



普通高等教育“十二五”规划教材

计算结构力学

阎军 杨春秋 编著

10100
11111111101010100010100010001010101000101010000101110010101001001
110011



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

计算结构力学

阎 军 杨春秋 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据国家教育部力学专业教学指导委员会制定的工程力学专业规范对计算力学课程教学基本要求编写。全书共 5 章, 内容包括杆系结构位移法、杆系结构刚度阵法、直接刚度法计算桁架、直接刚度法计算平面刚架、直接刚度法计算空间刚架, 并将平面桁架程序设计、空间桁架程序设计、平面刚架程序设计、空间刚架程序设计列入附录。各章均附有习题, 并在书后给出了部分参考答案。

本书注重计算结构力学的基本原理、基本概念和基本方法。在内容编排上注重课程的基础性、应用性和教学的适用性。程序设计采用 C 语言, 符合国际大型通用结构计算程序的编制习惯, 附录中给出的计算结构力学源程序及设计使用说明, 工程实用性强, 结构化特点突出。

本书可作为普通高等学校工程力学专业及相关工科专业计算结构力学课程的教材, 也可供工程技术人员参考和应用。

图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学 / 阎军, 杨春秋编著. —北京: 科学出版社, 2014.6
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-040940-9

I. ①计… II. ①阎… ②杨… III. ①计算力学—结构力学—高等学校—教材 IV. ①0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 121114 号

责任编辑: 朱晓颖 张丽花 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 闫 磊 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2014 年 6 月第一次印刷 印张: 13 1/2

字数: 354 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书根据国家教育部力学专业教学指导委员会制定的工程力学专业规范对计算力学课程教学基本要求编写，内容包括杆系结构位移法，杆系结构刚度阵法，直接刚度法计算桁架，直接刚度法计算平面刚架和空间刚架，及平面桁架程序设计、空间桁架程序设计、平面刚架程序设计和空间刚架程序设计等，适用于计算结构力学课程的教学。

本书传承大连理工大学工程力学系在计算结构力学课程教学中的知识体系和风格特色，注重杆系结构力学计算机程序实现的基本原理、基本概念和基本方法。编写参考了国内外优秀教材。本书主要特点：

- (1) 计算程序采用 C 语言；
- (2) 增强教材内容的工程性；
- (3) 采用国际通用的力学符号；
- (4) 给出平面桁架、空间桁架、平面刚架、空间刚架的源程序；
- (5) 程序设计具有实用性和易读性。

在本书编写过程中，程耿东院士给予了热情的支持和鼓励，并提出了许多建设性意见。曹富新教授详细审阅了书稿，提出了具体修改意见。赵红华老师绘制了全书插图。研究生李栋参与了计算结构力学 C 语言程序设计和考题计算工作。在此一并深表谢忱。

本书得到教育部国家特色专业建设点项目及大连理工大学教材出版基金的资助。

限于作者水平，错误在所难免，恳请专家和读者给予批评指正。

作 者

2014 年 3 月

主要符号表

符号	名称
A	面积
D, d	直径
H	高度
l	长度、跨度
E	弹性模量
J	惯性矩
F	力
F_{Ax}, F_{Ay}	A 点 x 、 y 方向约束反力
F_N	轴力
F_S	剪力
F_T	拉力
M	弯矩
F	集中载荷
F_x, F_y, F_z	x 、 y 、 z 方向力的分量
q	分布载荷集度
A, B, C 等	表示位置
a, b, c 等	
θ	转角
R, r	半径
α	倾角、线膨胀系数
$[K]$	结构刚度阵
$\{U\}$	结构位移列阵总体坐标系节点位移
$\{F\}$	结构载荷列阵
$[T]$	坐标转换阵
$\{s\}$	总体坐标系杆端力
$\{S\}$	局部坐标系杆端力
$\{u\}$	局部坐标系杆端位移
$\sum F_x = 0$	
$\sum F_y = 0$	平衡方程
$\sum M_A = 0$	

目 录

前言

主要符号表

第 1 章 杆系结构位移法	1
1.1 概述	1
1.2 杆系结构位移法方程	3
1.2.1 两端固定的单元杆件由于端点位移产生的广义反力	3
1.2.2 两端固定的单元杆件由于载荷作用产生的广义反力	6
1.2.3 平衡方程	7
1.3 杆系结构位移法算例	15
习题	26
第 2 章 杆系结构刚度阵法	29
2.1 概述	29
2.2 坐标系统	29
2.2.1 局部坐标和总体坐标	29
2.2.2 载荷、杆端力、杆端位移和节点位移	30
2.3 坐标转换矩阵	31
2.4 局部坐标系单元刚度阵	34
2.5 总体坐标系单元刚度阵	36
2.6 结构刚度阵法方程	37
2.6.1 结构位移连续条件	37
2.6.2 结构刚度阵法方程	38
2.6.3 总刚度阵集合规律	40
2.7 杆端力计算	41
2.8 刚度阵法算例	42
习题	46
第 3 章 直接刚度法计算桁架	48
3.1 概述	48
3.2 结构模型数字化	48
3.3 独立未知位移	50
3.4 平面轴力杆单元刚度阵计算及其子函数	52
3.5 基本方程建立及总刚度阵累加	54
3.6 基本方程求解	58
3.7 轴力杆内力计算子程序	60

