微积分

CALCULUS

阎慧臻 主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

微 积 分

CALCULUS

主　编　阎慧臻

副主编　赵峥嵘　刘　燕　董晓梅　毕秀国　杨开兵

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 阎慧臻主编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5611-9097-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①阎… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 082342 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023

发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连印刷三厂印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：22.25　字数：501 千字

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　责任校对：婕　琳

封面设计：季　强

ISBN 978-7-5611-9097-5　定　价：45.00 元

前 言

微积分是高等学校管理类、经济类各专业的重要基础课程。它不仅为各专业学生学习专业课程提供了必需的数学知识，同时培养和提高了学生分析和解决问题的能力，对训练学生严谨的逻辑思维能力至关重要。

为适应新形势下教学的需要，结合多位教师多年教学工作经验的积累，我们共同编写了《微积分》教材。本着加强基础、注重思维、培养学生分析问题和解决问题能力的原则，教材中详细介绍了函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程，MATLAB 在微积分中的应用等内容。本教材符合管理类、经济类各专业数学教学基本要求，与研究生入学考试数学三的考试大纲相匹配。

本教材主要具有以下特色：

1. 通俗易懂，简约实用

教材处理上尽量适应管理类、经济类的专业教学特点，对于有关概念、理论、方法采取学生易于接受的形式叙述。在不影响微积分学科的系统性、科学性的前提下，简化和略去了某些结论冗长、繁琐的推导，而仅仅给出直观解释，突出有关理论与方法的应用。

2. 注重应用

针对管理类、经济类的专业特点，精选了一定数量的经济应用实例，将数学知识与经济问题充分融合，使学生能将所学的基础知识、基本理论应用到实际问题中，从而使学生充分感受到数学的应用价值，为后续专业学习打下良好的基础。

3. 注重数学软件在微积分中的使用

本教材注重教学内容与计算机应用相结合，在最后一章介绍了 MATLAB 在微积分中的应用，使学生了解可以借助 MATLAB 的强大功能摆脱繁琐的微积分计算，激发学生学习数学的主动性和积极性，引导学生利用现代化计算手段有效地解决经济与管理实践中的复杂计算问题。

4. 习题分为(A)、(B)两组

每节配套(A)、(B)两组习题，独立完成(A)组习题是课程的基本要求。(A)组习题注

重考查学生对于基本概念、基本理论和方法的掌握，加强基本运算能力。(B)组习题是经过精选且极具启发性、针对性、灵活性和综合性的题目，是为数学基础要求较高的专业或学生准备的，其中部分题目出自历年考研试题。

本教材由阎慧臻主编，第 1、2 章由阎慧臻编写，第 3 章由董晓梅编写，第 4 章由毕秀国编写，第 5 章由杨开兵编写，第 6、7 章由赵峥嵘编写，第 8、9 章由刘燕编写。

由于编者水平有限，教材中难免存在不足，恳请专家、同行及读者不吝指正。

编　者

2014 年 7 月

目 录

第1章　函数、极限与连续

微积分的研究对象是变量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念及它们的一些性质.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空实数集合. 如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f，有唯一确定的实数与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，也可记作 D_f或 $D(f)$.

当 x 取数值 $x_0\in D$，与 x_0对应的 y 的数值称为函数在点 x_0处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数的值域，记作 R_f或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

函数 $f(x)$中的 f 表示函数的对应关系.

定义域和对应关系 f 是确定函数关系的两个要素. 如果两个函数的对应关系 f 和定义域 D 都相同，则这两个函数是相同的. 至于自变量和因变量用什么记号表示，则无关紧要.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数也称为单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每一个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数. 对于多值函数，往往只需附加一些条件，就可以将它化为单值函数. 本书中没有特别说明的函数，都是指单值函数.

函数的表示法一般有三种：表格法、图形法和解析法(公式法). 这三种方法各有特点：表格法一目了然；图形法形象直观；解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

函数的定义域通常按如下两种情形来确定：一种是对于有实际背景的函数，其定义域

由变量的实际意义确定；另一种是抽象地用数学解析式表示的函数，其定义域是使得该式有意义的一切实数组成的集合，称之为函数的自然定义域. 由于中学数学对此已做详细讨论，不再举例说明.

下面举几个函数的例子.

