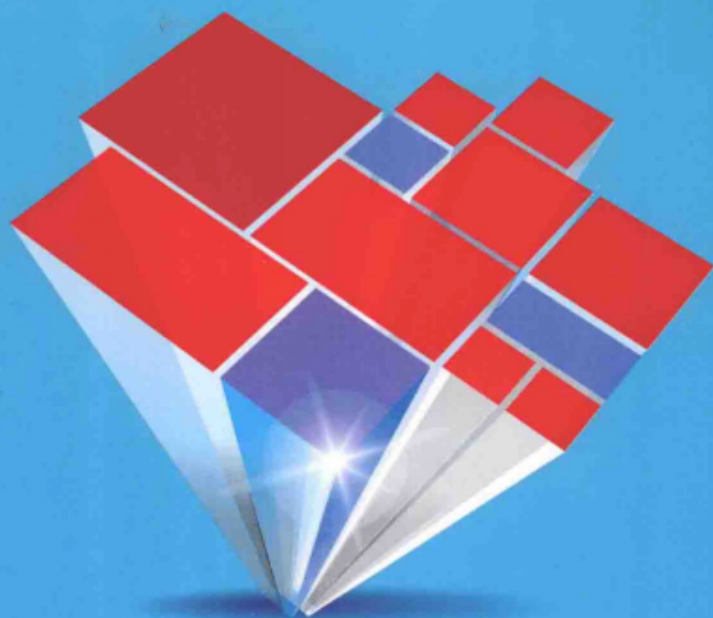




主编 / 彭 林
编者 / 彭 林 吴玲玲 何亚飞

高考数学压轴题

命题思路剖析  必考题型详解

实战真题演练



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



“给力数学

——方法比知识更重要！”

四大特点

一书在手
压轴无忧

命题趋势

1

剖析命题思路，
展望高考热点

解题锦囊

2

拨云见日，指点
迷津

拓展思维

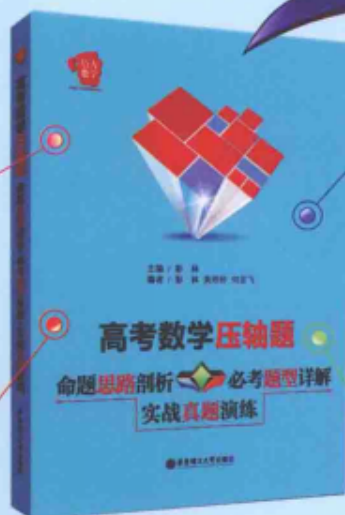
3

一题多解，提供
多种解题方法；
解后反思，拓宽
解题思路

变式思考

4

举一反三，引导
思考，轻松搞定
压轴题



你想跨入顶尖名校吗？这本压轴题必看必做！

华东理工大学出版社



扫码关注官方微博

华东理工大学出版社



扫码关注官方微博

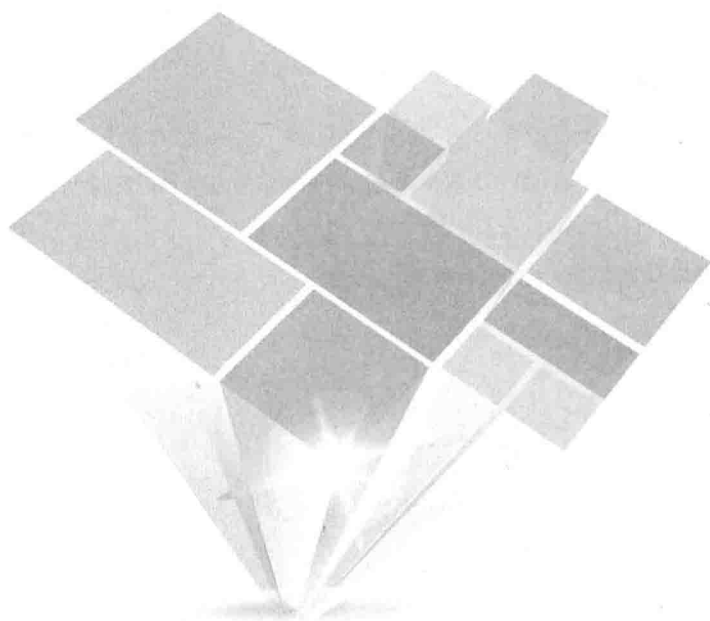
上架建议：高中教辅

ISBN 978-7-5628-3850-0



9 787562 838500 >

定价：38.00元



主编 / 彭 林
编者 / 彭 林 吴玲玲 何亚飞

高考数学压轴题

命题思路剖析  必考题型详解

实战真题演练

 华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

高考数学压轴题:命题思路剖析+必考题型详解+实战真题演练/彭林主编.