3.8	程序灵活应用及讨论	61
3.8.1	对称性的利用	62
3.8.2	装配内力问题	63
3.8.3	支座沉陷问题	64
3.8.4	温度应力问题	64
3.9	等带宽带状矩阵的应用	65
3.10	直接刚度法计算空间桁架	67
3.10.1	杆端力的转换关系	67
3.10.2	杆端位移的转换关系	68
3.10.3	杆端力与位移的关系	68
3.10.4	结构图形的数据化	69
3.10.5	独立的未知位移	69
3.10.6	单元刚度阵的计算	70
3.10.7	总刚度阵的形成	71
3.10.8	内力计算	71
	习题	72
第4章	直接刚度法计算平面刚架	74
4.1	概述	74
4.2	平面刚架结构模型数字化	74
4.3	平面刚架独立的未知位移	77
4.4	平面刚架单元刚度矩阵计算	78
4.5	平面刚架总刚度阵集合	81
4.6	平面刚架载荷列阵的形成	84
4.6.1	单根杆两端固定约束载荷作用下局部坐标系支承反力	84
4.6.2	支承反力的反作用力转换到总体坐标系形成节点等效载荷	87
4.7	平面刚架直接刚度法方程的求解	89
4.8	平面刚架求杆件截面内力	90
4.8.1	节点位移引起的距“左”端 x_p 处截面内力	90
4.8.2	两端固定杆件距“左”端 x_p 处截面内力	91
4.9	平面刚架程序的灵活应用	94
4.10	平面刚架节点有指定位移问题	95
4.10.1	指定位移为零	96
4.10.2	指定位移为某一定值	100
4.11	平面刚架半铰问题	102
4.12	平面刚架剪切变形影响问题	106
4.13	平面刚架刚性域影响问题	109
4.13.1	两端刚性域的单元刚度阵	109
4.13.2	两端刚性域单元杆的固端反力计算	111
4.14	平面刚架总刚度矩阵一维存储	112

习题	116
第 5 章 直接刚度法计算空间刚架	117
5.1 概述	117
5.2 空间刚架局部坐标到总体坐标的转换	118
5.3 空间刚架单元杆件的刚度阵	122
5.4 空间刚架位移连续条件及节点对号	127
5.5 空间刚架总刚度阵的集合	127
5.6 空间刚架载荷向量的形成	129
5.7 空间刚架子结构介绍	130
5.7.1 边界固定的各子结构分析	130
5.7.2 边界放松各子结构分析	132
5.7.3 子结构内部的位移	132
习题	133
附录 I 平面桁架程序设计	134
附录 II 空间桁架程序设计	149
附录 III 平面刚架程序设计	161
附录 IV 空间刚架程序设计	180
部分习题答案	202
参考文献	203

第 1 章 杆系结构位移法

1.1 概 述

位移法是求解静不定结构另一途径。位移法和力法在物理概念上是不同的，但在数学处理手法上是很相似的。

力法以多余约束力为基本未知数，因此未知数的数量就是静不定次数。而位移法以节点位移作为基本未知数，因此未知数的数量是动不定次数。

静不定次数是指结构多余约束的数量，将多余约束解除，代之以约束力，结构就成为在载荷及多余约束力作用下的基本体系，所以力法所用的基本体系是静定结构。

动不定次数是指结构的节点弹性位移自由度数，于是位移法所采用基本体系是将未知位移处增加约束的动定结构，增加约束处有指定的节点位移。如图 1-1 所示，将节点的线位移和角位移加以约束，令其有指定位移量的动定结构成为位移法所用的基本体系，其由一系列两端约束的单根梁所组成。

