考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版 2015

考研数学
历年真题标准解析

全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

（数学三适用）

主审　张宇　　送精讲导学课程

登陆中国教育考试在线

http://www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 KAOYAN SHUXUE LINI
(SHUXUE SAN SHIYONG)

高教版
2015

考研数学

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

历年真题标准解析

（数学三适用）

主审　张宇

送精讲导学课程

登陆中国教育考试在线
http://www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

《2015考研数学历年真题标准解析（数学三适用）》一书编者深谙命题原则、试题的选择方法以及题目的难易程度的比例，对数学三2004—2013年的试题进行了分类归纳总结和详细解读，并单独对2014年考研数学数学三试卷进行了分析。通过本书的学习，考生定能了解试题的难度和分布，熟悉必考的知识点及有关的解题思路和解题方法，对考研数学有更清晰的认识，进而有助于考生合理安排时间，制定出适合自己的复习计划，最终取得更好的成绩。

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学历年真题标准解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京:高等教育出版社,2014.5

数学三适用

ISBN 978-7-04-039607-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第065663号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 范晓红

责任校对 王 雨　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	12.5	版 次	2014年5月第1版
字 数	300千字	印 次	2014年5月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	24.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 39607-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

购书请拨打读者服务电话　(010)58581114/5/6/7/8

特别提醒："中国教育考试在线"http://www.eduexam.com.cn 是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、下载中心、在线练习、在线考试、网上商城、网络课程等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

编者的话

2010年以来,全国报考硕士研究生的人数呈逐年增加的趋势,考研竞争的程度越来越激烈,因此为广大考生提供一本既实用又具针对性的考研辅导书是非常必要的!我们认真研究了教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容,详细解读了数学(三)10年的全部考题:考题的知识点、题目类型、命题方法、解题思路、解题方法与解题技巧等。笔者深谙命题原则、试题的选择以及题目难易程度的比例等。在考研的辅导过程中(最早的从1986年就开始辅导考研),我们按知识点的分类进行讲授,效果非常好,学生的收益也有明显的提高。所以我们总结了这方面的经验,认为非常有必要对近10年的考研试题进行分类归纳总结,这对考生的复习迎考是非常有帮助的。因为它可以使考生一目了然地知道:

1. 哪些知识点是必考的或从未考过。

例如(1) 未定式极限的计算:10年试卷中有11题;

(2) 二重积分:10年中有16题;

(3) 线性方程组:10年中有8题;

(4) 矩阵:10年中有13题;

(5) 多维随机变量的分布:10年中有17题;

(6) 差分方程:10年中无考题;

(7) 大数定律和中心极限定理:10年无考题。

2. 试题的题型是什么?

3. 涉及的解题方法是什么?有何解题技巧?

考生了解这些内容后定能熟练地掌握必考的知识点及有关的解题思路和解题方法。而无需花费时间去做那些在考试中不出现或极少出现的内容与题目。考生一定要善于取舍,有舍才有得。例如差分方程完全放弃了也只有4分,而把复习差分方程的精力用到必考题目上,势必更有得分的把握,提高考试的成绩。

在解题思路和解题方法上,以我们近40年的教学经验以及20多年辅导考研(最早的从1986年就开始辅导考研)的体会尽可能地以通俗易懂、简捷、容易理解和掌握的方法介绍给考生。例如编者给出许多知识点或公式的"结构式",简单、易懂、好掌握。中值定理是考研的重点和难点,而构造一个符合已知条件的辅助函数的方法较多,也比较灵活,不易掌握,编者根据多年的经验给出了便于考生掌握而且简捷有效的"直接构造法"和"常数变易法"(详见"中值定理"的解题思路和解题方法),这无疑会极大地提高考生的解题能力。

本书的特点是:

1. 重点突出,考点的内容清晰,类型醒目

我们把相同知识点的考题总结归纳在一起,既突出了重点,又对每年必考的题目一目了然。掌握同一内容的各种不同的命题方法,既能开阔眼界,又能提高解题能力,一举多得。建议考生

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

对十年中考到7次以上的内容视为必考题。而对考到的概率为50%左右的题目应予以加倍的关注,它考到的可能性较大。

2. 特点鲜明的"解题思路和解题方法",解题思路清晰、解题方法易懂好掌握

对每一类重点或必考题型都介绍了它们的"解题思路和解题方法"。例如我们给出了利用泰勒公式必须遵循的两个原则:"上下同阶"原则与"幂次最低"原则。这无疑给了考生一把开启解题思路和解题方法的钥匙。广大考生必能受益匪浅,并能较大幅度地提高考试成绩。

3. 独特的"错误防范",效果明显,收效显著

对考生中容易犯的错误或被忽略的地方,给予必要的提醒,这也能较大幅度使考生不犯或少犯错误!效果明显,收效显著。

4. 查漏补缺,增强信心

我们刻意保留了2014年考研的试题,其目的是希望考生复习完全书的内容后,再完成一套完整的考研试题,以检验自己的收益,进一步做到查漏补缺,增强信心。

本书在编写过程中得到高等教育出版社刘佳老师和张耀明老师的大力支持和悉心指导与帮助,在此深表感谢!书中"微积分"和"线性代数"部分由首都经济贸易大学刘长乃教授编写,其他由吉林大学高彦伟教授编写。

书中错误难免,欢迎批评指正!