—上海:华东理工大学出版社,2014.5

(给力数学)

ISBN 978-7-5628-3850-0

I. ①高… II. ①彭… III. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料

IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 053418 号

给力数学

高考数学压轴题:命题思路剖析+必考题型详解+实战真题演练

主 编 / 彭 林

编 者 / 彭 林 吴玲玲 何亚飞

策划编辑 / 庄晓明

责任编辑 / 赵子艳

责任校对 / 金慧娟

封面设计 / 袁幼华

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 江苏南通印刷总厂有限公司

开 本 / 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 / 13

字 数 / 328 千字

版 次 / 2014 年 5 月第 1 版

印 次 / 2014 年 5 月第 1 次

书 号 / ISBN 978-7-5628-3850-0

定 价 / 38.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

淘宝官网 <http://shop61951206.taobao.com>



前言

综观各地的高考数学试卷，题目按难度区分有基础题、中档题、压轴题三种。学生在学习程度上有好、中、差之分，学习的过程也应该循序渐进，由易到难。

为适合不同学生、不同阶段的高考数学复习需要，我们按照高考数学试题的难易程度，编写了《高考数学基础题》《高考数学中档题》以及《高考数学压轴题》。

《高考数学压轴题》所选的题目为压轴题，压轴题信息量大、文字多、审题难；或因数学情景新颖，有时条件隐蔽，甚至要经过推理计算才能看出其中的特殊性；或因过程多，情景变化不断，导致列出的方程多，数学解题过程复杂，有时甚至需要用到不常用的数学方法。

如何攻克高考压轴题？单靠“题海战术”已经完全不能解决问题了，考生在新的高考形式下，需要的是精炼、明确的解题思考训练和少量却准确的解题参考信息。这和小说中的“无招胜有招”有异曲同工之妙，掌握了解题思路、技巧和准确的考点，比埋头苦做成百上千的题目更有效率。为此，本书所精选的每道例题都设置了“解题锦囊”“规范解答”“解后反思”三个栏目。

在使用本书进行复习时，读者可以根据自己的特点，分别选择不同的章节进行阅读，也可以从第一页开始，逐渐深入。压轴题对学生的能力要求比较高，并不是人人都可以得满分，因此不必强求每题都会做、都做对，应根据自己的学习情况量力而行。

同学们，“千里之行，始于足下”。解答任何一个有难度的数学问题都应该从简单情形开始！正如数学家加德纳说：“数学的真谛在于不断寻求越来越简单的方法证明定理和数学问题。”值得指出的是，这里所谓的“简单”，并不是指什么特殊的技巧和书写过程的简洁，而是解决这个问题思维过程是自然的、简单的，所用的知识是基础的。

大道至简，师法自然。“数学是自然的，数学是清楚的”，用最简单的方法说明最深刻的道理，才是数学之精髓。

参加本书编写的三位作者长期致力于高考数学复习备考研究，彭林老师是资深数学教研员、中国教育学会《中小学数学》副主编，曾任教于北京某示范高中，所教的一个班有十多名学生考入北京大学和清华大学；吴玲玲老师中学时代曾就读于著名的湖北黄冈中学，后就读于北京师范大学数学科学学院，现任教于北京海淀区某示范高中；何亚飞老师中学时代曾获得全国高中数学联赛一等奖，并参加过全国高中数学冬令营，后就读于复旦大学数学科学学院，现任教于北京西城区某示范高中，三位老师以丰富的教学实践经验，为同学们铺设了一条通向高考的成功之路。

