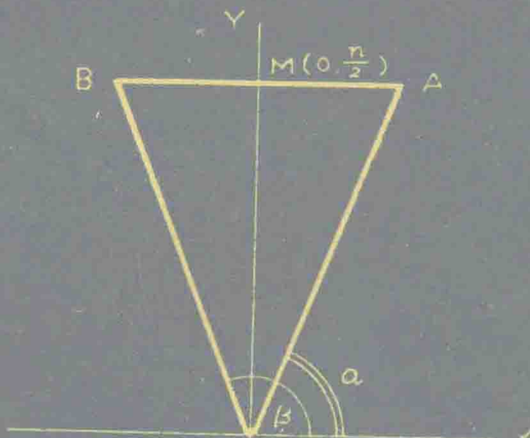
三角证题法

仇　岷　王云亭



河 北 人 民 出 版 社

三 角 证 题 法

仇 岷　王云亭

河北人民出版社

一九八三年·石家庄

三 角 证 题 法

仇 岷　王云亭

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　5 1/2 印张　112,000字　印数：1—55,350　1983年6月第1版
1983年6月第1次印刷　统一书号：7086·1117　定价：0.46 元

前　　言

本书是为提高中学生三角证题能力而编写的，也可供中学数学教师参考。

全书共两章，分别论述了三角恒等式与条件等式的证明方法。每章按证法分类，各类选择有代表性的例题，分析证题思路，归纳证明方法，提出注意事项。部分例题对几种不同的证法进行了对比，指出了捷径。书中还介绍了三角恒等式常用的技巧性证法。此外，配合各种类型的例题还选编了一定数量的习题，难度较大的，备有提示。

由于我们水平所限，错误难免，请读者指正。

编　者

一九八二年八月

目　　录

第一章　三角恒等式

如果对于含有三角函数的M、N两式，无论其中的自变量（在公共许可值的范围内）取何值，均有$M=N$成立，则称此等式为三角恒等式．

中学数学里三角恒等式的两端，一般都是由基本三角函数$\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$、$\csc x$经过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方等运算而构成的，因此，三角恒等式的两端一般是$\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$、$\csc x$这些中间变量的代数函数式，可称为三角函数的代数式．如果它们分别是上述中间变量的多项式、分式或无理式，则可称它们为三角函数的多项式、有理分式或无理式*．

平面三角教科书中的公式如：同角三角函数关系式，诱导公式，和、差、倍、半角的三角函数关系式及和差化积、积化和差公式等，都是最基本和应用最广的三角恒等式，它们是证明其它三角恒等式的工具．

注意：

① 三角恒等式中，可能不含有某些三角函数．如$\sin^2x+\cos^2x=1$，左端不含$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$、$\csc x$；右端

---

* 因本书中涉及的式子一般都是三角函数式，故在证题分析中，分别把它们简称为多项式、分式、无理式．

不含三角函数.

②三角恒等式中，可能含有两种或两种以上的自变量，并且各个自变量又可能以和、差、倍、分等形式组成不同的角. 如 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$，就含有 x、y 两种自变量，$\frac{x+y}{2}$、$\frac{x-y}{2}$是两种不同的角.

一 三角恒等式的一般证法

三角恒等式的两端形式不同，但实质是相同的，因此，消除两边形式上的差别，完成它们由异到同的转化，就是证明三角恒等式的基本思路.

证明时，要抓住以下三点：

①角的差别；

②三角函数种类（即名称）的差别；

③三角函数式结构上的差别.

找出两端角的差别，这是分析的重点，因为三角函数以角为自变量，所以，角在三角恒等式中占有重要地位. 角的变化常会导致三角函数种类及式子结构的变化，这样，当三角恒等式两端各角不全相同时，要重点考虑消除角的差别.

当式中各角相同时，应侧重考虑消除两端三角函数种类的差别.

三角恒等式的两端，普遍存在着式子结构上的差别，其中很多是可以随着角或三角函数种类的统一而消除，但也有些

三角恒等式两端的角与三角函数种类都相同，或可运用代数公式变形，这时一般都应侧重考虑改变三角函数式的结构.

证明三角恒等式的一般方法是“左右同一法”，即

左边较繁，从左推右；

右边较繁，从右推左；

两边皆繁，分别化简推出相同结果.

