数学

高中毕业生复习资料

GAOZHONGBIYESHENGFUXIZILIAO

河南人民出版社

高中毕业生复习资料

数　学

（下）

河南省教育厅
河南教育学院　教材教学研究室

河南人民出版社

第五章　圆

圆是一种重要的平面曲线图形，它与前面几章有着密切的联系，通过对关于圆的知识的学习，一方面为解决前面的问题提供新的条件，一方面为进一步学习几何问题打下基础.

本章的重点是圆的一些重要性质，直线与圆、圆与圆的相切，与圆有关的角及与圆有关的比例线段定理. 学好圆的重要性质是学好这一章的基础，是以后学习图形性质的重要依据；直线与圆，圆与圆相切问题是位置关系中的主要问题；与相切有关的定理，与圆有关的角的定理及与圆有关的比例线段定理，在论证、计算和作图中有着广泛的应用.

要掌握正多边形和圆的有关计算公式.

对于命题的四种形式及其相互关系，轨迹的概念，反证法这些比较难接受的内容，要通过例题和练习加深理解.

一、提　要

(一)圆的基本性质

1.圆的定义

圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合，定点叫做圆心，定长叫做圆的半径。

2.确定圆的条件

（1）已知圆心和半径，决定一个圆；

（2）不在同一直线上的三个点，决定一个圆。

3.圆的基本性质

（1）圆是轴对称图形，经过圆心的任一直线都是对称轴。

（2）圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心。

（3）弦、弧和直径之间的关系：

① 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧；

② 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

③ 弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

④ 垂直于弦并且平分弦所对的一条弧的直线经过圆心、平分弦，且平分弦所对的另一条弧。

（4）圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系：

① 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

② 在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦心距中有一组量相等，那么所对应的其余各组量就都分别相等。

（5）同圆或等圆的半径相等；直径相等；直径是最大的弦。

（二）直线和圆的位置关系

1.直线和圆的位置关系

设⊙O的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，

$$\left.\begin{array}{l}\text{（1）若}d>r\text{，则 }l\text{ 与⊙}O\text{ 相离；}\\ \text{（2）若}d=r\text{，则 }l\text{ 与⊙}O\text{ 相切；}\\ \text{（3）若}d<r\text{，则 }l\text{ 与⊙}O\text{ 相交。}\end{array}\right\}\text{（反之也成立）}$$

2.切线

（1）定义：和圆只有一个公共点的直线叫做圆的切线。

（2）判定：

① 根据切线的定义判定。

② 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

③ 直线与圆心的距离等于圆的半径，则此直线为圆的切线。

3.性质

（1）经过圆心垂直于切线的直线必经过切点；

（2）经过切点垂直于切线的直线必经过圆心；

（3）圆的切线垂直于经过切点的半径。

4.切线长

（1）定义：圆的切线上一点和切点之间的线段的长，叫

做从这点到圆的切线的长.

(2) 定理：从圆外一点到圆的两条切线的长相等.

5.三角形的内切圆

(1) 和三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆.

(2) 定理：三角形三个内角的平分线相交于一点，这一点到三角形各边的距离相等.

(三)圆与圆的位置关系

1.两圆的位置关系(见下表)

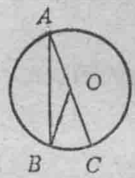
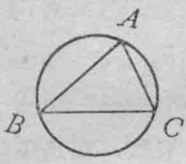
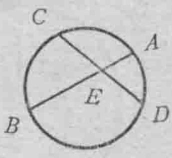
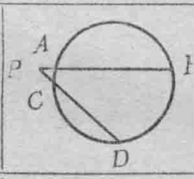
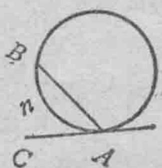
圆心距 d 与两圆半径 R、r 的关系	两圆的相互位置
$d>R+r$	外离
$d=R+r$	外切
$R-r<d<R+r\ (R\geq r)$	相交
$d=R-r\ (R>r)$	内切
$d<R-r\ (R>r)$	内含
$(d=0)$	同心

2.关于两圆相交、两圆相切的定理

(1) 相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦；

(2) 相切的两圆的连心线必经过切点.

