最短区间估计与最佳双边检验概论

刘瑞香◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

本书受山西农业大学科技创新基金（201210）资助

最短区间估计与最佳双边检验概论

刘瑞香◎著

知识产权出版社

图书在版编目（CIP）数据

最短区间估计与最佳双边检验概论/刘瑞香著. —北京：知识产权出版社，2014. 6
ISBN 978 - 7 - 5130 - 1052 - 8

Ⅰ. ①最… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①区间估计—概论②假设检验—概论 Ⅳ. ①O211. 67
②O212. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 080473 号

内容提要

数理统计是具有广泛应用的数学分支，而区间估计与假设检验问题在其中占有很重要的地位. 本书主要介绍了最短区间估计与最佳双边检验的方法，并把该方法应用到各种常见分布中；对各种分布的未知参数进行了最短区间估计与最佳双边检验，并对最短区间估计与最佳双边检验的关系进行了研究. 最后简单介绍了数值解法，用于求解未知参数进行最短区间估计与最佳双边检验需满足的方程组.

本书读者对象为高等院校数学、物理、工程、经济等相关专业的教师、大学生和研究生，也可供相关专业的广大科研人员参考.

责任编辑：甄晓玲　　**责任出版**：谷　洋

最短区间估计与最佳双边检验概论

ZUIDUAN QUJIAN GUJI YU ZUIJIA SHUANGBIAN JIANYAN GAILUN

刘瑞香　著

出版发行：知识产权出版社有限责任公司	**网　　址**：http：//www. ipph. cn
社　　址：北京市海淀区马甸南村 1 号	**邮　　编**：100088
责编电话：010 - 82000860 转 8393	**责编邮箱**：flywinda@ 163. com
发行电话：010 - 82000860 转 8101/8102	**发行传真**：010 - 82000893/82005070/82000270
印　　刷：北京中献拓方科技发展有限公司	**经　　销**：各大网上书店、新华书店及相关专业书店
开　　本：787mm × 1092mm　1/16	**印　　张**：6. 75
版　　次：2014 年 6 月第 1 版	**印　　次**：2014 年 6 月第 1 次印刷
字　　数：120 千字	**定　　价**：21. 00 元

ISBN 978-7-5130-1052-8

前　言

数理统计是具有广泛应用的数学分支，而区间估计与假设检验问题在其中占有很重要的地位. 在固定的置信度下，一般认为置信区间的长度越短越好. 而用传统方法得到的置信区间一般不是最短的. 因此，最短区间估计就成为数理统计中研究较多的问题之一. 本书研究了未知参数进行区间估计时构造的枢轴量，并将枢轴量分为三种类型，分别证明了最短置信区间是存在且唯一的，然后进一步给出求参数最短区间估计需满足的条件. 这样，只要找到枢轴量，常见分布的最短置信区间就都可以用本书的方法得以解决.

对总体参数的假设检验是数理统计中基本且重要的方法，广泛应用于经济与生产实践中. 众所周知，在固定的显著性水平下，双边检验的接受域是不唯一的. 如何选择双边检验的接受域，使得在给定显著性水平（或犯第一类错误的概率）的情况下，控制犯第二类错误的概率的检验就成为数理统计中研究较多的问题之一. 本书研究了对未知参数进行假设检验时构造的检验统计量，并将检验统计量分为三种类型，在每种情况下证明了最佳双边检验是存在且唯一的，然后进一步给出求参数最佳双边检验需满

足的条件. 这样, 只要找到检验统计量, 常见分布的最佳双边检验就都可以用本书的方法得以解决.

由数理统计的知识知, 在对同一未知参数所作的区间估计与假设检验中, 显著性水平为 α 的双边假设检验的接受域和置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是一致的. 但是对于最佳双边检验与最短区间估计却没有这一关系, 这是需要特别注意的. 因此, 本书对这两者的关系进行了研究.

另外, 求未知参数的最短区间估计与最佳双边检验都需要满足一定的条件, 而这个条件一般是一个方程组, 并且这个方程组没有解析解, 只有通过数值解法来求之. 因此, 本书最后还简要介绍了方程组的数值解法.