特别感谢李秀琴、付宗飞、李文明、钟春风、杨树青、李曹群、彭光进、林秀敏等老师在本书编写过程中提供的帮助和做出的贡献。

好运留给有准备的人——祝你好运！

编者

2014年5月

目录

1	第一单元 函数与导数
1	一、函数的单调性与最值
9	二、函数、导数与其他知识相交汇
17	三、函数的应用问题
23	第二单元 数列
23	一、等差数列与等比数列
30	二、数列通项与数列求和
38	三、数列与函数、不等式的交汇
49	第三单元 解析几何
49	一、求轨迹方程问题
62	二、直线与圆锥曲线的综合问题
72	三、圆锥曲线的最大（小）值问题
84	四、圆锥曲线中的定值问题
101	五、圆锥曲线中的探究性问题
119	第四单元 创新问题
119	一、新定义问题
135	二、运动变化问题
147	三、研究性问题
157	参考答案

第一单元 函数与导数

一、函数的单调性与最值



命题趋势 考点诠释

函数的单调性与最值是数学永恒的主题,是高中数学的重点内容,而导数在研究函数的单调性与最值中扮演着举足轻重的角色,它是研究函数的一个有力工具,也是高考考查的热点.因此,在复习时,首先,要理解导数的工具性作用;其次,要弄清函数的单调性与导数符号之间的关系,需要特别注意函数的定义域,只有在定义域内,才能通过导数的符号来判断函数的单调性;最后,要掌握求函数极值、最值的方法步骤.对于已知函数的单调性或单调区间求参数的值或取值范围的问题,常通过转化为恒成立问题来解决.



经典例题 值得一学

例 1 已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3-6a)x + 12a - 4 (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线过点 $(2, 2)$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值, $x_0 \in (1, 3)$, 求 a 的取值范围.

【解题锦囊】

(1) 首先求出函数 $f(x)$ 的导函数, 然后利用导数的几何意义, 求出在 $x=0$ 处的切线; 再证明切线经过定点 $(2, 2)$, 与 a 无关.

(2) 首先求导, 借助导数求出函数的单调区间, 进而得到最小值点 x_0 , 然后结合 $x_0 \in (1, 3)$, 通过解不等式, 求得 a 的取值范围.

另外, 因为 $f(x)$ 是三次函数, 在 $x=x_0$ 处取得最小值, 且 $x_0 \in (1, 3)$, 所以 $f'(x_0) = 0$ 且

$f(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上单调递增. 可设函数 $g(x)=f'(x)$, 则 $g(x_0)=0$, 且 $g(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上取值为正, 因为 $g(x)$ 为连续函数, 所以 $g(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上有零点 x_0 , 且 $g'(x_0)>0$.

【规范解答】

$$(1) f'(x)=3x^2+6ax+3-6a.$$

$$\text{由 } f(0)=12a-4, f'(0)=3-6a,$$

得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=(3-6a)x+12a-4$,

由此知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线过点 $(2, 2)$.

$$(2) \text{ 由 } f'(x)=0, \text{ 得 } x^2+2ax+1-2a=0.$$

① 当 $-\sqrt{2}-1 \leq a \leq \sqrt{2}-1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 没有最小值;

② 当 $a > \sqrt{2}-1$ 或 $a < -\sqrt{2}-1$ 时, 由 $f'(x)=0$ 得

$$x_1=-a-\sqrt{a^2+2a-1}, x_2=-a+\sqrt{a^2+2a-1},$$

当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(x_2)$, 即 $x_0=x_2$.

$$\text{由题设知 } 1 < -a + \sqrt{a^2+2a-1} < 3,$$

当 $a > \sqrt{2}-1$ 时, 不等式 $1 < -a + \sqrt{a^2+2a-1} < 3$ 无解;

当 $a < -\sqrt{2}-1$ 时, 解不等式 $1 < -a + \sqrt{a^2+2a-1} < 3$, 得 $-\frac{5}{2} < a < -\sqrt{2}-1$.

综合①②得 a 的取值范围是 $(-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}-1)$.

【解后反思】

因为 $f(x)$ 是三次函数, 在 $x=x_0$ 处取得最小值, 且 $x_0 \in (1, 3)$, 所以 $f'(x_0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上单调递增. 可设函数 $g(x)=f'(x)$, 则 $g(x_0)=0$, 且 $g(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上取值为正, 因为 $g(x)$ 为连续函数, 所以 $g(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上有零点 x_0 , 且 $g'(x_0)>0$.