【例 1】 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-1 所示. 此函数称为绝对值函数.

【例 2】 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-2 所示.

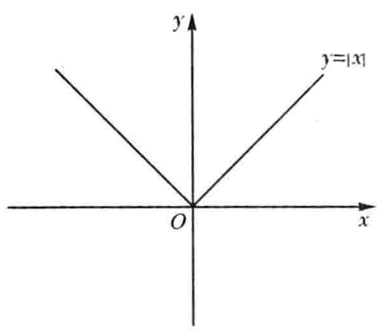

图 1-1

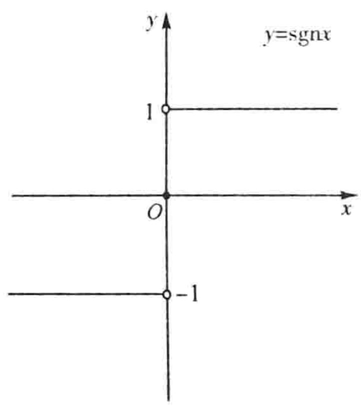

图 1-2

对于任何实数 x，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

【例 3】 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$\left[\dfrac{3}{4}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-3.8]=-4$. 把 x 看作自变量，则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 R_f 为全体整数的集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 它的图形如图 1-3 所示，此图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 此函数称为取整函数.

在例 1 和例 2 中看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

【例 4】 设某厂生产某种产品 1000 吨，定价为 130 元/吨. 当一次售出 600 吨以内时，按原价出售；若一次成交超过 600 吨时，超过 600 吨的部分按原价的 9 折出售，试将总收入表示成销售量的函数.

解 设销售 x 吨产品的总收入为 $f(x)$，则

$$y=f(x)=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 130\times 600+130\times 0.9\times(x-600), & 600<x\leqslant 1000\end{cases}$$

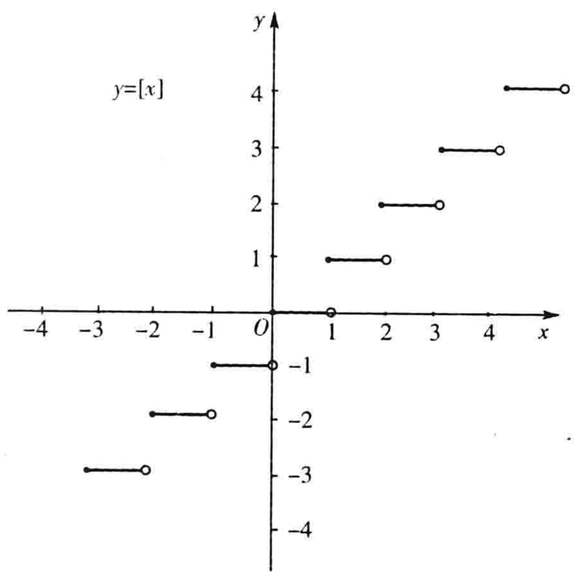

图 1-3

即
$$y=f(x)=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 117x+7800, & 600<x\leqslant 1000\end{cases}$$

这是一个分段函数，其定义域为 $D=[0,1000]$.

用几个式子表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义并无矛盾，而且有现实意义. 在自然科学、工程技术和经济学中，经常会遇到分段函数.

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在一个正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对于任何实数 x，都有 $|\cos x|\leqslant 1$.

函数的有界性与函数 $f(x)$ 中自变量 x 所取的区间有关. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，它在 $[1,+\infty)$ 上有界，在 $(0,1)$ 内无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-4)；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-5). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，使函数单调的区间称为函数的单调区间.