证明三角恒等式应注意的问题：

①三角恒等式的证明过程是有方向的变形，无论从左、右哪一边推证，都要注意另一端的需要，才能准确、迅速导出结论.

②三角恒等变形的主要依据是三角公式. 要掌握各公式的特征，充分理解它们在恒等变形中的作用，并且要注意公式的逆用及变形后的应用.（常用的三角公式及其变形公式见附录Ⅰ、Ⅱ.）

③三角公式常与代数公式配合使用.

下面举例说明三角恒等式的一般证法.

1. **化为同名三角函数的方法**

各角相同的三角恒等式，两端的主要差别是三角函数的名称. 这时应考虑向同名三角函数转化. 可利用同角三角函数的八个基本关系式.

（1）直接运用公式化为同名三角函数

例1 求证 $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-\csc^2 x}{\sec^2 x-1}=1-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

证明 左边 $=\dfrac{-1}{\operatorname{tg}^2 x}=-\operatorname{ctg}^2 x$,

右边 $=1-\csc^2 x=-\operatorname{ctg}^2 x$,

$\therefore$ 原式成立。

［注］ $\operatorname{ctg}^2 x-\csc^2 x=-1$，$1-\csc^2 x=-\operatorname{ctg}^2 x$ 是同角关系的变形公式。

例 2 求证 $(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$。

分析 左边先去括号，所得两项可以直接运用公式化简。

证明 左边 $=1-\sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$,

右边 $=\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha$,

$\therefore$ 原式成立。

(2) 将各三角函数化为正弦或余弦

当恒等式中三角函数种类较多，又不易直接应用公式证明时，可以把各三角函数都转化为正弦或余弦。

例 3 求证 $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$

$=\sec\alpha+\csc\alpha$。

证明 左边 $=\sin\alpha\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\cos\alpha\left(1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$$

$=\csc\alpha+\sec\alpha=$ 右边。

$\therefore$ 原式成立。

例 4 求证 $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\sin\alpha\ \cos\alpha$。

证明

$$左边=1-\frac{\sin^2\alpha}{\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\ \cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=1-1+\sin\alpha\ \cos\alpha=\sin\alpha\ \cos\alpha=右边。$$

∴ 原式成立。

例 5 求证

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\csc^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha。$$

分析 本题可以先把左边各三角函数转化为正弦和余弦，还可以在转化为正、余弦之前，对两个分式先进行局部范围内的化简。下面用两种方法对比证明：

证法 I

$$左边=\frac{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\dfrac{1 + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$- \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}}{\dfrac{1 + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}} - \frac{\cos\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha}$$

$= \cos\alpha\sin\alpha =$ 右边。

$\therefore$ 原式成立。

证法 II

$$左边 = \frac{1 + \mathrm{tg}\,\alpha + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha)} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sec^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

$=$ 右边。

∴ 原式成立。

〔注〕 证法Ⅱ注意了在适当的步骤上把各三角函数转化为正弦或余弦，所以简便。

(3) 根据式中三角函数的种类，转化为其中的一种或几种。

对于不含正弦和余弦的三角恒等式，应根据式中三角函数的种类，向同名函数转化。

若整个恒等式中仅含有正、余切两种三角函数，一般利用倒数关系化为正切（或余切）；若整个恒等式中含有正、余切及正、余割两类三角函数，则可利用平方关系将正、余割化为正、余切。

例 6 求证 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+2}=\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}\right)^2$.

证明 左边 $=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1-2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1+2\operatorname{tg}\alpha}=\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}\right)^2=$ 右边.

∴ 原式成立。

例 7 求证 $\sec^2\alpha(1+\csc^2\alpha)=2\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+3$.

分析 将左边正、余割分别化为正、余切，再去括号，合并同类项就可推出右边。

证明 左边 $=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$

$=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(2+\operatorname{ctg}^2\alpha)$

$=2\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+3=$ 右边.

∴ 原式成立。

习 题 一

证明下列恒等式：

1. $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\csc\alpha+1}\cdot\dfrac{1}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\csc\alpha-1}=\sec^2\alpha$.

2. $\dfrac{\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\csc\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha}$.

3. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

4. $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

5. $\dfrac{(1+\csc\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(1+\sec\alpha)(\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}=\operatorname{ctg}^5\alpha$.