请看第(2)小题的如下另解:

因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值, 且 $x_0 \in (1, 3)$,

所以 $f'(x_0)=0$, 且 $f(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上单调递增.

$$\text{设函数 } g(x)=f'(x)=3x^2+6ax+3-6a,$$

则 $g(x_0)=0$, 且 $g(x)$ 在 $(x_0, 3)$ 上取值为正,

因为 $g(x)$ 为连续函数, 所以 $g(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上有零点 x_0 , 且 $g'(x_0)>0$.

$$\text{因为 } g(x)=3(x+a)^2+3-3a^2-6a, g'(x)=6x+6a,$$

① 当 $-a \leq 1$ 或 $-a \geq 3$ 时, $g(1)g(3)=36(5+2a) < 0$, 解得 $a \leq -3$,

由 $x_0 \in (1, 3)$ 时, $g'(x_0) < 0$, 解得 $a > -3$, 所以 a 不存在.

② 当 $1 < -a < 3$ 时, 则 $-a < x_0 < 3$, 此时有 $\begin{cases} g(-a) < 0, \\ g(3) > 0. \end{cases}$

解得 $-\frac{5}{2} < a < -\sqrt{2} - 1$.

综上, a 的取值范围是 $(-\frac{5}{2}, -\sqrt{2} - 1)$.

例 2 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax - 1$, $a \neq 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图像有三个不同的交点, 求 m 的取值范围.

【解题锦囊】

(1) 利用导数求单调区间基本步骤即可解决第(1)小题, 对函数 $f(x) = x^3 - 3ax - 1$, $a \neq 0$ 求导后的导函数 $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ 有参数 a , 进行讨论即可.

(2) 由 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值可求得 $a = 1$, 函数在 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ 处有极值. $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 1$, 在 $x = 1$ 处取得极小值 $f(1) = -3$. 因为直线 $y = m$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像有三个不同的交点, 结合 $f(x)$ 的单调性可知 m 的取值范围.

【规范解答】

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$,

当 $a < 0$ 时, 对 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f'(x) > 0$,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 解得 $x < -\sqrt{a}$ 或 $x > \sqrt{a}$;

由 $f'(x) < 0$ 解得 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值,

所以 $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 3a = 0$, 故 $a = 1$.

所以 $f(x) = x^3 - 3x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

由(1)中 $f(x)$ 的单调性可知, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 1$,

在 $x = 1$ 处取得极小值 $f(1) = -3$.

因为直线 $y = m$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像有三个不同的交点, 又 $f(-3) = -19 < -3$, $f(3) = 17 > 1$, 结合 $f(x)$ 的单调性可知, m 的取值范围是 $(-3, 1)$.

【解后反思】

顺着第(2)小题的思路, 建议同学们进一步思考:

若直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图像有两个不同的交点, m 的取值范围如何? 若直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图像只有一个交点, m 的取值范围又如何?

例 3 设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

- (1) 若 $a=0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

【解题锦囊】

(1) 利用导数结合指数函数的性质, 即可求得 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 易知 $f(0)=0$, 一个基本想法是讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ ($m>0$) 上的单调性, 如果 $f(x)$ 在这个区间上是减函数, 那么此时的 a 不满足题设条件, 如果 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 那么对应的 a 的取值满足条件. 有了这些想法, 我们就可以利用在第(1)问中获得的结论 $e^x \geq 1+x$, 对 $f'(x)=e^x-1-2ax$ 进行放缩, 分类讨论 a 在不同取值范围内 $f(x)$ 的单调区间.

【规范解答】

(1) $a=0$ 时, $f(x)=e^x-1-x$, $f'(x)=e^x-1$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) **解法 1** $f'(x)=e^x-1-2ax$.

由(1)可知 $e^x \geq 1+x$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

故 $f'(x) \geq x-2ax=(1-2a)x$,

所以当 $1-2a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ ($x \geq 0$),

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调递增函数, 又 $f(0)=0$,

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 成立.

由 $e^x > 1+x$ ($x \neq 0$) 可得 $e^{-x} > 1-x$ ($x \neq 0$)

则当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < e^x < 2a$, 所以 $0 < x < \ln 2a$;

所以当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $f(0)=0$, 所以当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$.

综上得 a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

解法 2 因为 $f'(x)=e^x-1-2ax$, 所以 $f'(0)=0$,

令 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=e^x-2a$,

当 $x \geq 0$ 时, 若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $g'(x) \geq 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是递增函数,

从而 $g(x) \geq g(0)=0$, 即 $f'(x) \geq 0$ ($x \geq 0$).

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是递增函数,

从而 $f(x) \geq f(0)=0$.

