：

$$\begin{cases} (\phi_p(u''(t)))''-f(t,u(t))=0 & t\neq t_i \\ \triangle\phi_p(u''(t_i))=-I_i(u(t_i)) & i=1,2,\cdots,k \\ \triangle(\phi_p(u''(t_i)))'=-L_i(u(t_i)) & i=1,2,\cdots,k \end{cases} \tag{1.2.8}$$

及下列边值条件：

$$\begin{cases} u'(0)=u(1)=0 \quad u''(0)=0=u''(1)-\phi_q(\alpha)u''(\eta) \\ u'(1)=u(0)=0 \quad u''(0)=0=u''(1)-\phi_q(\alpha)u''(\eta) \end{cases}$$

之一的正解存在性；4.4 节考虑了依赖于一阶导数的二阶脉冲微分方程：

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0 & t\in J' \\ \triangle x(t_i)=I_i(x(t_i),x'(t_i)) & i=1,2,\cdots,k \\ \triangle x'(t_i)=L_i(x(t_i),x'(t)) & i=1,2,\cdots,k \\ x(0)=0=x(1)-\alpha x(\eta) \end{cases} \tag{1.2.9}$$

正解的存在性.

3. 推广的不动点定理及其在脉冲微分方程中的应用

微分方程边值问题的研究一方面使不动点理论得到应用，而显示其活力，另一方面又不断提出新的有待解决的问题，推动不动点理论的完善和提高. 本人在学习和研究中受导师葛渭高教授的熏陶和指导，这方面做了一些工作，在第 5 章推广 Krasnoselskii 拉伸压缩定理，从而得到新的不动点定理，定理的推广主要是放宽了原定理的条件，把严格的范数限制拓广为泛函限制，适用范围更广泛.

作为这些定理的应用，在 5.3 节研究了 p – Laplacian 脉冲微分方程边值问题：

$$
\begin{cases}
(\phi_p(u'))' + f(t, u(t)) = 0 & t \neq t_i \\
\triangle u(t_i)) = I_i(u(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k \\
\triangle \phi_p(u'(t_i)) = L_i(u(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k \\
u(1) + \alpha u'(\eta) = u'(0) = 0
\end{cases}
\tag{1.2.10}
$$

在5.4节详细研究了四阶脉冲微分方程四点边值问题:

$$
\begin{cases}
(\phi_p(u''(t)))'' - f(t, u(t)) = 0 & t \neq t_i \\
\triangle \phi_p(u''(t_i)) = -I_i(u(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k \\
\triangle(\phi_p(u''(t_i)))' = -L_i(u(t_i)) & i = 1, 2, \cdots, k
\end{cases}
\tag{1.2.11}
$$

及以下边值条件:

$$
\begin{cases}
u(0) - \lambda u'(\zeta) = u\zeta(1) = 0 \quad u''(0) = 0 = u''(1) - \phi_q(\alpha)u''(\eta) \\
u(1) + \lambda u'(\zeta) = u'(0) = 0 \quad u''(0) = 0 = u''(1) - \phi_q(\alpha)u''(\eta)
\end{cases}
$$

之一的正解的存在性.

4. 脉冲积分方程与脉冲微分方程边值问题的互动

由于微分方程的研究可以转化为积分方程，所以，积分方程的研究就有了很大的意义.而就积分方程而言，又有其独立而独特的研究方法和理论，这些理论反过来可以为解决某些微分方程提供很好的方法.第6章的研究思想和出发点就是在这样的思考下产生的.

6.2节利用增算子不动点理论研究了 Hammerstein 脉冲积分方程

$$
\begin{aligned}
u(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} H_i(t)L_i(u(t_i)) \\
+ \sum_{i=1}^{k} W_i(t)I_i(u(t_i)) := Au(t)
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

的最大解和最小解存在性.并把此结果应用于二阶脉冲微分方程边值问题，从另一个角度，研究了脉冲微分方程边值问题，得到有关脉冲微分方程最大最小解存在的充分性条件. 在6.3节研究 Hammerstein 脉冲积分方程的特征值问题，并把结果应用于脉冲微分方程边值问题.