(四)与圆有关的角(见下表)

名称	定义	图形	度量	性质
圆心角	顶点在圆心的角		$\angle BOC \overset{m}{=} \overset{\frown}{BC}$	1.同弧或等弧上的圆心角等于圆周角的两倍 2.同弧或等弧的圆周角相等 3.直径上的圆周角是直角 4.弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角 5.如果两弦AB、CD相交于圆内于E,那么 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$ 6.如果两条割线PAB、PCD相交圆外于P,那么 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 7.如果PC切圆于C,PAB是割线,那么 $PC^2=PA\cdot PB$
圆周角	顶点在圆上,并且两边都和圆相交的角		$\angle BAC \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	
圆内角	顶点在圆内,并且两边都和圆相交的角		$\angle BEC \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})$	
圆外角	顶点在圆外,并且两边都和圆相交的角		$\angle BPD \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC})$	
弦切角	顶点在圆上,并且一边和圆相交,另一边和圆相切的角		$\angle BAC \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AnB}$	

(五)正多边形和圆

1.圆内接四边形的判定

(1) 一组对角互补的四边形内接于一圆；

(2) 一个外角等于它的内对角的四边形内接于一圆；

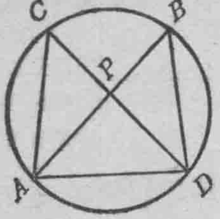


图 67

(3) 同底同侧的两个三角形 ACD 与 ABD 若 $\angle ACD=\angle ABD$，则 A、B、C、D 四点共圆.

(4) 经过一点 P 引两条直线，在这两条直线上，从 P 点分别取 PA、PB 和 PD、PC，若 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆.

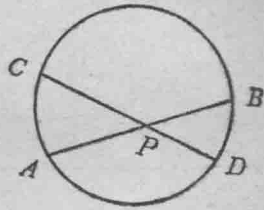


图 68

(5) 从一点 P 引两条射线，在这两条射线上，从 P 分别取 PA、PB 和 PC、PD，若 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A、C、D、B 四点共圆.

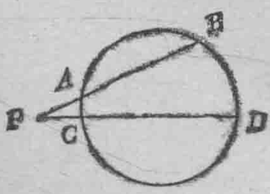


图 69

2.圆内接四边形的性质

(1) 圆内接四边形对角互补；

(2) 圆内接四边形任一外角等于它的内对角。

3.圆的外切四边形的两组对边的和相等。

4.正多边形

(1) 定义：各边相等、各角相等的多边形叫做正多边形。

(2) 性质：任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆。

5.正多边形的有关计算

如果正 n 边形的中心角、半径、边长、边心距、周长、面积分别是α_n、R、a_n、r_n、P_n及S_n（如图70），那么

(1) $\alpha_n=\dfrac{360°}{n}$；

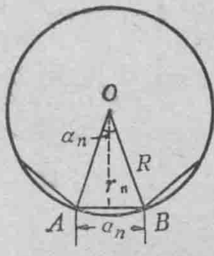


图 70

(2) $a_n=2R\sin\dfrac{180°}{n}$；

(3) $r_n=R\cos\dfrac{180°}{n}$；

(4) $R^2=r_n^2+\dfrac{1}{4}a_n^2$；

(5) $P_n=na_n$；

(6) $S_n=\dfrac{1}{2}n\cdot r_n\cdot a_n=\dfrac{1}{2}r_nP_n$。

6.圆周长、弧长、面积计算公式

(1) 圆周长：$c=2\pi R=\pi d$；

(2) 弧长：$l=\frac{n\pi R}{180}$（n 表示弧所对的圆心角的度数）；

(3) 圆面积：$S=\pi R^2=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{1}{2}CR$；

(4) 扇形面积：$A=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$（$l$ 表示$n°$ 的弧长）；

(5) 弓形面积：$S_{弓形}=A_{扇形}\pm S\triangle AOB=\frac{n\pi R^2}{360}-\frac{1}{2}R^2\sin n°$（如图71）。

