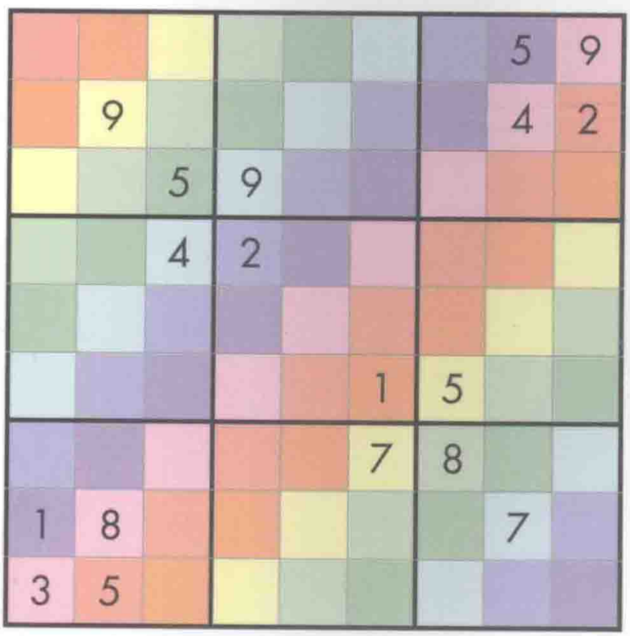
理性派

身边的数学译丛

数独了不起：

全世界最流行的填字游戏背后的数学

[美] Jason Rosenhouse
Laura Taalman 著
肖华勇 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

丛

数独了不起：

全世界最流行的填字游戏背后的数学

［美］Jason Rosenhouse
Laura Taalman 著
肖华勇 译

机械工业出版社

本书通过一百多幅彩图和丰富的数独、幻方和变形数独等谜题，从一个侧面真实地讲述了数学特别是高等数学到底是怎么一回事。本书是一本数学书，同时，更是一本趣味盎然的谜题书。

总共有多少种数独？有多少种 3×3 的块可以作为数独的一部分？一个有唯一解的数独至少要包含多少个数字？求解数独题目到底需不需要数学？作者通过本书展示了一个事实，那就是通过回答上面这些问题，可以打开一扇通往丰富有趣的数学世界的门。在书中，作者讨论了数独同拉丁方、图论和多项式理论的联系。

书中的数独等题目非常新颖有趣，值得读者花时间钻研。

通过阅读本书，读者将极大地改变对数独的看法和对数学的看法。

北京市版权局著作权合同登记号：01-2013-3562

图书在版编目（CIP）数据

数独了不起：在世界最流行的填字游戏背后的数学/（美）罗森豪斯（Rosenhouse，J.），（美）塔尔曼（Taalman，L.）著；肖华勇译．—北京：机械工业出版社，2013.12

书名原文：Taking sudoku seriously：the math behind the world's most popular pencil puzzle

ISBN 978-7-111-44493-0

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①罗…②塔…③肖…　Ⅲ．①智力游戏②高等数学—研究　Ⅳ．①G898.2②O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 249226 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
版式设计：霍永明　责任校对：张　薇
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京汇林印务有限公司印刷
2014 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 11.75 印张 · 240 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44493-0
定价：49.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

本书为纪念马丁·加德纳（Martin Gardner），他展示了一代数学家将难题作为进入数学殿堂的一条通道的价值。

译者的话

——作为读者的感受

有一天，素不相识的韩编辑突然联系到我，请我翻译一本由美国人写的关于数独与数学的书《Taking Sudoku Seriously》，说是查阅到我在许多刊物上发表了不少关于数独的研究论文，希望找一个既懂数独又懂数学的人来翻译此书，觉得我很适合。随后我翻译了一章发过去，结果他很满意。于是正式开始了该书的翻译工作。