1.3 脉冲微分方程模型的研究前景

近年来，医学、生物数学、现代物理等自然科学和边缘学科的进一步拓展，

加速了脉冲微分方程的研究进程. 事实上，人们在解决生态、医学、金融、力学、工程等问题时建立的数学模型多是微分方程模型，然而系统在发展中常常出现不受自身控制的瞬间作用，改变系统的连续性. 如医学上，对癌细胞的放疗和治疗；在生物种群中，人为投放天敌和喷洒农药等对种群的影响；战争、瘟疫、自然灾害等突发事件的爆发以及人们及时采取的一系列措施对金融市场等的影响等等，都呈现一种瞬动的形态. 为了更精确地描述这些现象，我们必须在已有模型基础上考虑脉冲扰动，建立新的数学模型. 脉冲微分方程更自然而真实地描述了这种瞬时突变现象. 由于脉冲微分方程最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响，能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律. 广泛的应用背景也极大地促进了脉冲微分方程理论的发展进程. 由于时间所限，目前本书仅就脉冲微分方程边值问题作了理论上的论证，提出了一些新的思路和方法，并进行了理论探讨和严格论证.

就应用而言，为了对生物种群动力学能有更好的理解，一个半世纪以来，理论生态学家及应用数学家在许多方面改进了经典的模型及建构思想. 当考虑到种群个体的生理与行为特征时，个体之间是有差异的. 因此，他们与环境之间的交互影响也是不同的. 结果，个体之间像出生、死亡、生长、新陈代谢、资源消耗等生命过程会有变化. 诸多的应用背景促进了我们的应用研究. 如对脉冲效应的种群动力学模型的研究，具有代表性的研究有：Roberts，Kao[54]的生育脉冲，Lakmeche，Arino[55, 56]，Panetta[57]考虑癌细胞的化疗，Shulgin 等[58]考虑疾病的脉冲免疫，Funasaki，Kot[59]考虑资源的脉冲输入，Liu，Rohlf[60]考虑种群的控制. 这些研究结果表明脉冲微分方程不仅有重要的理论价值，而且也有实际应用价值.

目前我们收集了数据资料与相关的研究文献，后期将在前期理论的基础上，研究分析并构造这部分内容的具体模型，使理论研究能够应用于这些具体的模型. 脉冲微分方程这一新的研究领域极具吸引力和挑战性，在理论上，它结合了连续和离散的特征，但又超出了连续和离散的范围，还存在若干亟待解决的问题. 在应用上，脉冲微分方程源于实践，有着非常广泛的应用前景. 因而，无论是理论研究还是实际应用，这一研究领域都具有很重要的意义. 当前，国内外关于脉冲微分方程的研究日益活跃，研究队伍不断扩大，这充分展现了它富有朝气的生命力，也预示着它蓬勃发展的明天.

第 2 章　中立型微分方程的正解

2.1　引言

众所周知，由 G. Sturm 建立的齐次二阶线性微分方程解的零点分布的比较理论和分离理论，为微分方程振动理论的研究奠定了基础. 一个半世纪以来，微分方程振动理论已经有了很大发展，在微分方程定性理论及边值问题研究中占有很重要的地位. 由于这一研究方向的深入发展，它的研究内容及研究方法也大大地丰富了. 无论是线性方程还是非线性方程，近 30 年来都取得了大量的研究成果. 随着研究领域的深入发展，这一研究方向也被国内外学者扩展到泛函微分方程、差分方程、偏微分方程及生态数学等有关领域.

近年来，有关中立型微分方程振动性的研究已有很多结果[31, 32]及其相关文献. 但相应方程正解存在性的研究则比较少见[33, 34]，而且所用方法均为 Banach压缩映象原理和 Schauder 不动点定理.

1992 年，张柄根、庾建设在文献[35]中，使用 Krasnoselskii 不动点定理，给出了二阶中立型微分方程：

$$[x(t)-cx(t-\tau)]''+p(t)x(g(t))=0 \quad t\geqslant t_0 \tag{2.1.1}$$

存在渐近衰退正解的若干充分条件. 通过论证表明 Krasnoselskii 不动点定理对于研究中立型微分方程正解存在性是非常有效的. 这些结论易于推广到偶数阶中立型方程，但是对于一阶中立型方程或奇数阶的情形却不能直接推广. 这个是本章关注的视点之一.

1995 年，Grace 在文献[36]中，给出了混合中立型微分方程：

$$[x(t)+cx(t-h)-c^{*}x(t+h^{*})]'=qx(t-g)+px(t+g^{*}) \tag{2.1.2}$$

振动性的充分条件. 这是较早研究混合中立型方程的文献，此类方程振动性的研究已有一些学者关注，但相应方程的正解存在性的研究在文献中还很少