在本书的写作过程中, 笔者得到了许多同事和朋友的大力支持与帮助, 在此对他们表示衷心的感谢!

由于笔者的水平有限, 书中如有不足之处, 恳请广大读者给予批评指正.

刘瑞香

2014 年 3 月

目　录

第一章

预备知识

第一节 基本概念

定义 1.1.1 设 X 是一个随机变量,x 是任意实数,函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}$$

称为 X 的分布函数.

定义 1.1.2 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

注：连续型随机变量的分布函数是连续函数.

关于随机变量函数的分布有以下结论：

定理 1.1.1 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty<x<\infty$，又设函数 $y=g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），则随机变量 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 $\alpha=\min(g(-\infty),\ g(\infty))$，$\beta=\max(g(-\infty),\ g(\infty))$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

定理 1.1.2 设随机向量（X，Y）的联合密度函数为 $p(x,\ y)$，如果函数 $\begin{cases}u=g_1(x,\ y)\\ v=g_2(x,\ y)\end{cases}$ 有连续偏导数，且存在唯一的反函数 $\begin{cases}x=x(u,\ v)\\ y=y(u,\ v)\end{cases}$，其变换的雅克比行列式

$$J=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}\right)^{-1}=\left(\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\right)^{-1}\neq 0,$$

若 $\begin{cases}U=g_1(X,\ Y)\\ V=g_2(X,\ Y)\end{cases}$，

则随机向量 (U, V) 的联合密度函数为

$$p(u, v)=p(x(u, v), y(u, v))\ |J|.$$

定义 1.1.3　若定义在 (x_1, x_2)（x_1, x_2 可以为 $\pm\infty$）上的函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)\geqslant 0$,

(2) $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内有唯一极大值点 x_0,

则称函数 $f(x)$ 为单峰函数，点 x_0 称为其峰点.

定理 1.1.3　若函数 $g(x)$, $x\in(x_1, x_2)$ 为单峰函数，x_0 为其峰点，且可导. 若当 $x_1<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，则对任意 T_1, T_2, $T_1\in(x_1, x_0)$, $T_2\in(x_0, x_2)$，恒有 $g'(T_1)>g'(T_2)$.

证明　因为当 $x_1<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g'(T_1)>0$，故只需证明当 $x_0\leqslant T_2<x_2$ 时，$g'(T_2)\leqslant 0$ 即可.

用反证法： 假设存在 T_3, $T_3\in(x_0, x_2)$，使得 $g'(T_3)>0$，由于函数 $g(x)$ 为单峰函数，且可导，从而连续，且 $\lim\limits_{x\to x_2}g(x)=0$，所以存在 T_4, $T_4\in(T_3, x_2)$ 为 $g(x)$ 的极大值点，这与 $g(x)$ 为单峰函数矛盾，故当 $x_0\leqslant T_2<x_2$，恒有 $g'(T_2)\leqslant 0$.

定理 1.1.4　在定理 1.1.3 的条件下，若 T_1, $T_1\in(x_1, x_0)$ 或 $T_1\in(x_0, x_2)$，则必存在唯一 T_2, $T_2\in(x_0, x_2)$ 或 $T_2\in(x_1, x_0)$，使得 $g(T_1)=g(T_2)$.

证明　由于函数 $g(x)$ 为单峰函数，且可导，所以 $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 连续单值且 $\lim\limits_{x\to x_1}g(x)=\lim\limits_{x\to x_2}g(x)=0$，而 x_0 为其峰点，因此由连续函数的介值定理知，定理 1.1.4 成立.

定义 1.1.4　若随机变量的概率密度函数是单峰函数，则称该随机变

量的分布为单峰分布.

定义 1.1.5 设 X_1, X_2, …, X_n 为取自某总体的样本，若样本的函数 $T=T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中不含有任何未知参数，则称 T 为统计量. 统计量的分布称为抽样分布.

注：尽管统计量不依赖于未知参数，但是它的分布一般是依赖于未知参数的.