在翻译过程中，我把书中的每个数学公式都进行了推导和验证了，同时还修正了书中的一些小错误。书中给出的题目，也独立做了一遍；对书中作者的许多感受和寄语，也好好地用心去感受了。因此，我既是读书的译者，也是该书的一个忠实读者。在翻译和阅读过程中，我自身收获也特别大。感觉学到很多新的东西，在数学思想上也有很多新的感悟。翻译此书，真是十分值得！

通读此书后，觉得该书与国内许多书的写法有很大不同。在书中，作者列举了很多不同类型的数独题目，对每种数独类型不但介绍了其思想，而且给出了一些题目让读者去亲自玩一玩，增加了趣味性。但作者又不仅是把数独当成是一种游戏，还讲解了数独的许多知识和求解方法，特别阐述了数学不同分支与数独的联系和在数独中的应用。这样就把数独和相关的数学知识贯穿起来了。

在讲数独的过程中，作者还讲到许多学生学数学的状态，数学的发展特点，数学与计算机之间的关系，以及数学家在研究数学过程中的心理体验等。仔细读完此书，你不但会掌握许多的数独知识，而且对数学本身也会有许多新的了解和认识。这可能正是作者努力想要达到的效果，而不仅是为读者讲解数独的知识和用数学的方法来解决数独问题。

本书通过介绍求解数独的很多方法，讲解了很多数学原理。将读者带入到一个美妙的意境之中。书中有的文字写得比较琐碎甚至略显啰嗦，但仔细读来，则能体会到作者是为了将数学家对数学的那种美妙的感受徐徐道来，让你去慢慢品味，就像一个热恋中的人，向亲爱的恋人充满激情地描述自己内心喜爱的那种感觉。

作者在书中讲到一个知识点时，总是循序渐进，通过从简单的问题开始

讲解原理，然后再讲解如何解决复杂的问题。如在讲解标准的九宫数独前，先介绍简单一些的拉丁方，并指出标准的九宫数独是拉丁方中的Gerechte设计。这样就从拉丁方这个“源”讲到它的一个附加产品——数独，让读者更深地体会到数独在数学发展中的历史渊源。当对标准的九宫数独进行计数时，先讲计数原理，并讲解简单一些的四方格数独的计数；当讲解利用图论中染色理论处理标准的九宫数独时，先讲解四方格数独如何利用染色理论表达；当讲解利用代数知识建立标准的九宫数独的方程时，先讲解四方格数独如何建立方程。最后指出，数独，图论中的染色理论，代数的方程表达，都是同一个东西的不同表达方式。这样，不同的知识既能分开讲解，又能把它贯穿在一起。

在书中，许多时候为了把某个数学原理讲清楚，作者不惜迂回曲折，通过很多其他方面的例子来加以阐述。所以读此书，不仅会读到许多数独方面的知识，更重要的是体会其中讲解的数学思想和原理。每读一次，我都能感觉到数学思想的深邃和意境的美妙。我想，要不是一个有深厚数学功底和对数学美的欣赏者，是无论如何也写不出这种味道的。例如，当碰到对数独如何计数这个十分复杂的问题时，作者说“该怎么办呢？欢迎来到数学研究的世界看看。那种没有希望的困惑心情，不知道该如何下手解决问题的心情，是数学家在他们的职业生涯中经常体验到的一种生活。它常常使人产生挫败感，但却又使人受到激励。问题越不好解决，当他最后解决时就会越有成就感。”

书中不仅讲解了数独的很多知识以及数独与许多数学分支的联系，作者还通过数独阐述了很多数学的思想和观点。如对数学难题的态度，作者说“有时候在解决一个问题走入困境后，突然灵光一闪有了答案就会大叫一声‘找到了！’。但通常这个答案是你在茫茫的荒郊野林游荡很久之后才会找到的。数学上的成功更多的来自坚持和艰苦的工作，而不仅是靠天赋。相反，更多人几秒钟找不到答案，就会转移去做别的事情，而把原来那个问题作为不重要的问题抛弃了。但数学家则会像看见一场战斗一样实实在在地加入进去。在一场场战斗中，他不想让这些问题打败他。问题越难，最终解决它就会越有成就感。”对于玩数独的态度，作者也很有意思，“快乐不仅是碰巧找到了我们所玩游戏的答案，相反，快乐是玩游戏的过程本身。”这些都是十分值得喜欢数学和数独的爱好者细细体会的。

