



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐·王式安**唯一**考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学三

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥

(按姓氏笔划排序)

最佳搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

权威名师与命题专家联手打造
多角度讲解试题开拓解题思路
详尽地归纳总结典型解题方法

考试知识复习与能力培养并重
分析解答透彻易懂更有针对性
综合提高运用知识的分析能力

国家行政学院出版社



2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学三

主 编 ◎ **李永乐 王式安 季文铎**

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥
(按姓氏笔划排序)

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学三/李永乐,王式安
主编. —2 版. —北京:国家行政学院出版社,2013.12
ISBN 978-7-5150-1060-1

I. ①数… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—研
究生—入学考试—题解 IV. ①013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 290012 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识
的为正版图书,请读者注意识别。

书 名:数学历年真题权威解析. 数学三

主 编:李永乐 王式安

责任编辑:姚敏华

装帧设计:金榜图文设计室

出版发行:国家行政学院出版社

(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)

电 话:(010)68920640 68929037

编 辑 部:(010)68928761 68929009

印 刷:大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:21

字 数:498 千字

版 次:2014 年 3 月第 2 版

印 次:2014 年 3 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5150-1060-1

定 价:42.00 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换 电话:(010)51906740

版权所有 侵权必究



教材精华+考试大纲+习题集
练习难度分级 便携独立分册



突破典型例题 归纳解题方法和技巧
题型系统完整 循序渐进 覆盖面广
多方位多角度 在练习中透彻掌握知识点

全新改版上市 强化学练结合



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

数学系列优秀图书推荐

全国十二大考研辅导机构指定用书
2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学^{数学一}复习全书

基础篇

★为大三提前复习、在考研前打好基础的首选

主编：李永乐 王式安
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
出版：李永乐 王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学基础过关660题^{数学一}

主编：李永乐 王式安
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学^{数学一}复习全书

主编：李永乐 王式安 李文峰
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

线性代数辅导讲义

主编：李永乐

★最受学生欢迎“绝代”老书 ★连续11年最畅销复习资料！

★本书的最大特点★
内容实用：全面覆盖考试内容，结构清晰，重点突出，是考生备考的核心资料。
参考性强：历年试题，全题解析，帮助学习，提高解题能力，是考生备考的核心资料。

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

概率论与数理统计辅导讲义

主编：王式安

★本书的最大特点★
内容实用：全面覆盖考试内容，结构清晰，重点突出，是考生备考的核心资料。
参考性强：历年试题，全题解析，帮助学习，提高解题能力，是考生备考的核心资料。

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题权威解析^{数学一}

主编：李永乐 王式安 李文峰
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学公式的奥妙

主编：李永乐 王式安
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题权威解析 试卷版^(数学一)

主编：清华大学 李永乐 北京理工大学 王式安

内容：试题册 答题卡 答案 评分参考

郑重提示：必须严格按照真实考试的要求来完成本套试题！

2015 李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

李永乐 数学决胜冲刺6+2^(数学一)

主编：李永乐 王式安
编著：王式安 李永乐 王式安 李永乐 王式安
ISBN: 9787304071907

以上图书图片仅供参考，以市场最终出版图书为准

· 前言 ·

历年真题权威解析

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验,并结合近10年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来,研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化,而且各学科考查的重难点比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题把握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了,也因此,真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的,市面上的练习题,难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少,做真题,反复揣摩,这能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考。第二篇是历年的试题。第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯

的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路的分析,以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,从而检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 [weibo.com@金榜图书官方微博](http://weibo.com/金榜图书官方微博)。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2014年3月

金榜图书·图书目录

考研思想政治系列

书名	作者	出版时间
《思想政治理论超级红宝书》	徐之明	2014 年 1 月
《思想政治理论近年真题心解》试卷版	徐之明	2014 年 3 月
《思想政治理论红宝书逻辑图解》	徐之明	2014 年 3 月
《思想政治理论红宝书超级 900 题》	徐之明	2014 年 3 月
《考研思想政治红宝书背诵精华掌中宝》	徐之明	2014 年 10 月
《考研思想政治分析题专项突破一本通》	徐之明	2014 年 11 月
《思想政治理论历年真题解析及复习思路》	石 磊	2014 年 3 月
《思想政治理论名师核心讲义》	石 磊	2014 年 3 月
《思想政治理论强化训练 1500 题》	石 磊	2014 年 5 月
《思想政治理论考研冲刺最后 5 套题》	石 磊	2014 年 11 月
《考研思想政治终极预测 3 套卷》	石 磊	2014 年 12 月
《思想政治理论命题核心点名师精析》	米 鹏	2014 年 1 月
《思想政治理论精雕细刻 1000 题》	米 鹏	2014 年 5 月
《思想政治理论大串讲》	米 鹏	2014 年 11 月
《思想政治理论最后 20 天必背 20 题》	米 鹏	2014 年 11 月