若 $a > \frac{1}{2}$, 令 $g'(x)=e^x-2a=0$, 得 $x=\ln 2a > 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, \ln 2a)$ 上是递减函数, 从而 $g(x) < g(0)=0$,

即当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \ln 2a]$ 上是递减函数, 从而 $f(x) < f(0) = 0$.

综上得 a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

【解后反思】

对于第(2)小题, 往往是先求导、列表研究 $f'(x)$ 的正负, 再判断 $f(x)$ 的单调性. 解法 1 灵活利用第(1)问中的结论和不等式的不同方向的放缩, 体现了一定的因式分解能力. 特别是, 不仅利用 $e^x \geq 1+x$, 还要利用换元法巧妙地转化出 $e^{-x} \geq 1-x$. 这既要学习新知识, 又要灵活应用新知识, 对能力要求较高.

解法 2 降低了技巧性, 增强解法的通用性, 更易接受. 本质是: 由于 $f(0) = 0$, 为了寻求 $f(x) \geq 0 (x \geq 0)$ 时 a 的取值范围, 可考查 $f(x)$ 在 0 点附近的单调性, 这可由 $f'(x)$ 的符号决定. 而 $f'(0) = 0$, 可重复上述做法. 所以要引入新的函数 $g(x) = f'(x)$. 因为 $g'(x) = e^x - 2a$, 又 $e^x \geq 1$ 在 $x \geq 0$ 时恒成立, 所以以 $a = \frac{1}{2}$ 为分类讨论的标准, 接下来就可顺利解题了. 这里虽然两次求导, 但不同于高等数学里的高阶导数, 它是一个基本想法的多次使用而已. 另外该解法避开了第(1)问获得的结论, 更没有不等式的两次不同方向的放缩, 几乎没有什么灵活的技巧, 值得同学们参考.

例 4 设函数 $f(x) = (x-1)e^x - kx^2 (k \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $k=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 M .

【解题锦囊】

第(1)小题中, 把 $k=1$ 代入函数 $f(x)$ 的解析式中, 求 $f'(x)$, 并通过判断导函数的符号来确定函数的单调区间.

在第(2)小题中, 求出函数 $f(x)$ 的极值点, 构造新函数, 再根据极值点与区间 $[0, k]$ 的位置关系进行求解.

【规范解答】

(1) 当 $k=1$ 时, $f(x) = (x-1)e^x - x^2$, 于是 $f'(x) = x(e^x - 2)$, 所以 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln 2$ 是 $f'(x)$ 的零点.

当 $x < 0$ 或 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \ln 2)$, 单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2, +\infty)$.

(2) $f'(x) = x(e^x - 2k)$, 于是 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一的零点 $x = \ln(2k)$.

下面先证明当 $k \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, $\ln(2k) < k$.

为此令 $g(x) = \ln(2x) - x$, $x \in (\frac{1}{2}, 1]$,

则 $g'(x) = \frac{1-x}{x} \geq 0, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 所以 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上为增函数.

故对于任意的 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 有 $g(k) = \ln(2k) - k \leq g(1) = \ln 2 - 1 < 0$,

即 $\ln(2k) < k, k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

又当 $0 < x < \ln(2k)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $\ln(2k) < x < k$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \ln(2k))$ 上为减函数, 在区间 $(\ln(2k), k)$ 上为增函数.

因此 $M = \max\{f(0), f(k)\}$.

现在确定 $f(0)$ 与 $f(k)$ 的大小关系, 为此

令 $h(k) = f(k) - f(0) = (k-1)e^k - k^3 + 1, k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 则 $h'(k) = k(e^k - 3k)$.

又令 $G(k) = e^k - 3k, k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

则 $G'(k) = e^k - 3 \leq e - 3 < 0$, 于是 $G(k)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上为减函数.

由于 $G\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} > 0, G(1) = e - 3 < 0$, 所以 $G(k)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 内有唯一的零点 k_0 , 因

此当 $\frac{1}{2} < k < k_0$ 时, $h'(k) = kG(k) > kG(k_0) = 0$;

当 $k_0 < k \leq 1$ 时, $h'(k) = kG(k) < kG(k_0) = 0$.

故 $h(k)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, k_0\right)$ 上为增函数, 在区间 $(k_0, 1]$ 上为减函数.