译者：肖华勇

前　言

对每一个数学老师，当他在课堂上提出一个简单问题，却看见学生一双双茫然的眼睛时，都会感到一种挫败感。这种情况的发生可以把它归结为学生缺乏兴趣或害怕给出错误的答案。下面，我们将要阐述一个更加基本的观点。

许多人在当让他描述数学的时候，都会谈到枯燥的算术计算或代数中随意的规则。对他们来说，数学就是一些符号操作和没完没了的计算。这种观点是可以理解的，因为他们在中学和大学的数学课上可能很少看到数学的其他方面。

但数学家却并不是这样看待数学的。我们把算术和代数作为数学运算的一种工具，就像铁锤和锯子是木工的工具一样。对数学教授来说，数学是让人好奇的，充满想象的，是用来解决问题的。有许多问题是数学本身所独有的，在外部世界中很少能够找到。这是一种数学的世界观，可惜的是，它隐藏在事物背后，一般人无法看到并懂得这些。

让我们回到那一双双茫然的眼睛吧。通常这些问题数学家们自己表达起来没问题，但外行听起来则很茫然。学生不习惯数学家提出的问题，或者不明白数学首先是提出问题的。他们常常被问题搞糊涂了，相反有经验的人则会觉得很简单。我们在期望学生回答问题之前，首先需要让他们对数学产生思考。

让我们来讲讲数独。我们定义一个 9×9 的表格，要求每行、每列、每个 3×3 块都包含 $1\sim9$ 中每个数字恰好一次。一个数独谜题就是这样一个表格，在这个表格中有些格子已经填了数字，而另一些空着准备让你去填充。我们的目标就是填满所有的空格直到满足数独要求的条件。一个数独如果是有效的，那么最后完成后的结果是唯一的。

下面是一个实际例子。这是一个 3 级水平的数独谜题，其中 1 级最容易，而 5 级最难。

问题 1：数独热身

填每一个格子，要求每行，每列，每块包含 $1\sim9$ 中每个数字恰好一次。该题目的解答在书后。

在过去许多年里，数独已经成为许多报纸的常客。这些杂志小心地向读

	2	3						
	5		7				8	3
		4				2		7
				7			6	
			9		6			
	3			2				
3		5				8		
6	1				8		7	
						4	1	

者说明，数独中虽然存在数字，但却并不是数学问题。并特别强调只要有9个不同的符号就可以，比如前9个英文字母同样可以构成数独问题。

这种解释让数学家听起来有些惊奇。报纸上说数独并不涉及数学，实际是指它不涉及算术。另一方面，求解数独的这种推理恰恰就是数学本身的核心。很多本来讨厌做数学题的人却特别喜欢挑战数独谜题，这常常让从事数学这行的人感到很困惑。

对数学家来说，数独难题除了通过推理解答外，还可以立刻提出一大堆有趣的问题。总共有多少种数独？哪种变换可以把一个数独谜题变换成另一个数独谜题？一个有效的数独最少的空格数是多少？没有唯一解的数独的最大空格数是多少？有没有可能使得数独的 3×3 块里实际上是一个微型的半幻方（使得该块内每行每列的数字之和相等）？想要解决这些问题，我们不可避免的要用到数学。

除了这些，我们还利用数独和其变形作为进入让人思考的数学的大门。这是一本数学书，同时也是一本数独书。在本书中，数独除了作为挑战的难题给人带来单纯的娱乐外，同时也作为介绍数学概念的辅助工具。我们在整个过程中强调自问自答。当在自然地进行推理时，我们也引入了具有技术性的数学原理。