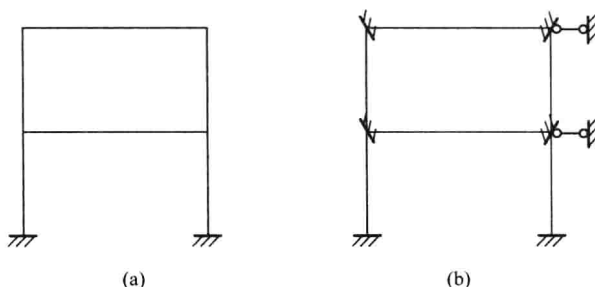


图 1-1

力法中未知的多余约束力首先满足平衡条件，同时在载荷及多余约束力作用下静定基本体系的位移状态应该满足原结构的变形协调条件，这个位移状态是以未知约束力及载荷来表达的，于是由变形协调条件唯一地确定这些多余约束力，从而可确定原结构的受力状态。

位移法中未知的节点位移首先满足体系的连续条件，即基本体系中相交的单根杆都有相同的节点位移，单根杆的内力及位移状态都已满足平衡和连续条件全部要求；同时，外载作用和节点位移在动定结构上引起的内力状态在节点处应一起满足平衡条件，这个内力状态都以节点位移来表达，于是由平衡条件唯一确定这些未知节点位移，从而确定结构的真实状态。

例如图 1-2(a)所示的单跨梁， A 端固定， B 端简支，承受均布载荷 q ，这是一个二次动不定结构，如果不计轴向变形，则只有一个弹性位移自由度，即为一次动不定结构，有一个未知的节点转角位移 θ_B 。如果将 θ_B 确定了，则全梁的内力位移状态均可以确定。

相应的基本体系动定结构如图 1-2(c)所示，是一个约束转角 θ_B 的动定结构，其 B 端应有真实的转角 θ_B ，符合结构的位移边界条件， θ_B 对基本体系会引起端弯矩，若以 $M_{BA\theta}$ 表示，则有

$$M_{BA\theta} = m_B \theta_B$$

设定 θ_B 以顺时针方向为正，其中 m_B 为单位转角所产生的端弯矩，也以顺时针方向为正， m_B 值可以应用微分方程求解或用力法求解而加以确定，可知此值为

$$m_B = \frac{4EJ}{l}$$

于是

$$M_{BA\theta} = \frac{4EJ}{l} \theta_B$$

载荷作用在动定结构上， B 端也将产生端弯矩，称为固端弯矩，这也可用微分方程或者力法求解加以确定，其值以 M_{FBA} 表示，以顺时针方向为正，对于图 1-2 (b) 所示的载荷，其在动定结构上引起的固端弯矩为。

$$M_{FBA} = \frac{ql^2}{12}$$

载荷及未知的节点位移 θ_B 的作用使 B 节点处满足原结构的平衡条件。

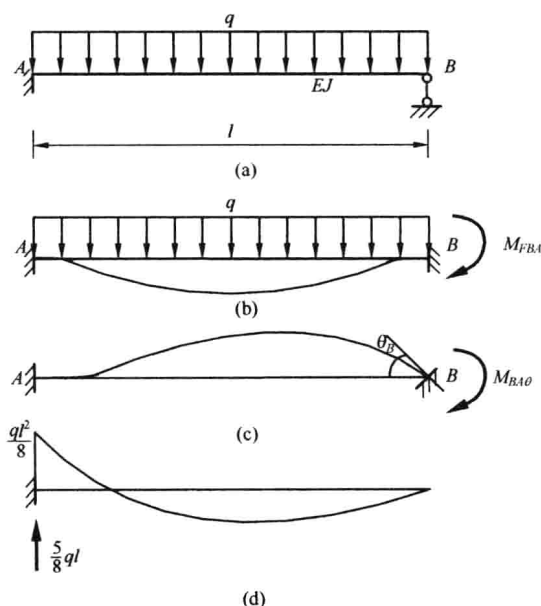


图 1-2

图 1-2 (a) 所示结构在 B 节点处的平衡条件应有

$$M_B = 0 \quad (1-1)$$

按照叠加原理， M_B 由载荷及指定位移 θ_B 引起的弯矩叠加而成，即有

$$M_B = M_{BA\theta} + M_{FBA}$$

将前述所得的 $M_{BA\theta}$ 和 M_{FBA} 代入上式，满足式 (1-1)，即得到这个问题的位移法基本方程

$$\frac{4EJ}{l} \theta_B + \frac{ql^2}{12} = 0$$

由此解得

$$\theta_B = -\frac{ql^3}{48EJ}$$

式中负号表示实际位移是逆时针方向的转角。 θ_B 确定之后, 结构的其他内力位移都可以按照叠加原理算出。

例如 A 端的支反力和反力矩为

$$F_A = F_{FA} + r_A \theta_A, \quad M_{AB} = M_{FAB} + m_A \theta_B$$

式中, F_{FA} 、 M_{FAB} 分别为载荷作用下基本体系上 A 端的支反力及反力矩; r_A 、 m_A 分别为单位 θ_B 在基本体系上 A 端产生的支反力及反力矩。这些量都是可以算得的, 于是实际上 F_A 和 M_{AB} 有如下各值:

$$F_A = \frac{ql}{2} - \frac{6EJ}{l^2} \left(-\frac{ql^3}{48EJ} \right) = \frac{5ql}{8}$$

$$M_{AB} = -\frac{ql^2}{12} + \frac{2EJ}{l} \left(-\frac{ql^3}{48EJ} \right) = -\frac{ql^2}{8}$$