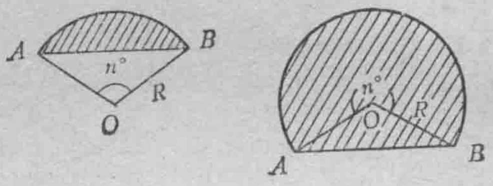


图 71

(六)点的轨迹

1.四种命题间的关系

判断一件事情的句子叫做命题，它由题设和结论两部分组成。命题有四种形式：

（1）原命题：四边相等的四边形两对角线互相垂直。

（2）逆命题：两对角线互相垂直的四边形四边相等。

（3）否命题：四边不相等的四边形两对角线不互相垂直。

（4）逆否命题：两对角线不互相垂直的四边形四边不相等。

用A和B分别表示原命题的题设和结论，用$\overline{A}$和$\overline{B}$分别表示A和B的否定时，则四种命题之间的关系可用下图表示。

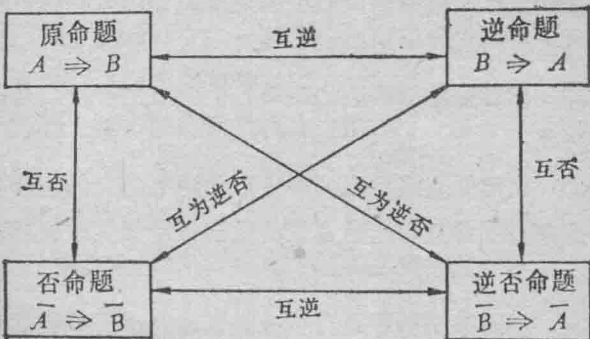


图 72

原命题正确，它的逆命题和否命题不一定同时正确。

原命题正确，它的逆否命题一定正确。从而有

原命题$\Longleftrightarrow$逆否命题。

由两个互为逆否命题的等价关系知道，当证明某个命题有困难时，可改证它的逆否命题来代替原命题的证明。

2.点的轨迹

（1）定义：具有某种性质的点的集合，叫做具有这种性质的点的轨迹。

（2）要证明某图形F是符合某个条件C的点的轨迹，需要证明下面的两个命题：

① 图形F上的所有点，都符合条件C；

② 符合条件C的所有点，都在图形F上。

（3）平面内点的轨迹定理

① 和一个已知点的距离等于已知长的点的轨迹，是以已知点为圆心，已知长为半径的圆。

② 和已知线段的两端点的距离相等的点的轨迹，是这线段的垂直平分线。

③ 和已知角的两边的距离相等的点的轨迹，是这个角的平分线。

④ 到已知直线的距离等于已知距离的点的轨迹，是平行于这条直线并且和这条直线的距离等于已知距离的两条直线。

⑤ 和两条平行线距离相等的点的轨迹，是和这两条平行线距离相等的一条平行线。

⑥ 和已知线段的两个端点的连线的夹角等于已知角的点的轨迹，是以已知线段为弦，所含的圆周角等于已知角的两段弧（端点除外）。

3.基本作图

（1）作一条线段等于已知线段；

（2）作一条线段等于n条已知线段的和；

(3) 作一条线段等于两条线段的差；

(4) 作一条线段等于已知线段的 n 倍($n\in N$)；

(5) 把一条线段 n 等分；

(6) 作一个角等于已知角；

(7) 作已知角的平分线；

(8) 过已知直线上（外）的一点，作该直线的垂线；

(9) 作已知线段的垂直平分线；

(10)过已知点作已知直线的平行线；

(11)依已知条件作三角形：

① 已知三边；② 已知两边及其夹角；③ 已知两角及夹边；④ 已知一边和一锐角作直角三角形；⑤ 已知斜边和一直角边作直角三角形。

(12)作三角形的内切圆和外接圆；

(13)过一点作已知圆的切线；

(14)把圆周分为六、三、四、五等份，并作出正六边形、正三边形、正方形、正五边形和正五角星；

(15)在已知线段上作含有已知圆周角的弓形弧；

(16)作两圆的公切线；

(17)作直线和圆弧的连接；

(18)作圆弧和圆弧的连接。

(七)反 证 法

有些命题的证明用直接证法往往不能达到目的，这时可

改证其等价的命题成立，亦即否定原命题的结论为真，然后由此引出一种不合理的现象，从而证明原命题的结论为真。这种证明方法通常称反证法。

反证法证明的一般形式是：

论题：A。

证明：设非A真，若非A真，则$\Rightarrow a\Rightarrow b\Rightarrow c$，而$c$不能成立，所以非$A$不真，既然非$A$不真，故$A$必真。

这种证明方法是先提出与原命题相矛盾的论题，再证明这反论题是假的，然后根据排中律（两个互相矛盾的命题不能同时都假或都真），必然推出原论题是真的。从这里不难看出，反证法的实质是从否定所要证明的命题的结论开始，根据已知的定理，由这一假定引出推论，直到得出这样的推论，它或与已知条件矛盾，或与已知定理矛盾，这一矛盾说明命题已被证明。比如，欲证原命题：若有A则有B有困难时，可改证其等价的命题：若没有B，则没有A。因为若没有B，则没有A，这与原命题有A矛盾，这一矛盾说明原命题已被证明。

例 若四边形中有一对对边中点的连线等于另一对对边的和的一半，则另一对对边必平行。

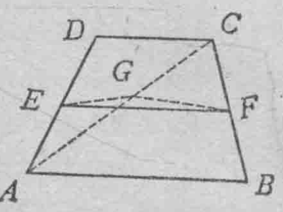


图 73

已知：如图73，在四边形 $ABCD$中，E、F分别是AD、BC的中点，且$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$。

求证：$AB \parallel CD$.