6. $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

7. $\dfrac{1}{\cos\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\ \ \sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\ \ \cos\alpha}=\dfrac{\csc\alpha-\sec\alpha}{\sec\alpha\ \ \csc\alpha-1}$.

8. $\left(\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2=\dfrac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\csc^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

9. $\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha=\dfrac{(\sec^2\alpha-2)(\sec^2\alpha+\csc^2\alpha-1)}{\operatorname{tg}\alpha}$.

10. $\dfrac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha-4}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\left(\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\right)^2$.

2. 化为同角三角函数的方法

三角恒等式两端的角不全相同时，要侧重考虑向同角三角函数转化。

非同角三角函数间关系的一系列公式是完成向同角三角函数转化的工具．这些公式主要有：诱导公式，和、差、倍、半角的三角函数公式以及三角函数的和差化积、积化和差公式等．这部分公式多，要弄清每个公式可能完成哪些角与角之间的转化．具体方法一般有以下几种：

(1) 将式中各三角函数都化为单角 α 的三角函数

例 1 求证 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\operatorname{tg}\ 2\alpha$.

分析 左式含 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}-\alpha$，右式含 2α，可分别利用和角、倍角公式将它们转化为单角 α 的三角函数进行证明．

证明 左边 $=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

$$=\frac{1+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1+2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\text{右边}.$$

∴ 原式成立．

例 2 求证 $\frac{1-\cos^2 2\alpha-16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

分析 左边含 2α、$\frac{\alpha}{2}$ 及 α 三种角，分别正用、逆用二倍角公式可将式中各三角函数都转化为单角 α 的三角函数．

证明　左边 $=\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\ \cos^2\alpha-4\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha\ \cos^2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}=\frac{-\sin^4\alpha}{-\cos^4\alpha}$$

$=\mathrm{tg}^4\alpha=$ 右边。

∴　原式成立。

例 3　求证　$6\sec^2\alpha-8\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos 3\alpha}$.

分析　右边的分子、分母中都含 $\cos 3\alpha$ 的因式，应先约简，再向单角转化。

证明　右边 $=\dfrac{2\sin 3\alpha\cdot\cos 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos 3\alpha}$

$$=\frac{2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{6-8\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$=6\sec^2\alpha-8\mathrm{tg}^2\alpha=$ 左边。

∴　原式成立。

例 4　求证　$\mathrm{tg}\,A+2\mathrm{tg}\,2A+4\mathrm{tg}\,4A+8\mathrm{ctg}\,8A=\mathrm{ctg}\,A$。

分析　左边含有角 A、$2A$、$4A$、$8A$，欲与右边的角统一，应将 $2A$、$4A$、$8A$ 都化为单角 A。考虑左边后面一项

的角都是前一项角的 2 倍，所以可从后往前逐项展开，再与前项通分化简，这样逐次缩小角的倍数直至化为单角．

证明 左边 $=\operatorname{tg} A+2\operatorname{tg} 2A+4\operatorname{tg} 4A+8\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 4A}{2\operatorname{tg} 4A}$

$$=\operatorname{tg} A+2\operatorname{tg} 2A+4\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 4A+1-\operatorname{tg}^2 4A}{\operatorname{tg} 4A}$$

$$=\operatorname{tg} A+2\operatorname{tg} 2A+\frac{4}{\operatorname{tg} 4A}$$

$$=\operatorname{tg} A+2\operatorname{tg} 2A+4\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2 2A}{2\operatorname{tg} 2A}$$

$$=\operatorname{tg} A+2\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 2A+1-\operatorname{tg}^2 2A}{\operatorname{tg} 2A}$$

$$=\operatorname{tg} A+\frac{2}{\operatorname{tg} 2A}$$

$$=\operatorname{tg} A+2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2 A}{2\operatorname{tg} A}=\frac{\operatorname{tg}^2 A+1-\operatorname{tg}^2 A}{\operatorname{tg} A}$$

$=\operatorname{ctg} A=$ 右边．

$\therefore$ 原式成立．

〔注〕 ①这种逐项展开的办法，既避免出现复杂的繁分式，也使证明过程有规律可循．②本题也可利用三角级数求和法证明．

（2）根据式中给出的角，转化为其中的一种或几种．

例 5 求证 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{1}{4}-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$