式中负号表示 M_{AB} 是逆时针方向的。这样全梁的弯矩分布就可确定, 如图 1-2(d) 所示。

通过上述简单例题分析, 可知位移法的基本特点是: 首先以节点位移为基本未知数, 以约束节点位移的动定结构为基本体系, 节点位移及杆内位移状态预先满足连续条件, 最后由平衡条件决定未知位移, 从而解出全部内力状态。

1.2 杆系结构位移法方程

动不定次数为 d 的结构体系, 不能由连续条件唯一地确定其位移状态, 将此动不定结构加以 d 个约束, 由此得到的动定结构作为基本体系。这种动定结构实际上是一系列两端固定的单根杆件组成的体系, 节点处有指定位移, 同时有载荷作用在基本体系上, 这两种因素都使基本体系产生内力, 可以通过单元杆件的平衡和连续条件精确解出, 因而在各杆内的连续和平衡全已满足。指定的节点位移在相交的杆端处都具有相同的量值和方向, 因此全部位移连续条件均满足, 这些节点位移使动定结构的杆端所产生的广义力必为节点位移的函数, 载荷使动定结构产生杆端广义力, 它们则是载荷的函数。节点位移和载荷两种因素的影响形成的杆端广义力应该满足原结构在节点处的平衡条件, 由这些平衡条件唯一地确定 d 个未知节点位移, 从而可以确定结构的内力状态。

由此可见, 首先必须解决动定体系由上述两种原因产生的杆端广义力, 因为动定体系是由一系列两端固定的杆件组成, 所以只要讨论单根杆件的情况就可以了。

1.2.1 两端固定的单元杆件由于端点位移产生的广义反力

图 1-3 表示两端固定的单元杆, 端点位移的方向与广义反力的方向规定为: 杆端力及线

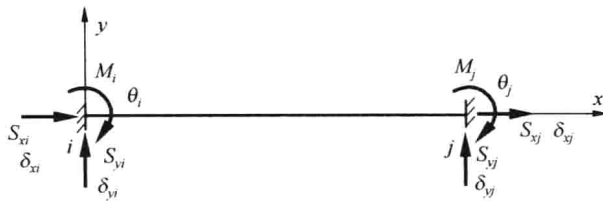


图 1-3

位移与坐标同向为正，杆端力矩及角位移以其旋转矢量与坐标轴反向为正，在平面中看则以顺时针方向为正，图 1-3 上所示的方向都是正的。

对于图 1-3 所示的三次静不定梁，由支承位移而引起的杆端广义力可以用力法求解。

图 1-4 给出了用力法求解的基本体系，多余约束力为右端支承反力，基本方程式为右端的三个连续条件：

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1u} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2u} = 0 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3u} = 0 \end{cases}$$

其中，

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{l^2}{2EJ}$$

$$\delta_{33} = \frac{l}{EJ}, \quad \Delta_{1u} = -\delta_{xj} + \delta_{xi}$$

$$\Delta_{2u} = \delta_{yi} - \delta_{yj} - l\theta_i, \quad \Delta_{3u} = \theta_i - \theta_j$$