定义 1.1.6 设 X_1, X_2, …, X_n 为取自某总体的样本，$X_{(i)}$称为该样本的第 i 个次序统计量，它的取值是将样本观测值由小到大排列后得到的第 i 个观测值. 其中 $X_{(1)}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为该样本的最小次序统计量，$X_{(n)}=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为该样本的最大次序统计量.

注：在一个简单随机样本中，X_1, X_2, …, X_n 是独立同分布的，但次序统计量 $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, …, $X_{(n)}$既不独立也不同分布.

定理 1.1.5 设总体 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，X_1, X_2, …, X_n 为样本，则第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$的密度函数为

$$f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x).$$

证明 对任意的实数 x，考虑次序统计量 $X_{(k)}$ 取值落在小区间 $(x, x+\Delta x]$ 内这一事件，它等价于“容量为 n 的样本 X_1, X_2, …, X_n 中有 1 个观测值落在 $(x, x+\Delta x]$ 之间，而有 $k-1$ 个观测值小于等于 x，有 $n-k$ 个观测值大于 $x+\Delta x$”.

样本的每一个分量小于等于 x 的概率为 $F(x)$，落入区间 $(x, x+\Delta x]$ 的概率为 $F(x+\Delta x)-F(x)$，大于 $x+\Delta x$ 的概率为 $1-F(x+\Delta x)$，而将 n

个分量分成这样的三组，总的分法有$\frac{n!}{(k-1)!\ 1!\ (n-k)!}$种. 于是，若以$F_k(x)$ 记 $X_{(k)}$的分布函数，则由多项分布可得

$$
\begin{aligned}
F_k(x+\Delta x)-F_k(x) \approx & \frac{n!}{(k-1)!\ 1!\ (n-k)!}(F(x))^{k-1} \\
& (F(x+\Delta x)-F(x))(1-F(x+\Delta x))^{n-k},
\end{aligned}
$$

两边除以 Δx，并令 $\Delta x \to 0$，即有

$$
\begin{aligned}
f_k(x) & =\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F_k(x+\Delta x)-F_k(x)}{\Delta x} \\
& =\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x),
\end{aligned}
$$

其中$f_k(x)$ 的非零区间与总体的非零区间相同.

特别，令 $k=1$ 和 $k=n$ 即得到最小次序统计量 $X_{(1)}$和最大次序统计量 $X_{(n)}$的密度函数：

$$
\begin{aligned}
f_1(x) & =n(1-F(x))^{n-1}f(x); \\
f_n(x) & =n(F(x))^{n-1}f(x).
\end{aligned}
$$

定理 1.1.6 设总体 X 的密度函数为$f(x)$，分布函数为 $F(x)$，X_1，X_2，…，X_n 为样本，则次序统计量（$X_{(i)}$，$X_{(j)}$）（$i<j$）的联合分布密度函数为

$$f_{ij}(y,z)=\frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}[F(y)]^{i-1}$$
$$[F(z)-F(y)]^{j-i-1}[1-F(z)]^{n-j}f(y)f(z),\ y\leqslant z.$$

证明 对增量 Δy, Δz 以及 $y<z$, 事件 "$X_{(i)}\in(y,\ y+\Delta y]$, $X_{(j)}\in(z,\ z+\Delta z]$" 可以表述为 "容量为 n 的样本 X_1, X_2, …, X_n 中有 $i-1$ 个观测值小于等于 y, 1 个落入区间 $(y,\ y+\Delta y]$, $j-i-1$ 个落入区间 $(y+\Delta y,\ z]$, 1 个落入区间 $(z,\ z+\Delta z]$, 而余下的 $n-j$ 个大于 $z+\Delta z$".