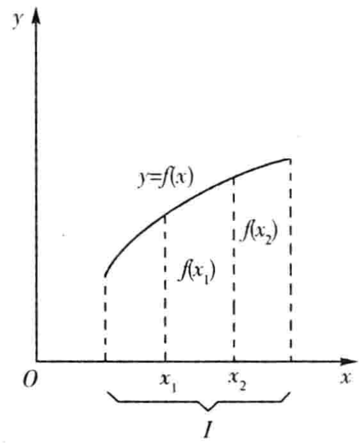

图 1-4

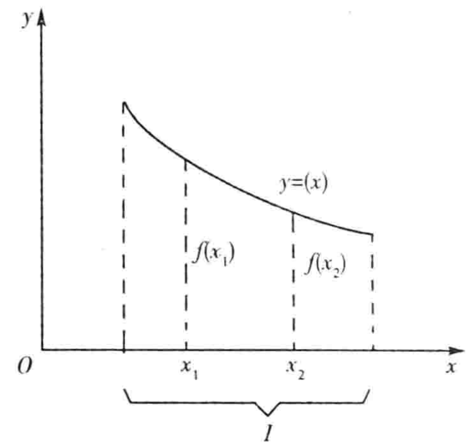

图 1-5

例如，$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，$y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数，但在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数，函数 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

由定义显然有：偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-6），奇函数的图形关于原点对称（图 1-7）.

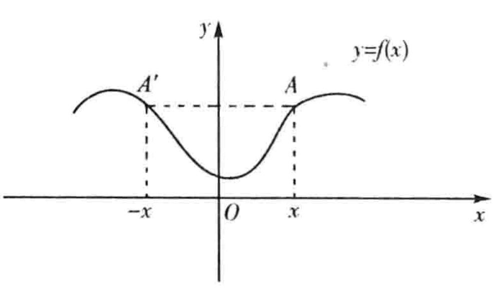

图 1-6

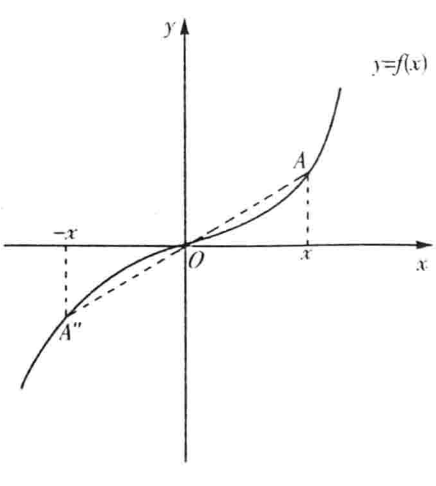

图 1-7

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数 $f(x)$的图形具有周期性. 若其周期为 l,则在每个长度为 l 的区间上,函数 $f(x)$的图形具有相同的形状.

1.1.3 反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 $f(D)$. 对任意 $y\in f(D)$,如果有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D$ 与之对应,其对应关系记为 f^{-1}. 这个定义在 $f(D)$上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数. 它的定义域是 $f(D)$,值域是 D.

习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量. 故反函数又记为:$y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

一个函数如果有反函数,它必定是一一对应的函数关系. 由于单调函数是一一对应的,所以单调函数一定存在反函数.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$来说,原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数. 把直接函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上,这两个函数的图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-8). 这是这两个函数的因变量与自变量互换的缘故.

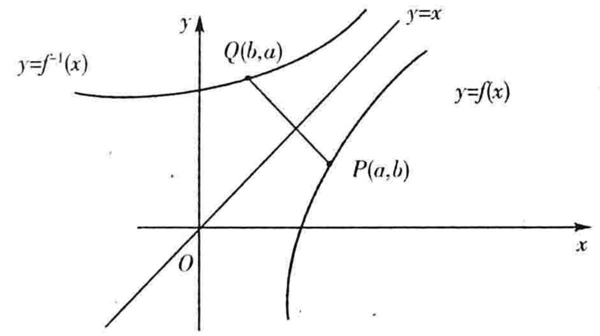

图 1-8

【例 5】 求 $y=3x-1$ 的反函数

解 由 $y=f(x)=3x-1$ 可以求出

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y+1}{3}$$

将上式中的 x 与 y 互换,得 $y=3x-1$ 的反函数为:$y=\frac{x+1}{3}$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$的值域为 R_φ. 如果 D_f与 R_φ的交集不是空集,即 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则称函数 $y=f(\varphi(x))$为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数. u 称为中间变量. 复合函数 $f(\varphi(x))$的定义域一般为 $u=\varphi(x)$的定义域的一个非空子集.

函数 f 与函数 φ 构成的复合函数通常记为 $f\circ\varphi$,即$(f\circ\varphi)=f(\varphi(x))$.