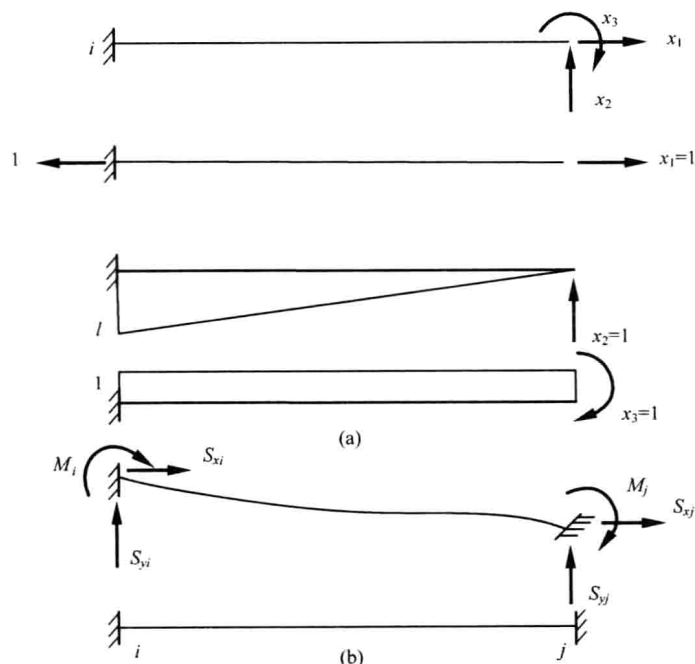


图 1-4

以上都是从图 1-4 所示的各单位力矩图图乘而得，非齐次项算出如上述。于是方程为

$$\begin{cases} \frac{l}{EA}x_1 - \delta_{xj} + \delta_{xi} = 0 \\ \frac{l^3}{3EJ}x_2 - \frac{l^2}{2EJ}x_3 + \delta_{yi} - \delta_{yj} - l\theta_i = 0 \\ -\frac{l^2}{2EJ}x_2 + \frac{l}{EJ}x_3 + \theta_i - \theta_j = 0 \end{cases}$$

由此解出

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{EA}{l}(\delta_{xi} - \delta_{xj}) \\x_2 &= \frac{6EJ}{l^2}\theta_i + \frac{6EJ}{l^2}\theta_j - \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yi} + \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yj} \\x_3 &= \frac{2EJ}{l}\theta_i + \frac{4EJ}{l}\theta_j - \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yi} + \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yj}\end{aligned}$$

对比图 1-4(a)与图 1-4(b)可知:

$$x_1 = S_{xj}, \quad x_2 = S_{yj}, \quad x_3 = M_j$$

再由该杆的平衡条件可得

$$S_{xi} = -S_{xj}, \quad S_{yi} = -S_{yj}, \quad M_i = -M_j + S_{yj}l$$

于是可知图 1-3 中所表示的两端杆端力与给定的杆端位移的关系, 即物理关系如下:

$$\begin{cases} S_{xi} = \frac{EA}{l}\delta_{xi} - \frac{EA}{l}\delta_{xj} \\ S_{yi} = -\frac{6EJ}{l^2}\theta_i - \frac{6EJ}{l^2}\theta_j + \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yi} - \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yj} \\ M_i = \frac{4EJ}{l}\theta_i + \frac{2EJ}{l}\theta_j - \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yi} + \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yj} \\ S_{xj} = -\frac{EA}{l}\delta_{xi} + \frac{EA}{l}\delta_{xj} \\ S_{yj} = \frac{6EJ}{l^2}\theta_i + \frac{6EJ}{l^2}\theta_j - \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yi} + \frac{12EJ}{l^3}\delta_{yj} \\ M_j = \frac{2EJ}{l}\theta_i + \frac{4EJ}{l}\theta_j - \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yi} + \frac{6EJ}{l^2}\delta_{yj} \end{cases} \quad (1-2)$$

也可以用角位移 θ_i 、 θ_j , 轴向相对位移 ΔL 以及横向相对位移 Δ 表示位移状态, 即在式 (1-2) 中以下列位移量代入:

$$\Delta L = -\delta_{xi} + \delta_{xj}, \quad \Delta = \delta_{yi} - \delta_{yj}$$

于是可得到以四个位移参数表示的杆端广义反力为

$$\begin{cases} S_{xi} = -S_{xj} = -\frac{EA}{l}\Delta L \\ M_i = \frac{4EJ}{l}\theta_i + \frac{2EJ}{l}\theta_j - \frac{6EJ}{l^2}\Delta \\ M_j = \frac{2EJ}{l}\theta_i + \frac{4EJ}{l}\theta_j - \frac{6EJ}{l^2}\Delta \\ S_{yi} = -S_{yj} = -\frac{6EJ}{l^2}\theta_i - \frac{6EJ}{l^2}\theta_j + \frac{12EJ}{l^3}\Delta \end{cases} \quad (1-3)$$

如果不计轴向变形, 则式 (1-3) 中第一式就可不考虑了。一般在手算过程中, 习惯以内力表示而不用杆端力表示, 则 S_{yi} 及 $-S_{yj}$ 以正的剪力 F_{Sij} 代替, M_i 与 M_j 的表示方法仍与杆端力矩一样以顺时针方向为正, 于是式 (1-3) 的后三式就成为单元杆件的转角位移公式, 独立的位移量就是 θ_i 、 θ_j 及 Δ , 它们分别是 i 端的转角、 j 端的转角及 i 与 j 端的相对横向位移,

$$\begin{cases} M_i = \frac{4EJ}{l} \theta_i + \frac{2EJ}{l} \theta_j - \frac{6EJ}{l^2} \Delta \\ M_j = \frac{2EJ}{l} \theta_i + \frac{4EJ}{l} \theta_j - \frac{6EJ}{l^2} \Delta \\ F_{Sij} = F_{Sji} = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_i - \frac{6EJ}{l^2} \theta_j + \frac{12EJ}{l^3} \Delta \end{cases} \quad (1-4)$$