证明：假定AB不平行于CD，连结AC，取其中点G，连EG、FG，易知$EG \parallel CD$，$FG \parallel AB$，这说明EGF不是直线，于是$EF < FG + EG$.

$$\because \quad FG = \frac{1}{2}AB, \ EG = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore \quad EF < \frac{1}{2}(AB + CD).$$

这与已知条件$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$矛盾，这一矛盾说明必有$AB \parallel CD$.

二、范　例

例 1　如图，已知AB切$\odot O$于A，BO交$\odot O$于C，$AD \perp OB$于D，求证：$\angle CAD = \angle CAB$.

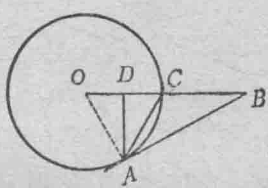


图 74

证明：连结OA，则$OA \perp AB$.

$\therefore \quad \angle CAB + \angle CAO = 90°$.

$\because \quad AD \perp OB$，$\therefore \quad \angle ADC = 90°$，

于是　$\angle CAD + \angle ACD = 90°$.

∵ $OA=OC$， ∴ $\angle CAO=\angle ACD$，

∴ $\angle CAD=\angle CAB$.

说明：遇有切线，常作过切点的半径。

本题证法很多，用下面三种添加辅助线的方法也可证明。

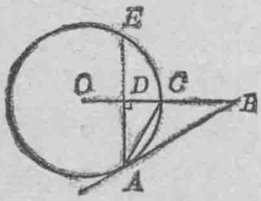


图 75

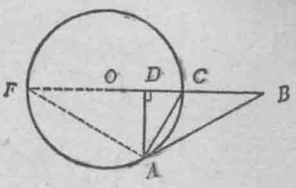


图 76

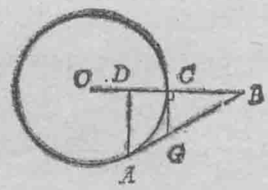


图 77

（1）如图75，延长AD交⊙O于E；

（2）如图76，延长BD交⊙O于F；

（3）如图77，作$CG\perp OB$交AB于G.

例 2 如图78，已知在⊙O中，AB是直径，CD切圆于P；CA和DB都是圆的切线，AD和BC相交于Q，PQ交AB于K，求证：$PK\parallel BD$，$PQ=QK$.

证明：∵ AB是直径，AC和BD是切线，

∴ $AC\parallel BD$，

$\therefore \quad \triangle CAQ \backsim \triangle BDQ$,

$\therefore \quad \dfrac{DQ}{AQ}=\dfrac{BD}{AC}$.

$\because \quad AC=PC$, $BD=DP$,

$\therefore \quad \dfrac{DQ}{AQ}=\dfrac{DP}{PC}$,

$\therefore \quad PQ /\!/ AC$, $PK /\!/ BD$.

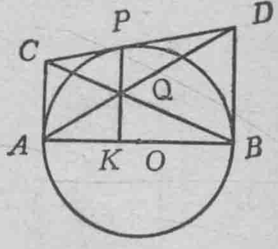


图 78

$\because \quad \dfrac{PQ}{AC}=\dfrac{DP}{DC}$, $\dfrac{QK}{AC}=\dfrac{BQ}{BC}$, 且$\dfrac{DP}{DC}=\dfrac{BQ}{BC}$,

$\therefore \quad \dfrac{PQ}{AC}=\dfrac{QK}{AC}$, $\quad \therefore \quad PQ=QK$.

说明：反复应用有关平行线和比例线段之间的相互关系是证明本题的关键。

例 3 如图79，已知两圆O及O'内切于A，大圆O的弦BC切小圆O'于D，连结弦AB、AC交小圆于P、Q，求证$PQ /\!/ BC$和$CD \cdot AP=BD \cdot AQ$.

证明：过A作两圆的公切线AT，则$\angle AQP=\angle PAT=\angle ACB$.

$\therefore \quad PQ /\!/ BC$,

$\therefore \quad \dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{AB}{AC}$,

$\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{DQ}$

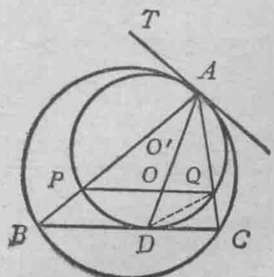


图 79