函数 f 与函数 φ 能构成复合函数的条件是:函数 f 的定义域 D_f与函数 φ 的值域 R_φ 的交集不是空集,否则不能构成复合函数. 例如,函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为$[0,+\infty)$,函数 $u=1-x^3$ 的值域为$(-\infty,+\infty)$,两者的交集为非空集合$[0,+\infty)$,所以函数 $y=\sqrt{u}$ 与函

数 $u=1-x^3$ 可以复合成复合函数 $y=\sqrt{1-x^3}$，此复合函数的定义域为 $(-\infty,1]$，它是 $u=1-x^3$ 的自然定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一个非空子集. 但函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=x^2+3$ 的值域为 $[3,+\infty)$，两者的交集为空集.

有时，也会遇到两个以上函数所构成的复合函数，只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如，函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 可构成复合函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，这里 u 及 v 都是中间变量.

【例 6】 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$，$f(f(x))$.

解

$$f(g(x))=(g(x))^2=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$$

$$g(f(x))=2^{f(x)}=2^{x^2}$$

$$f(f(x))=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4$$

这里 $(f(x))^2$ 常写为 $f^2(x)$.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

以下函数称为基本初等函数：

幂函数　$y=x^\mu$（μ 是常数）；

指数函数　$y=a^x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$）；

对数函数　$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$）；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

(1)幂函数

函数 $y=x^\mu$（μ 是常数）叫做幂函数.

幂函数的定义域随 μ 的不同而不同，但不论 μ 取何值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且图形都过 $(1,1)$ 点. 图 1-9 及图 1-10 给出了几个常见的幂函数的图形.

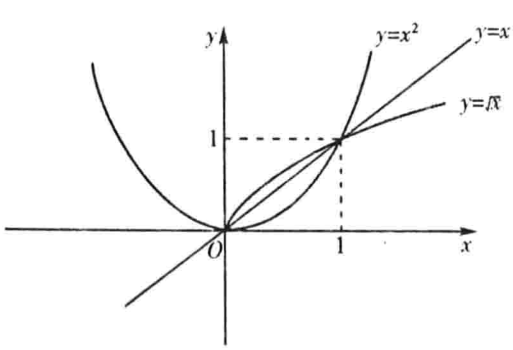

图 1-9

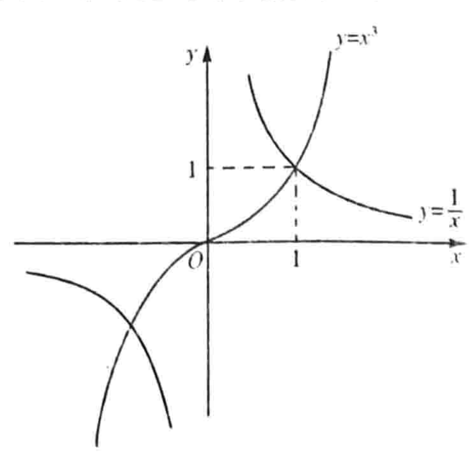

图 1-10

(2)指数函数

函数 $y=a^x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$)叫做指数函数.定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图形都经过$(0,1)$点.当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 单调减少.指数函数的图形均在 x 轴的上方,如图 1-11 所示.

(3)对数函数

函数 $y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0,a\neq1$)叫做对数函数.它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.图形都经过$(1,0)$点.当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加.当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少.对数函数的图形在 y 轴的右方,如图 1-12 所示.

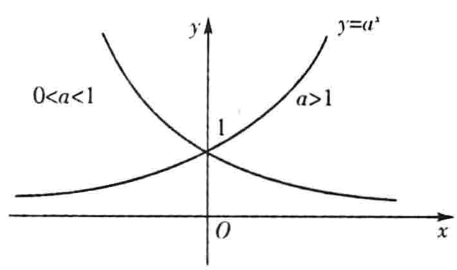

图 1-11

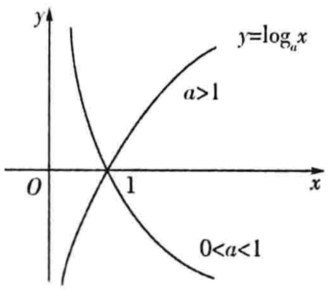

图 1-12

当 $a=e$ 时,$y=\log_e x$ 简记为 $\ln x$,它是常见的对数函数,称为自然对数.其中 $e=2.71828\cdots$,为无理数.