1.2.2 两端固定的单元杆件由于载荷作用产生的广义反力

载荷作用在动定结构上，各杆端就产生固端作用，包括杆端力和杆端力矩，其反作用力是作用在节点上的等效节点载荷。

这个问题同样可以用力法将它解出。图 1-5 所示的就是其基本体系及其在单位约束力和载荷作用下的弯矩图。

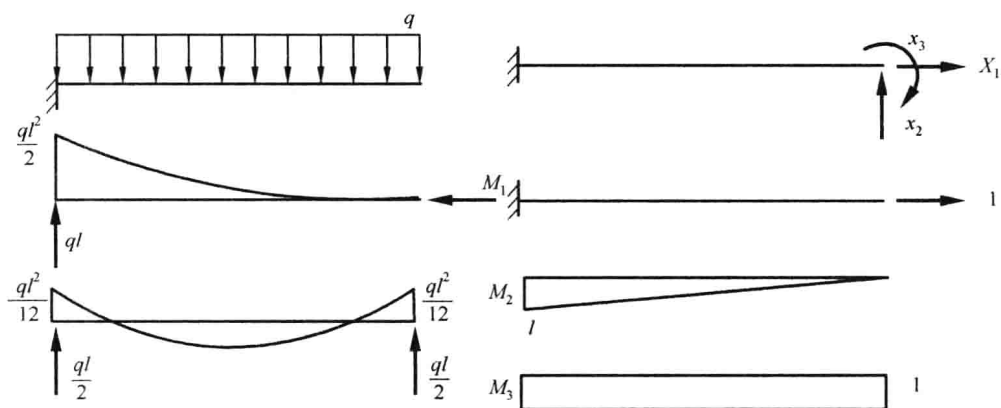


图 1-5

力法基本方程式为

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

此方程组的系数和 1.2.1 节中的问题是一样的，因为选择了同样的基本体系，计算则可应用单位弯矩图与载荷作用力下的弯矩图的图乘而得，不同的载荷当然可得到不同的 Δ_{iF} 。图 1-5 所示的是均布荷载的情况，图乘所得的结果为

$$\Delta_{1F} = 0$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_2 M_F ds = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{3}{4} l \right] = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\Delta_{3F} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_3 M_F ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \right] = \frac{ql^3}{6EJ}$$

于是力法基本方程为

$$\begin{cases} \frac{l}{EA}x_1 = 0 \\ \frac{l^3}{3EJ}x_2 - \frac{l^2}{2EJ}x_3 - \frac{ql^4}{8EJ} = 0 \\ -\frac{l^2}{2EJ}x_2 + \frac{l}{EJ}x_3 + \frac{ql^3}{6EJ} = 0 \end{cases}$$

由此而解出多余约束力为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{ql}{2}, \quad x_3 = \frac{ql^2}{12EJ}$$

于是有杆端力为

$$S_{xi} = S_{xj} = 0, \quad S_{yi} = S_{yj} = \frac{ql}{2}$$

$$M_i = -\frac{ql^2}{12}, \quad M_j = \frac{ql^2}{12}$$

或与式(1-4)相对应, 载荷作用引起的固端力和力矩为

$$F_{NFij} = 0, \quad M_{Fi} = -\frac{ql^2}{12}, \quad M_{Fj} = \frac{ql^2}{12}$$

$$F_{SFij} = \frac{ql}{2}, \quad F_{SFji} = -\frac{ql}{2}$$

式中, 下标 F 表示载荷的影响。

其他各种类型的载荷作用下的固端广义力均可如上计算, 具体步骤从略。在表 1-1 中列举各种载荷作用及温度变化引起的固端力和固端力矩, 支承位移及杆件的初始变形也是外因影响, 由此产生的固端作用也可通过计算得到。

1.2.3 平衡方程

前述已经给出动定结构上作用载荷且节点有指定位移时在该结构上引起的杆端广义力, 这两部分广义力各可在表 1-1 及式(1-4)中找到, 实际状态应使节点脱离体满足平衡条件, 节点上作用着上述两部分广义力的反作用力, 如果节点还有集中力和力偶矩作用其上, 则此三者的总和应满足平衡条件。