又 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7-4\sqrt{e}}{8} > 0, h(1) = 0$,

所以当 $\frac{1}{2} < k \leq 1$ 时, $h(k) = f(k) - f(0) \geq \min\left\{h\left(\frac{1}{2}\right), h(1)\right\} = 0$.

故 $M = f(k) = (k-1)e^k - k^3$.

【解后反思】

求解可导函数的单调区间的关键: 首先, 确定函数的定义域; 其次, 求出导函数 $f'(x)$; 最后, 在定义域范围内, 解不等式 $f'(x) > 0$ 得 $f(x)$ 的单调递增区间, 解不等式 $f'(x) < 0$ 得 $f(x)$ 的单调递减区间. 此外, 运用导数法求 $f(x)$ 最大(小)值的一般思路: 求 $f'(x)$; 判断单调性; 得最值.

如果一个函数具有相同单调性的区间不止一个, 这些单调区间不能用“ $\cup$ ”连接, 而只能用“,”或“和”隔开. 求函数 $f(x)$ 在给定的区间上的最值, 若给定的区间含有参数, 应注意对参数进行分类讨论. 要比较两数的大小, 常通过构造函数, 利用导数判断其单调性来得到结论.

例 5 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

【解题锦囊】

第(1)小题首先求出 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0) + x$, 然后运用赋值法求函数解析式, 先令 $x=1$, 可以求得 $f(0)$ 的值, 再令 $x=0$, 可以求得 $f'(1)$ 的值. 接下来要用导数的正负来研究函数 $f(x)$ 的单调性.

第(2)小题将已知条件转化为 $e^x - (a+1)x \geq b$ 对一切 x 恒成立, 就是要考虑不等式 $e^x \geq (a+1)x + b$. 如果 $a+1 < 0$, 此式就并不能恒成立, 如果 $a+1 > 0$, 才有可能恒成立, 分三种情况进行讨论.

【规范解答】

(1) 由 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$ 有 $f'(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0) + x$.

令 $x=1$ 得 $f'(1) = f'(1) - f(0) + 1$, 所以 $f(0) = 1$.

所以 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - x + \frac{1}{2}x^2$.

再令 $x=0$ 得 $f(0) = f'(1)e^{-1}$, 所以 $f'(1) = e$.

所以 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

所以 $g(x) = f'(x) = e^x - 1 + x$.

因为 $g'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以 $y = g(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增.

所以 $f'(x) > 0 = f'(0) \Leftrightarrow x > 0$, $f'(x) < 0 = f'(0) \Leftrightarrow x < 0$.

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$, 且单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$.

(2) 由 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 得 $e^x - x + \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$,

所以 $e^x \geq (a+1)x + b$.

① 若 $a+1 < 0$, 则取 $x < 0$, 且 $x < \frac{1-b}{a+1}$, 可得 $e^x - (a+1)x < b$,

此时 $e^x \geq (a+1)x + b$ 不成立, 舍去.

② 若 $a+1 = 0$, 此时 $(a+1)b = 0$.

③ 若 $a+1 > 0$, 设 $h(x) = e^x - (a+1)x - b$,

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(a+1)$, $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(a+1)$,

即当 $x = \ln(a+1)$ 时, $h(x)_{\min} = (a+1) - (a+1)\ln(a+1) - b \geq 0$,

$(a+1)b \leq (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1) (a+1 > 0)$.

令 $F(a) = (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$.

则 $F'(a) = (a+1)(1 - 2\ln(a+1))$.

所以 $F(a)$ 在 $(-1, e^{\frac{1}{2}} - 1)$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{2}} - 1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $F(a)$ 在 $a=e^{\frac{1}{2}}-1$ 处取得最大值 $F(e^{\frac{1}{2}}-1)=\frac{e}{2}$.

从而 $F(a)\leq\frac{e}{2}$, 即 $(a+1)b\leq\frac{e}{2}$.

当 $a=\sqrt{e}-1, b=\sqrt{e}$ 时, $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

【解后反思】

第(1)小题用导数 $f'(x)=e^x-1+x$ 的正负来研究 $f(x)$ 的单调性, 除了运用前面提供的方法, 还可以考虑数形结合, 将 e^x-1+x 转化为差的形式 $e^x-(1-x)$, 分别作出 $y=e^x, y=1-x$ 的图像, 也可以看出它们之间的大小关系.