编写组

2014年3月

目　录

第一部分　微　积　分

第一章　函数、极限、连续

无穷小量的概念及无穷小量“阶”的比较，函数在一点处的连续与间断是考试的基本题型．属于“容易题”也是必考题的一部分．

1．无穷小（大）量的概念和“阶”的比较

（1）（1301）当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$．　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$．

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$．　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$．

（2）（1101）已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

（A）$k=1,c=4$．　（B）$k=1,c=-4$．　（C）$k=3,c=4$．　（D）$k=3,c=-4$．

（3）（1004）设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$．　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$．

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$．　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$．

（4）（0902）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$．　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$．　（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$．　（D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$．

（5）（0701）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$．　（B）$\ln(1+\sqrt{x})$．　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$．　（D）$1-\cos\sqrt{x}$．

（6）（0401）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________．

注：（1301）的前两位数表示试卷的年份，后两位数表示题号，1301 即代表 2013 年试卷的第一题．而（0917）表示 2009 年试卷的第 17 题，其余类似．

解题思路与解题方法

无穷小量的判定应根据定义，两个无穷小量的比较是求它们比的极限．

两个高阶无穷小量有如下的运算法则：

设 m,n 为正整数，

（1）加减法时低阶“吸收”高阶，即

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=\min(m,n).$$

（2）乘法时阶数“相加”，即

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}).$$

（3）非零常数不影响阶数，即

$$o(x^m)=o(kx^m)=ko(x^m)\quad(k\neq 0).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解答 (1) **答**:选(D).

考点:无穷小阶的比较.

解 直接用极限讨论即可.也可由无穷小量的运算法则可知选(D).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xo(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0$,所以 $xo(x^2)=o(x^3)$,故(A)是正确的.

类似讨论可知(B)、(C)选项是正确的.而 $o(x)+o(x^2)=o(x)$,故(D)选项错误.

(2) **答**:选(C).

考点:洛必达法则或麦克劳林公式.

解法 1 因为$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

$$\sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3),$$

所以$f(x)=3\sin x-\sin 3x$

$$=3x-\frac{1}{2}x^3-3x+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

$$=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3(\text{当 } x\to 0 \text{ 时}),$$

所以 $c=4,k=3$.

解法 2 洛必达法则.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}\xlongequal{\text{题设等价}}1,$$

只有当 $k=3,c=4$ 时其极限值才是 1,所以选(C).

解法 3 利用 3 倍角的公式

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\quad(\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x)$$

立即可得 $c=4,k=3$.

(3) **答**:选(C).

考点:无穷大"阶"的比较.

解 无穷大"阶"的比较就是求它们比的极限,因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=+\infty,$$

所以当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$.故选(C).

(4) **答**:选(A).

考点:函数等价无穷小的概念以及函数极限的计算,使用的工具是泰勒公式.

解 由题意,本题可以等价描述为:已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,求参数 a,b.

对上式分母使用等价无穷小替换,则 $x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$.

由于分母是三阶无穷小，根据“上下同阶”原则，则对上式分子使用泰勒公式要保留到三阶无穷小，即当 $x\to 0$ 时，$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，则

$$x-\sin ax=x-ax+\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)=(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3),$$

于是，
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

立即得到 $a=1,b=-\frac{1}{6}$. 所以选(A).

错误防范：如果考生先将分母用等价无穷小代换后，再使用洛必达法则会出现无法求得 a，b 的情况.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{等价}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$
$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$
$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{a^3\cos ax}{-6b}\xlongequal{\text{题设}}1.$$

只能得到 $a^3=-6b$，而无法求得 a 和 b 的值.

所以建议考生在极限计算中尽可能用好泰勒公式，这是个档次高、效率显著的好方法！但一定要注意“上、下同阶”的原则.

(5) **答**：选(B).

考点：几个重要的等价无穷小量，洛必达法则求极限.

解法 1　排除法. 当 $x\to 0^+$ 时，

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x},\ \sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x,$$

不选(A)、(C)、(D)，所以选(B).

解法 2　利用等价无穷小量，直接验证如下：

当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$.

解法 3　也可用洛必达法则验算如下：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1.$$

选(B).

(6) **答**：填 1，-4.