我们有大量的不同的读者。对高中或大学的学生，我们提供一个不同于以往所表达的数学观点。这是一个比起那些经过多年枯燥的符号训练的人所

理解的数学更实际的观点。对教师而言，我们希望提供一些这样的新奇理念，就是应当怎样把真正能让人思考的数学带进教室，让学生感兴趣并喜欢学习。对数学具有一定兴趣的外行人，我们提供大量的可以思考，并具有挑战性的题目。就算是数学教授也能看到所熟悉的数学在一些令人新奇方面的应用。

我们假定读者具有很少的高中数学知识。实际上，如果你快速地浏览全书，你就会注意到我们只使用了很少的数学符号。我们的重点集中在概念和推理上。正如人们常说的“是概念，而不是符号（notions，not notations）”。然而这并不是说，这本书读起来就很容易了。书中经常会讲到数学，如果你经常不得不停下来对我们提出的问题仔细思考，那么你不要惊奇。更要命的是，随着讲解的深入，很多内容变得越来越复杂。如果读者没有一些预先的数学知识，你会发现有的结论理解起来比先前更具有挑战性。然而，我们相信书中已经提供了足够的注释让读者来理解那些主要的概念。在少数情况下，我们选择提供更细致的方法和技术，在不失去讨论主线的情况下，省略了大量的计算。

本书的结构是这样安排的：在第 1 章，我们给出了求解数独的方法技术，讨论了什么是构成数学问题的一般性问题。在第 2 章，讨论了拉丁方的概念，拉丁方是数学家长期十分感兴趣的对象，数独只是拉丁方的一种特殊情形。第 3 章讨论了格列科拉丁方，它是理想拉丁方的扩展。第 4 章和第 5 章讨论了与数独有关的计数问题。特别是，我们给出了所有数独谜题的总数和从基本原理不同的角度来区分而得到的数独谜题总数。在我们讨论的课程中，我们不可避免的要从组合数学和抽象代数的角度来考虑数独的基本原理和概念。在第 6 章，我们讨论了怎样去发现有趣的数独。在第 7 章和第 8 章，考察了数独，图论和多项式之间的联系。在第 9 章，对极端数独进行了探讨。我们寻找了具有最大空格的数独，和它们初始时需要的最少数字。本书也列出了许多变形的数独。这里没有谈到数学，只有纯粹求解的乐趣！本书列出的所有数独，除少数来自其他刊物，其余都是第一次出现在书中。

最后要啰唆几句，书中很多问题的解答都在书后。在某些情况下，某个数独谜题的解答需要展示其讲解，因此就包含在书中了。对不同数独谜题的解答，只要地方允许，我们都放在不同页上，但在极少数情况下没法实现。这样的结果，使得你在手中放一个索引卡会很有帮助。可以让你在不想立刻看到答案时，把那页有答案的部分隐藏起来。

数学和科学的历史表明，它们可以从早期那些价值并不高的追击游戏中获得灵感。今天，随机理论是许多科学分支的一种重要工具，但同时也产生了许多冒险和具有随机性的游戏。在早期的计算机科学和人工智能中，更多的注意力放在相对不重要的计算机下棋这样的程序设计中。

对这本书我们有相似的雄心。也许此前你只是把数独作为娱乐和解闷的工具，仅用在长时间的飞行旅途中进行消遣。读完这本书你将会发现一条走进数学世界的通道。这是一个与你所想完全不同的，更加美妙的世界。

本书作者要感谢吉利·菲利普（Philip Riley)，他的计算机才能对本书中的数独构造提供了很大的帮助。没有菲利普颇费脑筋的数独方面的工作，本书的大部分是没法完成的。我们也要感谢丽贝卡工作室数独能手β版的测试者，他们检查了本书所有数独的正确性及可玩性。最后，我们要感谢牛津大学出版社的编辑科恩·菲利斯（Phyllis Cohen)，他在本书写作过程中提供了巨大的帮助和贯穿整个出版过程的支持。