于是由多项分布可得

$$P(X_{(i)}\in(y,\ y+\Delta y),\ X_{(j)}\in(z,\ z+\Delta z))$$
$$\approx\frac{n!}{(i-1)!\ 1!\ (j-i-1)!\ 1!\ (n-j)!}$$
$$[F(y)]^{i-1}f(y)\Delta y[F(z)-F(y+\Delta y)]^{j-i-1}$$
$$f(z)\Delta z[1-F(z+\Delta z)]^{n-j}.$$

考虑到 $F(x)$ 的连续性, 当 $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ 时有 $F(y+\Delta y)\to F(y)$, $F(z+\Delta z)\to F(z)$, 于是

$$f_{ij}(y,z)=\lim_{\Delta y\to 0,\Delta z\to 0}\frac{P(X_{(i)}\in(y,y+\Delta y),\ X_{(j)}\in(z,z+\Delta z))}{\Delta y\cdot\Delta z}$$
$$=\frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}[F(y)]^{i-1}$$
$$[F(z)-F(y)]^{j-i-1}\cdot[1-F(z)]^{n-j}f(y)f(z),\ y\leqslant z.$$

第二节 正态分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty,$$

其中 μ，$\sigma(\sigma>0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ，σ 的正态分布或高斯分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 为位置参数，σ 为尺度参数.

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

特别，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时称 X 服从标准正态分布. 其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

易知 $$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

定义 1.2.1 设 $X \sim N(0, 1)$，若 z_α 满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \ 0 < \alpha < 1,$$

则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点.

易知
$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha.$$

正态分布是概率论与数理统计中最重要的一个分布，高斯在研究误差理论时首先用正态分布来刻画误差的分布，所以正态分布又称为高斯分布.

由中心极限定理可知：一个变量如果是大量微小的、独立的随机因素的叠加结果，那么这个变量一定是正态变量. 因此很多随机变量可以用正态分布描述或近似描述，譬如测量误差、产品重量、人的身高、年降雨量等都可以用正态分布描述.

第三节 均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布，记为 $X \sim U(a, b)$.

在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布的随机变量 X，具有下述意义的等可能性，即它落在区间 $[a, b]$ 中任意等长度的子区间内的可能性是相同

的. 或者说它落在 [a, b] 的子区间内的概率只依赖于子区间的长度而与子区间的位置无关.

若 $X \sim U(a, b)$，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b.\\ 0, & x\geqslant b\end{cases}$$

定理 1.3.1　设总体 X 在区间 [a, b] 上服从均匀分布，参数 a, b 未知，设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是来自 X 的样本，则 a, b 的极大似然估计分别为：$\hat{a}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$，$\hat{b}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$.

证明　记 $X_{(1)}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

因为 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & 其他\end{cases}$，且 $a\leqslant X_1, X_2, \cdots, X_n\leqslant b$ 等价于 $a\leqslant X_{(1)}$，$X_{(n)}\leqslant b$，所以似然函数为

$$L(a, b)=\frac{1}{(b-a)^n},\ a\leqslant X_{(1)},\ b\geqslant X_{(n)},$$

于是对于满足条件 $a\leqslant X_{(1)}$，$b\geqslant X_{(n)}$ 的任意 a, b 有

$$L(a, b)=\frac{1}{(b-a)^n}\leqslant\frac{1}{(X_{(n)}-X_{(1)})^n}.$$

即 $L(a, b)$ 在 $a=X_{(1)}$，$b=X_{(n)}$ 时取到最大值 $(X_{(n)}-X_{(1)})^{-n}$. 故 a, b 的极大似然估计为

$$\hat{a}=X_{(1)}=\min_{1\leq i\leq n}X_i,\ \hat{b}=X_{(n)}=\max_{1\leq i\leq n}X_i.$$

均匀分布的背景可视作随机点 X 落在区间 $[a,\ b]$ 上的位置. 均匀分布在实际中经常使用，譬如一个半径为 r 的汽车轮胎，因为轮胎圆周上的任一点接触地面的可能性是相同的，所以轮胎圆周接触地面的位置 X 是服从 $[0,\ 2\pi r]$ 上的均匀分布. 其实，只要看看报废轮胎的四周磨损程度几乎是相同的，就可明白均匀分布的含义了.

第四节　指数分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 θ 的指数分布，记为 $X\sim E(\theta)$.

若 X 服从参数为 θ 的指数分布，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\theta x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

服从指数分布的随机变量 X 具有以下性质：

对于任意 s，$t>0$，有