考点：同阶无穷小量的概念，等价无穷小量的代换定理，极限的四则运算法则.

解　由已知分子 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，因此有

$$\lim_{x\to 0}(e^x-a)=1-a=0,$$

解得 $a=1$,并代入原式,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b=5.$$

得 $b=-4$.

所以本题应填 $a=1,b=-4$.

2. 连续与间断

(1)(1302)函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2)(0901)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(3)(0801)设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的

(A) 跳跃间断点. (B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点. (D) 振荡间断点.

(4)(0809)设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$________.

(5)(0408)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

解题思路与解题方法

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续有三种定义:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 时,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续;

(2) 若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ 时,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续;

(3) 分析定义:任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,对当 $|x-x_0|<\delta$ 时的一切 x,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续常用的判定方法是(1)与(2). 分析定义很少用. 对于分段函数在分段点处的连续性判定更多的是用方法(2).

函数$f(x)$的不连续点称为函数的间断点. 间断点分为**第一类间断点**与**第二类间断点**.

第一类间断点是指左右极限都存在的间断点. 其中包含**可去间断点**:$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$($f(x_0)$无定义或不等于极限值)**跳跃间断点**:$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.

其余的间断点统称为第二类间断点,例如**无穷间断点**与**振荡间断点**.

解答　(1) **答**:选(C).

考点:函数的间断点及其类型.

解　由题意,$f(x)$的间断点为$x=-1,x=0,x=1$,且$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

在$x=-1$处,$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x\ln|x|}(\ln|x|+1)}{(x+1)\ln|x|+x\ln|x|+(x+1)}=\infty$,

所以$x=-1$是第二类间断点.

在$x=0$处,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=1$,

所以$x=0$是可去间断点.

在$x=1$处,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln|x|}(\ln|x|+1)}{(x+1)\ln|x|+x\ln|x|+(x+1)}=\dfrac{1}{2}$,

所以$x=1$是可去间断点.

综上,函数$f(x)$的可去间断点有2个,应选(C).

错误防范:部分考生没有掌握$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$,导致在计算极限过程中无法化简函数.

(2) **答**:选(C).

考点:函数极限的运算和间断点的概念与分类.

解　当$x=k,k\in\mathbf{Z}$时$f(x)$间断,故$f(x)$的间断点有无穷多个. 但左、右极限都存在的可去间断点应在$x-x^3=0$的解$x=0,\pm1$中去寻找.

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

所以可去间断点有3个,即$x=0,\pm1$,应选(C).

(3) **答**:选(B).

考点:一元函数间断点类型、变上限函数的导数等概念.

解　因为$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)$,

所以$x=0$是函数$g(x)$的可去间断点,故应选(B).

(4) **答**:填1.

考点:连续的定义.

解 由题设知 $f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处是连续的,故有

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to x^-}f(x)=f(c),$$

$$\lim_{x\to -c^+}f(x)=\lim_{x\to -c^-}f(x)=f(-c),$$

即
$$\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\lim_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1,$$

$$\lim_{x\to -c^+}(x^2+1)=\lim_{x\to -c^-}\frac{2}{-x}=c^2+1,$$

从而 $\frac{2}{c}=c^2+1$,解得 $c=1$.

(5) **答**:选(D).

考点:函数在一点处连续的概念.

解
$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right),$$

令 $t=\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时,$t\to\infty$,则

$$\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}f(t)=a.$$

当 $a=0$ 时,有 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=g(0)$,$g(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a\neq g(0)$,$g(x)$ 在 $x=0$ 处间断,因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

所以本题应选(D).

第二章　一元函数微分学

本章考查的主要内容是导数的定义、导数的四则运算、复合函数及隐函数的求导. 中值定理是重点题型之一，属于较难题目. 而未定式极限的求法以及导数的应用都属于必考题.

1. 导数的概念与定义

(1) (1309) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$__________.

(2) (1102) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) (0702) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(4) (0608) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解题思路与解题方法

函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处可导的定义，需要更进一步的理解为**“结构式”**是

$$f'(x_0)=\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}.$$

式中的“$\square$”为 x 或 Δx 或者是 x(或 Δx)的函数，且当 x 或 $\Delta x\to 0$ 时必有 $\square\to 0$ 只要符合上面的结构式，其极限值亦为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数. 如果不符合上述结构式，则需要变形化简为结构式.

解答　(1) 答：填 -2.

考点：导数的几何意义与定义.

解　注意到所求极限为“$\infty\cdot 0$”型 $\left(f\left(\dfrac{n}{n+2}\right)\to f(1)=0\right)$，所以需变形为“$\dfrac{0}{0}$”，容易联系到导数定义的“结构式”.

由题意，$f(1)=0$，$f'(1)=(2x-1)\Big|_{x=1}=1$. 而

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com