第(2)小题在做到 $(a+1)b\leq(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$ ($a+1>0$) 这一步后, 再设 $F(a)=(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$, 则转化为 $(a+1)b\leq F(a)$, 这时不少同学就得出 $(a+1)b$ 小于等于 $F(a)$ 的最小值, 结果再以导数为工具分析函数 $F(a)=(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$ 时只得到了 $F(a)$ 的最大值, $F(a)$ 并不存在最小值, 至此思维受阻, 百思不得其解. 究其原因是受思维定势的影响, 同学们平时训练的题目大都是属于“常量小于等于变量”, 那当然是“常量小于等于变量的最小值”了, 而这道题是“变量小于等于变量”, 那应该是“变量小于等于变量的最大值”.



真题演练 即时巩固

1. (北京) 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{k}{2}x^2$ ($k\geq 0$).

- (1) 当 $k=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

友情提示



第(2)小题, 是对含参函数的单调性的讨论, 需要关注导函数的具体形式, 根据导函数确定讨论点. 本题导函数 $f'(x)=\frac{x(kx+k-1)}{1+x}$, 因为 $x\in(-1, +\infty)$, 所以只需要考察 $x(kx+k-1)$ 何时取正, 何时取负. 在研究其正负时, 需要对首项系数进行讨论, 当 $k\neq 0$ 时, 需要对其所对应方程的两个根在定义域内比较大小.

2. (北京) 设函数 $f(x)=xe^{kx}$ ($k\neq 0$).

- (1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.



第(2)小题利用求单调区间的一般步骤得出极值点 $x = -\frac{1}{k}$ ($k \neq 0$), 由于 k 的取值影响单调区间, 所以需要讨论 k 的取值范围, 即可得出单调区间.

第(3)小题在第(2)小题的基础上, 研究单调递增区间, 可知 $0 < k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内单调递增, 当 $-1 \leq k < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内单调递增.

另外, 因为导数的符号可以决定函数的单调性, 因此由函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 可知 $f'(x) = (kx+1)e^{kx} \geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立且不恒为零, 由此可以求出实数 k 的取值范围.

3. (福建) 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

4. (山东) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ ($e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数, $c \in \mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值;

(2) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数.

5. (北京模拟) 已知函数 $f(x) = (x+a)e^x$, 其中 e 是自然对数的底数, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a < 1$ 时, 试确定函数 $g(x) = f(x-a) - x^2$ 的零点个数, 并说明理由.

二、函数、导数与其他知识相交汇



命题趋势 考点诠释

由于近几年高考试题突出能力立意, 加强了对知识的综合性考查, 故常常在知识交汇处命题. 而函数与导数作为高中数学的核心内容之一, 常常与其他知识相交汇, 形成内容丰富的各类综合题, 构成高考试卷中的压轴题. 因此, 在复习备考中, 我们不仅要把基本的初等函数知识与三角函数、方程、数列、不等式等知识交叉和整合, 还需将其渗透到解析几何、立体几何问题中去, 充分认识和理解导数作为工具的价值, 构建知识网络, 以此不断提高我们综合运用所学知识解决问题

的能力.



经典例题 值得一学

例1 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$.

(1) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1} (x > 1)$, 其中 b 为实数.

① 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$;

② 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$, 给定 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 设 m 为实数, $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2$, $\beta = (1-m)x_1 + mx_2$, 且 $\alpha > 1$, $\beta > 1$, 若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围.

【解题锦囊】

本题解题思路主要分以下三个层次:

(1) 要过阅读理解关

要在阅读的基础上对题目中的“新定义”进行压缩与提炼.

本题的“新定义”为: 对于函数 $f(x) (x > 1)$, 若存在实数 a 和函数 $h(x) > 0 (x > 1)$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 就称 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$. 由于“新定义”中变量多, 概念抽象, 难以理解, 解题时考生就难以下手. 因此, 理解并掌握“新定义”就成了解决本题的关键.

对于第(1)小题, 要证明函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$, 就要确定满足条件的函数 $h(x)$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - bx + 1)$. 那么如何确定函数 $h(x) > 0 (x > 1)$ 呢? 根据给定的函数 $f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1} (x > 1)$, 可求出 $f'(x) = \frac{x^2 - bx + 1}{x(x+1)^2}$, 再与 $f'(x) = h(x)(x^2 - bx + 1)$ 进行对比就清楚了. 第(2)小题中对“函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$ ”的理解就自然知道了.