目　　录

第1章　玩游戏：数学在求解数独中的应用

是什么让数独如此风靡世界呢？

想象你正在专心于自己的事情，脑子里想的都是实际当中的问题，突然某人挑战你，是否能用一个能测量4分钟和一个能测量7分钟的沙漏来测量一个9分钟的时间段。你也许会非常不高兴，会回答说只有很少的时间来做这样无聊的事情。但如果你开始同时关注这两个沙漏并仔细思考该如何实现这个时就会让你感到问题的不容易了。你注意到当4分钟的沙漏用完时，还有3分钟的沙留在7分钟的沙漏里，然后你开始寻找方法完成后面的问题。你会想，我能够实现3分钟，4分钟和7分钟，但怎样帮助我得到9分钟呢？然后你会放下你以前只专注于现实东西的思考，直到把这个问题解决。

你可能还面临这样一个问题，有两个杯子，一个装了一升水，另一个装了一升酒。装酒的杯子里的部分酒倒入了装水的杯子里并搅匀，然后装水杯子里的足够多的混合物又倒回装酒的杯子里，最后达到两个杯子里的液体一样多。问：装酒杯子里的水和装水杯子里的酒哪个多？这个问题吸引人的地方在于它不好回答。认真地说，我们该怎么回答好呢？在这个问题中，我们不知道开始有多少酒被倒入装水的杯子中，也不知道混合物倒回装酒的杯子时有多少水和多少酒。但我们总有一些东西可以去做，毕竟这不是一个没有答案的问题。你可能脑袋里会想：开始时纯净的酒被倒入水杯子里，然后混合的酒水被倒回酒杯子里……一旦你开始这样进行思考，你这一天剩余的安排就会取消了哦（这两个问题在本书第1.6节中都有解答）。

你可能会看到下面一个9×9的表格：

7						2	9	
				3	2			6
	1					5		3
	5		1			*C*	2	
	7	4	*B*	6	*A*	8	5	
	2				3		7	
6		7					3	
1			6	9				
	9	5						2

你被挑战用数字1~9填满表格中的空格，要求是每行、每列、每个3×3块都填写1~9中每个数字恰好一次。

你一定会注意到A周围有许多数字。由于A所在的列里有数字2和3，因此A一定不能填2或3，从A所在的行来看，有数字4~8，A所在的3×3块里有数字1，因此A这个空格只剩一个数字9可填，我们就可以高兴地在空格A里填上数字9了。

也许你注意到在第4行和第6行里有数字2，如果你想把数字2放在3×3块里的第4行或第6行，那么你的手指就会被第4行和第6行里数字2发出的激光击中。开个玩笑，这里不能填数字2。但是在3×3块里的某处必须要填写数字2，那么只有把

2 填写在空格 B 处了㊀。

突然，让所有已填数字的格子都发射激光吧！由于在第 6 行和第 9 列里都有数字 3，因此在中心偏右的 3×3 块里，只有 C 这个格子里可填写数字 3。这些数字填起来是如此有趣，我们最好把剩余的空格都填完，发掘出所有的秘密。

如你所知，这就是一个数独的例子。近年来，它变得非常流行。报纸上每天都在右边栏公布一些古老的谜题，飞机上的杂志也常有谜题的身影。书店的问题区也都被数独的贴子占据。无数的网站致力开发数独和它们的变形，也有许多面向大众的竞赛使得人们踊跃参加解题。

所有这些做数独的人都同意这样一个观点，尽管必须要在空格里填写数字，然而求解数独与数学没有任何关系。计算机科学家 Jean – Paul[17] 在《科学美国人》上提供了这样一个基本观点：

具有讽刺意味的是，尽管作为一个数字游戏，数独却只需用极少的数学知识就可以求解。实际上，不需要包括加法或乘法在内的任何运算就可以完成数独。而数独理论上可以采用任何九个不同的符号来填空格（九种符号可以是字母，颜色，图标等）。