考研数学系列

书名	作者	出版时间
《数学复习全书》(基础篇)	李永乐 王式安	2013 年 10 月
《数学基础过关 660 题》	李永乐 王式安	2013 年 12 月
《数学复习全书》	李永乐 王式安	2014 年 1 月
《数学历年真题权威解析》	李永乐 王式安	2014 年 3 月
《数学历年真题权威解析》(试卷版)	李永乐 王式安	2014 年 3 月
《李永乐数学决胜冲刺 6+2》	李永乐 王式安	2014 年 7 月
《线性代数辅导讲义》	李永乐	2014 年 2 月
《概率论与数理统计辅导讲义》	王式安	2014 年 3 月
《数学公式的奥秘》	单立波	2014 年 3 月
《概率论与数理统计辅导讲义》	曹显兵	2014 年 2 月
《高等数学(微积分)辅导讲义》	曹显兵 刘喜波	2014 年 3 月
《概率论与数理统计辅导讲义》	张 伟	2014 年 2 月
《线性代数辅导讲义》	张 伟	2014 年 2 月
《高等数学辅导讲义》	张 宇	2014 年 3 月
《大题满分技巧揭秘》	金榜考研数学命题研究组	2014 年 8 月
《难点一本通》	杨 超	2014 年 7 月

大学英语四、六级系列

书名	作者	出版时间
《命题人大学英语四级新题型预测试卷》(基础篇)	金榜大学英语四级命题研究中心	2014年1月
《命题人大学英语四级新题型预测试卷》(预测篇)	金榜大学英语四级命题研究中心	2014年2月
《命题人大学英语六级新题型预测试卷》(基础篇)	金榜大学英语六级命题研究中心	2014年2月
《命题人大学英语六级新题型预测试卷》(预测篇)	金榜大学英语六级命题研究中心	2014年2月
《命题人大学英语四级核心2000词》	金榜大学英语四级命题研究中心	2014年2月
《命题人大学英语六级核心3000词》	金榜大学英语六级命题研究中心	2014年2月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
《石春祯考研英语阅读理解220篇》(基础篇)	石春祯	2014年1月
《石春祯考研英语阅读理解220篇》(提高篇)	石春祯	2014年7月
《考研英语词汇速记宝典》	徐 绽	2014年6月
《考研英语美文诵读宝典60+30》(晨读)	徐 绽	2014年1月
《考研英语时文阅读宝典120+60》(夜读)	徐 绽	2014年1月
《考研英语词组734大冲关》	赵 敏	2014年5月
《30天突破考研英语长难句》	赵 敏	2014年5月
《60天突破考研英语阅读》	赵 敏	2014年2月
《30天突破考研英语翻译》	赵 敏	2014年2月
《考研英语决胜冲刺3套卷》(英语一、英语二)	赵 敏	2014年10月
《考研英语写作冲刺30篇》	赵 敏	2014年10月

考研专业课系列

	书名	主编	出版时间
教 育 学	考研教育学高分必备2000题	金榜考研教育学命题研究中心	2014年4月
	考研教育学历年真题权威解析	金榜考研教育学命题研究中心	2014年5月
	考研教育学终极预测试卷	金榜考研教育学命题研究中心	2014年9月
历 史 学	考研历史学高分必备2000题	金榜考研历史学命题研究中心	2014年4月
	考研历史学历年真题权威解析	金榜考研历史学命题研究中心	2014年5月
	考研历史学终极预测试卷	金榜考研历史学命题研究中心	2014年9月
心 理 学	考研心理学高分必备2000题	金榜考研心理学命题研究中心	2014年4月
	考研心理学历年真题权威解析	金榜考研心理学命题研究中心	2014年5月
	考研心理学终极预测试卷	金榜考研心理学命题研究中心	2014年9月
西 医	《刘应科考研西医综合辅导讲义》(上、下)	刘应科	2014年1月
	《刘应科考研西医综合核心考点突破与速记》(口袋版)	刘应科	2014年3月
	《刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路》	刘应科	2014年4月
	《刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路》(试卷版)	刘应科	2014年4月
	《刘应科考研西医综合配套5000题》	刘应科	2014年8月
	《刘应科考研西医综合终极预测试卷》	刘应科	2014年11月
中 医	《刘应科考研中医综合辅导讲义》(上、下)	刘应科	2014年1月
	《刘应科考研中医综合核心考点突破与速记》(口袋版)	刘应科	2014年3月
	《刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路》	刘应科	2014年4月
	《刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路》(试卷版)	刘应科	2014年4月
	《刘应科考研中医综合配套5000题》	刘应科	2014年8月
	《刘应科考研中医综合终极预测试卷》	刘应科	2014年11月