(2) 要过分类讨论关

根据导数的知识知, 要判断函数 $f(x)$ 的单调性, 只要判定 $f'(x)$ 的符号就可以了. 注意到 $f'(x) = \frac{x^2 - bx + 1}{x(x+1)^2}$, 即知判定 $f'(x)$ 的符号最容易的情形是 $b=2$, 此时有 $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 (x > 1)$, 下面只需研究 $x^2 - bx + 1$ 在 $b > 2$ 与 $b < 2$ 时的正负即可.

(3) 要过数形结合关

解决第(2)小题的关键需要洞察 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$ 的本质, 利用函数图像的

直观性以及定比分点的知识便可轻松获解.

其思路为: 由题设知 $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ (若 $m = 0$, 则 $\alpha = x_2$, $\beta = x_1$, $|g(\alpha) - g(\beta)| = |g(\beta) - g(\alpha)|$, 与已知矛盾; 若 $m = 1$, 则 $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, $|g(\alpha) - g(\beta)| = |g(\alpha) - g(\beta)|$, 也与已知矛盾), 再注意到 $m + (1 - m) = 1$, 即有 $\alpha = mx_1 + (1 - m)x_2 = \frac{mx_1 + (1 - m)x_2}{m + (1 - m)} = \frac{x_1 + \frac{1 - m}{m}x_2}{1 + \frac{1 - m}{m}}$, 所以, 点 α 为点 x_1, x_2 的一个定比分点, α 分 x_1, x_2 的比 $\lambda = \frac{1 - m}{m}$.

同样地, $\beta = (1 - m)x_1 + mx_2 = \frac{(1 - m)x_1 + mx_2}{m + (1 - m)} = \frac{x_1 + \frac{m}{1 - m}x_2}{1 + \frac{m}{1 - m}}$, 故点 β 为点 x_1, x_2 的一个

定比分点, β 分 x_1, x_2 的比 $\lambda' = \frac{m}{1 - m}$.

由此可见 $\lambda\lambda' = 1 > 0$, 故 α, β 同为 x_1, x_2 的内分点 ($\lambda > 0$), 或 α, β 同为 x_1, x_2 的外分点 ($\lambda < 0$).

当 $\lambda < 0$ 时, 如图 1-2-1, 此时总有 $|g(\alpha) - g(\beta)| > |g(x_1) - g(x_2)|$, 与已知矛盾, 故 $\lambda < 0$ 舍去.

由此可见, α, β 均为 x_1, x_2 的内分点, 如图 1-2-2, 所以有 $\lambda > 0$, 即 $\frac{1 - m}{m} > 0$, 即 $m(1 - m) > 0$, 所以 $0 < m < 1$.

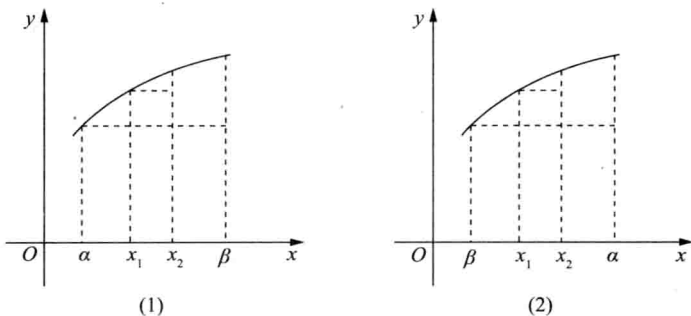


图 1-2-1

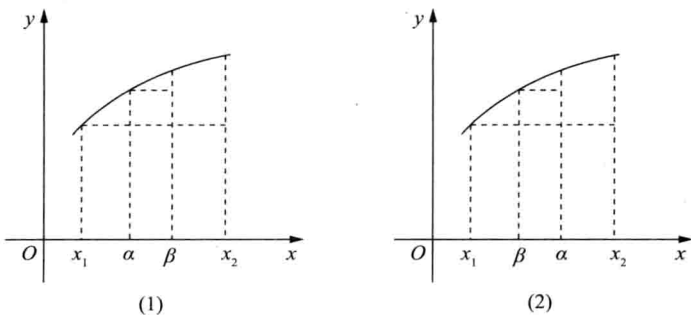


图 1-2-2