这是一个有趣的论断，就像有的人会把算术当成是数学的同义词。我们会想起上面那段话中，从“不需要加法或乘法”到“很少的数学”有一个跳跃。如果你在前面的讨论中发现有任何好玩的事，那么你已经尝到了数学的味道。

1.1 数学与难题

数学家是专业的难题解答者。我们不是专门做计算的，我们的工作是找出难题让人求解并得到乐趣。人们之所以愿意去做这些，是因为历史上早期那些有趣的难题导致了大量有实际价值的知识的产生.

例如，在 17 世纪，一个既是贵族又是赌徒的名为 Chevalier de Mere 的人提出了一个“分数问题”。设想有两个人分别叫爱丽斯和比尔。他们轮流掷一个硬币，当头朝上时爱丽斯得 1 分，当尾朝上时，比尔得 1 分。首先获得 10 分的人为最后的赢家。当前的分数是 8 比 7 且爱丽斯领先。进一步假定，大量的奖金是爱丽斯和比尔共同出的，而且两人出的钱相同。如果游戏这时候停止了，我们应该给爱丽斯和比尔各分多少钱合理？

这个问题引起了布莱克·帕斯卡和皮埃·费马的注意。两个贵族都特别喜欢做这个难题。费马观察到最多再投四次硬币游戏就要结束，总共只有六种方式结束游戏。我们可以简单的列出所有情形。我们发现总共有 16 种情形，其中 11 种情形下爱丽斯会胜，比尔只有 5 种情形会胜。由于这 16 种情形是等可能的，因此我们把奖金的 11/16 分给艾丽斯，而把其余的分给比尔。帕斯卡同意这种分法，但比费马技高一

㊀ 原文为数字 9，应为笔误——译者注

筹的是，他对更一般的情形给出了两个玩家的分配方案。这样的研究形成了一条分界线，导致了现代概率论的产生（要了解更多信息和详细内容可参看 Rosenhouse 的书[34]）。

在公元前 5 世纪，哲学家芝诺提出了很多著名的悖论。其中一个悖论说明运动是不可能发生的。你看，假如要从 A 点运动到 B 点，你必须先走完路程的一半。要走完这一半的路程就必须先走完这一半的一半路程或要先走完总路程的 1/4。不管这路程多短，你要完成该段路程必须先要走完它的一半路程。这样看起来你要到任何地方，你都必须走无数多步，这就是运动为什么是不可能的原因。

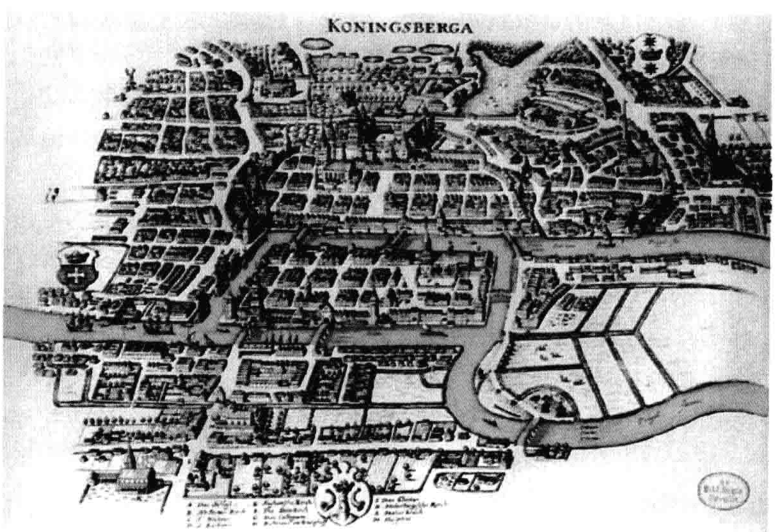
对芝诺的悖论直到 17 世纪才得到完满的回答。当艾萨克·牛顿和歌特·莱布尼茨都困惑于这样一个问题：为什么一段有限长度的距离不能分成无限多段？考虑芝诺的悖论的变形，他们注意到要走 1000m 路程必须先走完其一半路程，然后你必须先走完剩余路程的一半或总路程的 1/4。在这种情况下，1000m 的路程可以表达为无限多步的和。其表达形式为：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1。$$