(4)三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$. $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数,它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,值域都是闭区间$[-1,1]$. $y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数,如图 1-13 所示.

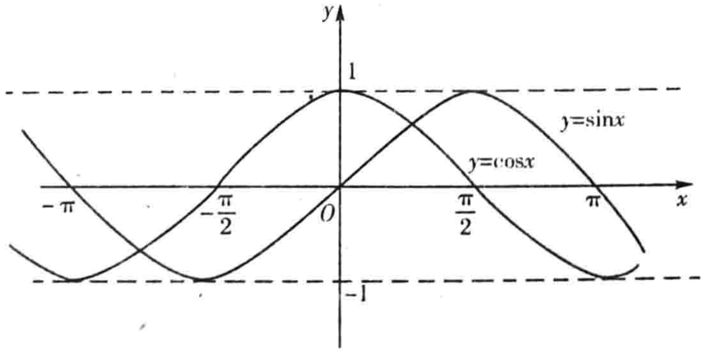

图 1-13

$y=\tan x$ 的定义域是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数)的全体实数,$y=\cot x$ 的定义域是 $x\neq k\pi$(k 为整数)的全体实数,它们的值域都是$(-\infty,+\infty)$,都以 π 为周期,都是奇函数.图形如图 1-14 及图 1-15 所示.

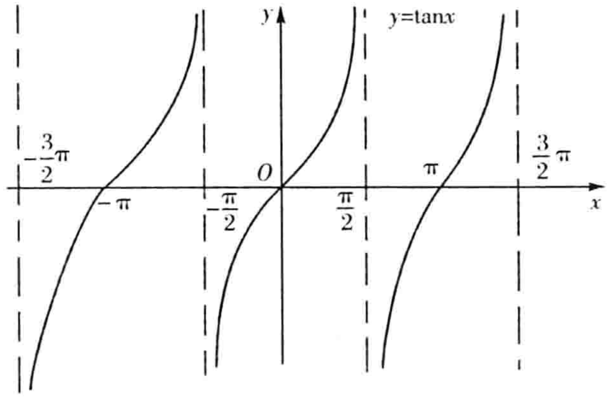

图 1-14

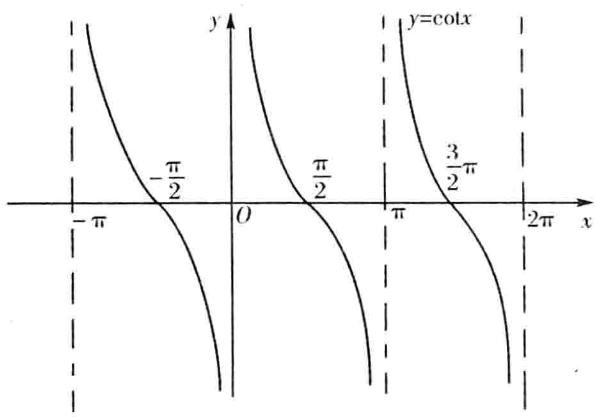

图 1-15

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$的定义域是 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 为整数)的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数,如图 1-16 所示.

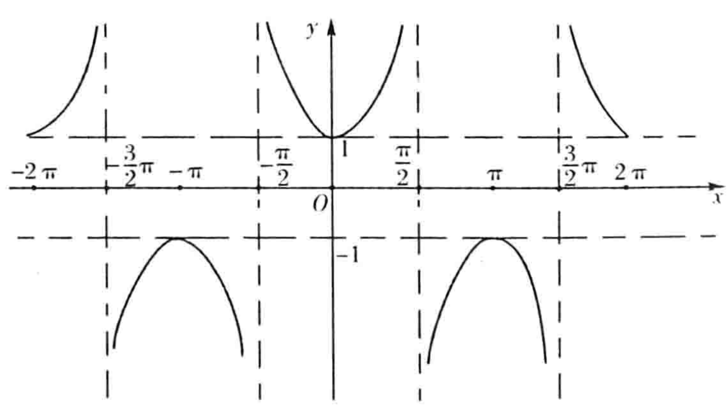

图 1-16

$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$的定义域是 $x\neq k\pi$(k 为整数)的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数,如图 1-17 所示.