可通过图 1-6 所示的算例具体讨论平衡方程的建立。

图 1-6(a) 所示刚架是六次动不定的, 有六个独立的节点位移, 即 θ_C 、 δ_{xC} 、 δ_{yC} 、 θ_D 、 δ_{xD} 、 δ_{yD} , 当不计轴向变形时, 则有

$$\delta_{yC} = \delta_{yD} = 0, \quad \delta_{xC} = \delta_{xD} = \Delta$$

所以实际上独立的节点位移有三个: θ_C 、 θ_D 及 Δ 。图 1-6(a) 虚线所示的位移图, 相应的动定结构如图 1-6(b) 所示。

由于载荷作用在动定结构上而引起的杆端广义力可在表 1-1 中查到如下:

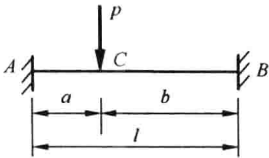
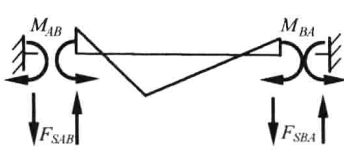
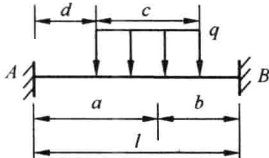
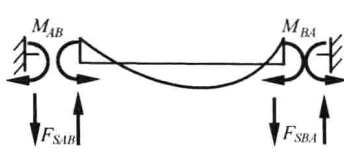
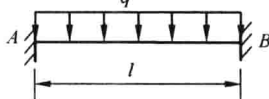
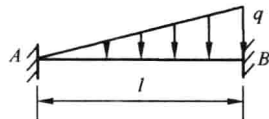
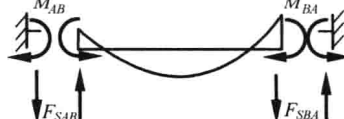
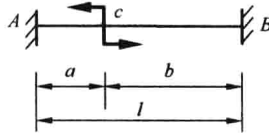
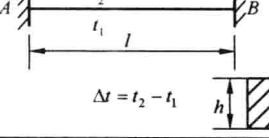
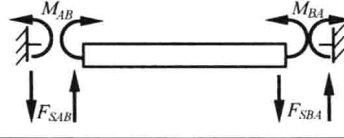
$$M_{FC} = \frac{ql^2}{12} = \frac{10 \times 6 \times 6}{12} = 30(\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$F_{SFCA} = -\frac{ql}{2} = -\frac{10 \times 6}{2} = -30(\text{kN})$$

$$M_{FCD} = 0, \quad M_{FDC} = 0, \quad F_{SFCD} = 0$$

$$F_{SFDC} = 0, \quad M_{FDB} = 0, \quad F_{SDB} = 0$$

表 1-1 作用载荷且节点有指定位移时在该结构上引起的杆端广义力

载荷形式	杆端弯矩、剪力及弯矩图	杆端弯矩、剪力公式
		$M_{AB} = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad M_{BA} = \frac{Pa^2b}{l^2}$ $F_{SAB} = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $F_{SBA} = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right)$
		$M_{AB} = -\frac{qc}{12l^2} (12ab^2 - 3bc^2 + c^2l)$ $M_{BA} = \frac{qc}{12l^2} (12a^2l + 3bc^2 - 2c^2l)$ $F_{SAB} = \frac{qc}{4l^3} (12b^2l - 3b^3 + c^2l - 2bc^2)$ $F_{SBA} = -qc + F_{SAB}$
		$M_{AB} = -\frac{ql^2}{12}, \quad M_{BA} = \frac{ql^2}{12}$ $F_{SAB} = \frac{ql}{2}, \quad F_{SBA} = -\frac{ql}{2}$
		$M_{AB} = -\frac{ql^2}{36}, \quad M_{BA} = \frac{ql^2}{20}$ $F_{SAB} = \frac{3ql}{20}, \quad F_{SBA} = -\frac{7ql}{20}$
		$M_{AB} = -\frac{Mb}{l} \left(2 - \frac{3b}{l}\right)$ $M_{BA} = -\frac{Ma}{l} \left(2 - \frac{3a}{l}\right)$ $F_{SAB} = \frac{5Mab}{l^3}, \quad F_{SBA} = \frac{6Mab}{l^3}$
		$M_{AB} = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$ $M_{BA} = -\frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$ $F_{SAB} = F_{SBA} = 0$