这个公式让你产生了什么感觉？是否有一种将一个数表达为无限多个数的和的概念呢？坚持这条思路走下去，说不定会按照你的方法发明微积分呢[15]。

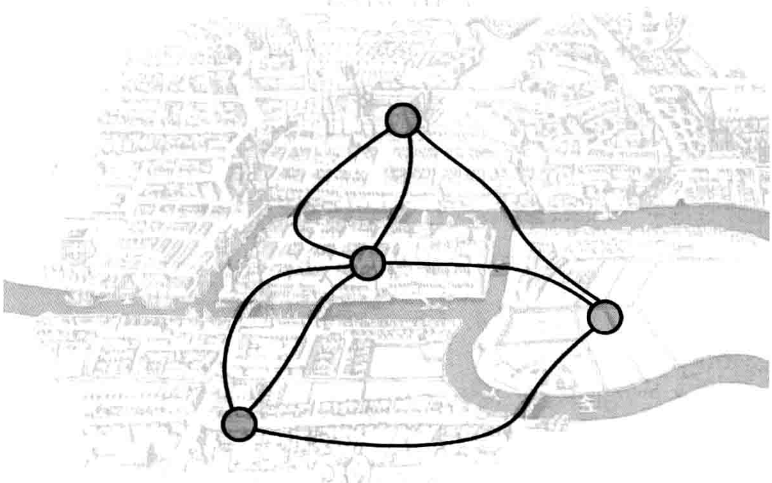
这里还有个关于哥尼斯堡的著名故事。普鲁士的哥尼斯堡（位于现在俄罗斯的加里宁格勒市）被一条河分成了四个部分，这四个部分由七座桥连接起来，如下面的地图所示：

哥尼斯堡的七桥问题



当地人很迷惑，为什么不能实现每座桥走一次而走遍所有的城市。在 1735 年，欧拉产生了用下面的抽象模型来描述这种情况的思想：每一块陆地在图上用一个点来表示，每座桥用一个边来表示，每条边连接两块陆地，这样桥和城市就用一个图来成功表示了。

哥尼斯堡的七桥问题的图的表达



欧拉注意到每个顶点由奇数条边连接。你可以想象在这个城市行走。对每个城市（顶点），每次你先进入，然后离开，这样对每个顶点你就用掉两条边。这就意味着你如果要走完整个城市（所有顶点），只有开始点和结束点是奇数条边，而其他顶点必须是偶数条边。由于哥尼斯堡的七桥问题不满足这个条件，故当地居民自然无法完成他们的设想。

在图中每个顶点连接的边数称为该顶点的**度**，欧拉发现为了实现走过每条边恰好一次，该图或者是有恰好两个顶点是奇数（这两个顶点分别是开始点和结束点）条边，或者没有顶点有奇数条边（这种情况下开始点和结束点相同）。如果有不同的开始点和结束点，具有这样走法的路径称为**欧拉路径**，如果存在从开始点出发又回到起点的回路，则称为**欧拉圈**。

让人更惊奇的是，在一个图中要求有两个或没有顶点有奇数条边相连并不是一个必要条件，而是一个充分条件。换句话说，如果一个图中恰好有两个或没有顶点有奇数条边相连，则欧拉路径或欧拉圈是存在的。

欧拉的突破在于他有这样一种洞察力，能将混沌不清的问题转化为清晰的数学问题来表达。这也开辟了数学上一个著名的分支——图论，该方向在世界上经久不衰。