· 目 录 ·

历年真题权威解析

第一篇 最新真题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)	1
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案	5

第二篇 历年真题

2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题	15
2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题	18
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题	21
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	24
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题	27
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	30
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	33
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	36
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	39

第三篇 真题解析

第一部分 微积分	42
第一章 函数 极限 连续	42
第二章 一元函数微分学	73
第三章 一元函数积分学	111
第四章 多元函数的微分学	141

第五章	二重积分	156
第六章	无穷级数	172
第七章	常微分方程与差分方程	187
第二部分	线性代数	195
第一章	行列式	195
第二章	矩阵	202
第三章	向量	218
第四章	线性方程组	231
第五章	特征值与特征向量	249
第六章	二次型	264
第三部分	概率论与数理统计	275
第一章	随机事件和概率	275
第二章	随机变量及其分布	280
第三章	多维随机变量的分布	285
第四章	随机变量的数字特征	302
第五章	大数定律和中心极限定理	315
第六章	数理统计的基本概念	317
第七章	参数估计	321

第一篇 最新真题

绝密 ★ 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 (三)

(科目代码:303)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸试题册上答题无效。
3. 填(书)写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题卡和试题册按规定交回。

姓 名	考 生 编 号											

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$. (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

(3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是

(A) $a = 0$. (B) $b = 1$. (C) $c = 0$. (D) $d = \frac{1}{6}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$. (B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$. (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

(A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

(8) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布

为

(A) $F(1, 1)$. (B) $F(2, 1)$. (C) $t(1)$. (D) $t(2)$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$ (P 为商品的价格), 则该商品的边际收益为_____.

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ _____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设平面内区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y) e^x.$$

若 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 EY .

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}, P\{X=1\} = \frac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(I) 求 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 A

【分析一】

直接法: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > 0$, 则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

【分析二】

排除法: 若取 $a_n = 2 + \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(B) 和(D) 都不正确;

若取 $a_n = 2 - \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(C) 不正确

故应选(A).

(2)【答案】 C

【分析一】

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x + \sin \frac{1}{x} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0 = b$$

所以曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y = x$, 故应选(C).

【分析二】

考虑曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 纵坐标之差在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x + \sin \frac{1}{x} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

则直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的一条斜渐近线, 故应选(C).

【评注】 由渐近线的定义可知, 直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$. 【分析二】直接利用了该结论.

(3)【答案】 D

【分析一】

由 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ 知, $\tan x$ 的泰勒公式为

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + (d - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0$$

则 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 故应选(D).

【分析二】

显然, $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2}$$

由上式可知, $b = 0$, 否则, 等式右端极限为 ∞ , 则左端极限也为 ∞ , 与题设矛盾.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2c}{3x} + d - \frac{1}{3}$$

则 $c = 0, d = \frac{1}{3}$. 故应选(D).

(4) **【答案】** D

【分析一】

由于 $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$, 则直线 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 过点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$, 当 $f''(x) \geq 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是凹的, 曲线 $y = f(x)$ 应位于过两个端点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$ 的弦 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 的下方, 即

$$f(x) \leq g(x)$$

故应选(D).

【分析二】

令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$F'(x) = f'(x) + f(0) - f(1), F''(x) = f''(x).$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $F''(x) \geq 0$. 则曲线 $y = F(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是凹的, 又 $F(0) = F(1) = 0$, 从而, 当 $x \in [0, 1]$ 时 $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

【分析三】

令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)[(1-x) + x] - f(0)(1-x) - f(1)x \\ &= (1-x)[f(x) - f(0)] - x[f(1) - f(x)] \\ &= x(1-x)f'(\xi) - x(1-x)f'(\eta) \quad (\xi \in (0, x), \eta \in (x, 1)) \\ &= x(1-x)[f'(\xi) - f'(\eta)] \end{aligned}$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f'(x)$ 单调增, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, 从而, 当 $x \in [0, 1]$ 时 $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

(5) **【答案】** B.

【分析】 数字型行列式, 有较多的 0 且有规律, 应当有拉普拉斯公式的构思.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2.$$

(6) **【答案】** A.

【分析】 记 $\beta_1 = \alpha_1 + k\alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + l\alpha_3$. 则

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix}.$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 3 阶可逆矩阵, 故 $r(\beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix} = 2$, 即 $\alpha_1 + k\alpha_3,$