节点位移引起的动定结构上的各杆广义力可由式(1-4)计算，与上列固端广义力叠加后可得

$$M_{CA} = \frac{4EJ}{l} \theta_C - \frac{6EJ}{l^2} \Delta + 30 = 4\theta_C - \Delta + 30$$

$$F_{SCA} = -\frac{6EJ}{l^2} + \frac{12EJ}{l^3} \Delta - 30 = -\theta_C + \frac{\Delta}{3} - 30$$

$$M_{CD} = \frac{4EJ}{l} \theta_C + \frac{2EJ}{l} \theta_D = 4\theta_C + 2\theta_D$$

$$F_{SCD} = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_C - \frac{6EJ}{l^2} \theta_D = -\frac{\theta_C}{2} - \frac{\theta_D}{2}$$

$$M_{DC} = \frac{2EJ}{l} \theta_C + \frac{4EJ}{l} \theta_D = 2\theta_C + 4\theta_D$$

$$F_{SDC} = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_C - \frac{6EJ}{l^2} \theta_D = -\frac{\theta_C}{2} - \frac{\theta_D}{2}$$

$$M_{DB} = \frac{4EJ}{l} \theta_D - \frac{6EJ}{l^2} \Delta = 4\theta_D - \Delta$$

$$F_{SDB} = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_D + \frac{12EJ}{l^3} \Delta = -\theta_D + \frac{\Delta}{3}$$

$$M_{BD} = \frac{2EJ}{l} \theta_D - \frac{6EJ}{l^2} \Delta = 2\theta_D - \Delta$$

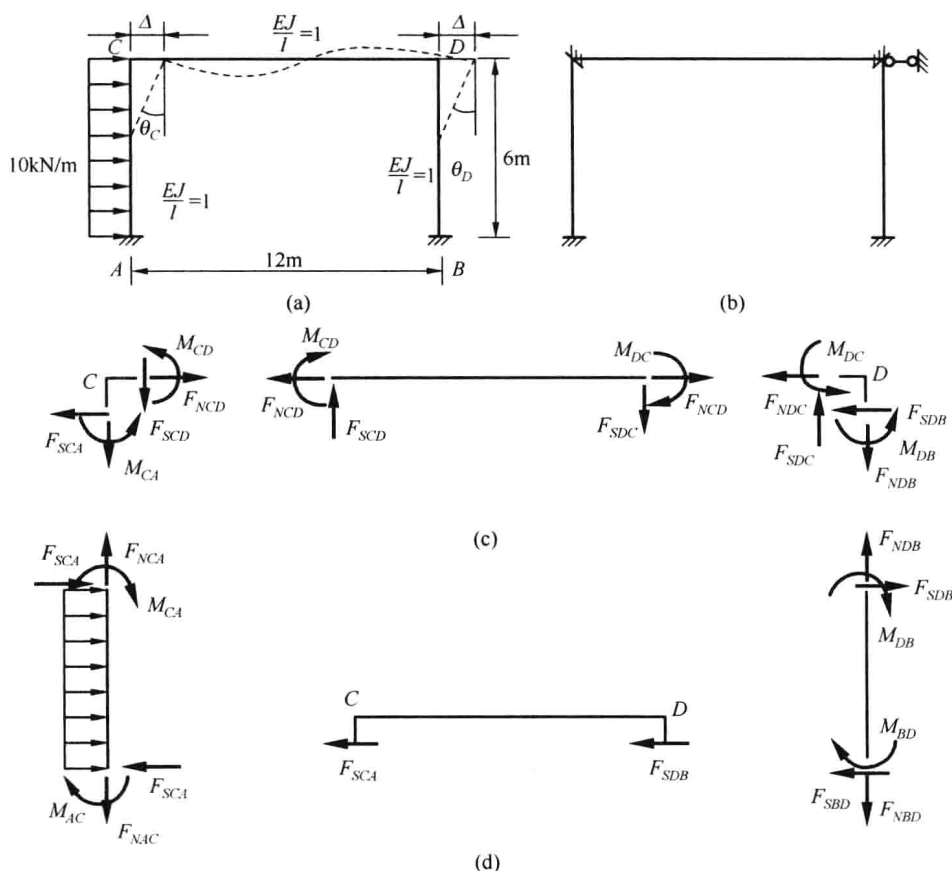


图 1-6

以上各力的方向如图 1-6(c) 所示, 由于无外加节点载荷, 因此对 C 、 D 两节点建立平衡方程时, 只要考虑以上各力的反作用力即可。由于不计轴向变形, 因此建立 C 、 D 两节点的水平方向和垂直方向的平衡方程时, 将会有轴向力参加, 这是物理关系不能确定的量, 因此除了这两个节点的力矩平衡外, 应采用图 1-6(d) 所示的 CD 梁脱离体的水平方向平衡, 这样就可将不定的轴向力消去, 于是总的平衡方程就为如下形式: