普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

第三版

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

第三版

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书内容包括：行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型、线性空间与线性变换等。每章的练习题在书末附有习题答案或提示。每章配有阅读材料，旨在向读者展示相关知识点在现实中的应用。

本书可作为高等学校工科本科生线性代数课程（32～48学时）的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/南京理工大学应用数学系编．--3版．--北京：高等教育出版社，2014．8

ISBN 978-7-04-040642-9

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①南…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．①O151．2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第159444号

策划编辑　杨　帆　　责任编辑　杨　帆　　特约编辑　徐　飞　　封面设计　张申申
版式设计　马敬茹　　插图绘制　郝　林　　责任校对　刘春萍　　责任印制　赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京东君印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×960mm　1/16		
印　　张	11.5	版　　次	2001年1月第1版
字　　数	200千字		2014年8月第3版
购书热线	010-58581118	印　　次	2014年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	18.60元

物 料 号　40642-00

第三版前言

本书于2001年第一版问世以来，承蒙读者的厚爱，年年保持一定的发行量。2009年前后，在广泛听取读者反馈的意见和专家建议的基础上，我们于2010年修订出版了本书的第二版。主要做了修订线性代数中相关名词表述、例题、练习题分类等工作。最近，在听取电气信息类、机械工程类和金融学等专业的学生、老师的意见和建议的基础上，我们又进行了修改，即为目前的第三版。

这次修改的重点在于如下两个方面：

一、在相关章节后增添了阅读材料。此举旨在向读者展示线性代数各章节内容的相关知识点在现实生活中的应用。希望通过这些粗浅的知识点的应用凸显线性代数的学科生命力和强大的应用前景；

二、完善了少部分内容的表述、修订了少部分错漏。

本书第三版修改书稿分工如下：第一章、第七章由吕新民修改并编写阅读材料；第二章由郁易生修改，李宝成编写阅读材料；第三章、第四章由窦本年修改并编写阅读材料；第五章由姚洪亮修改并编写阅读材料；第六章由陈培鑫修改并编写阅读材料。刘红毅、张峥嵘等线性代数的任课老师也提供了很多很好的修改意见和建议。吕新民教授、赵培标教授仔细审阅并校对了全部修改书稿。

本次书稿修改过程中，得到了南京理工大学理学院领导、数学学科的老师，特别是线性代数的任课老师的关心与支持。本书能够尽快与读者见面，也归功于高等教育出版社编辑的辛勤工作，值此书稿修订之际一并鸣谢！

最后，向使用过本书前两版并提供修改意见的广大同行们，表示深切的谢意。

限于编者水平，书中不当之处，恳请使用本书的教师与读者批评、指正。

编　者

2014年5月于南京理工大学

第二版前言

线性代数是高等学校的一门公共基础课。它主要研究有限维空间的线性理论。随着计算机技术的普遍应用和高科技的迅猛发展，这一理论日益渗透到各学科领域。作为各学科领域研究的基础，线性代数课程更需要加强和提高。本书是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的有关线性代数部分规定的内容编写而成。

本书共七章，可大致分为三个部分：

第一部分，即前三章内容，主要介绍线性代数的基本理论。具体内容包括行列式、矩阵、n维向量空间。

第二部分，即第四章至第六章内容，主要是利用线性代数的基本理论解决线性代数中的一些基本问题。如线性方程组解的结构，方阵的对角化以及二次型的标准化等问题。具体内容包括线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型。

第三部分，即为最后一章内容，主要介绍线性空间与线性变换的概念与性质。事实上，线性空间是线性代数的线性理论部分的一个抽象，而线性变换是矩阵的另一种表现形式。同时，也是对矩阵的这样一个抽象数据表的几何解释，使我们对矩阵这个工具有一个更深层次的认识。我们认为应该让读者了解这两个基本概念，这也是研究生入学考试要求的内容。

本书可作为高等学校工科本科生线性代数课程（32～48学时）的教材或教学参考书。

本书编写分工为：第一、七章由吕新民编写；第二章由郁易生编写；第三、四章由窦本年编写；第五、六章由陈培鑫编写。赵培标教授仔细审阅了全书，并提出了许多重要意见和建议。

限于编者水平，书中不当之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2009年12月于南京

目　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数的一种基本运算,它产生于解线性方程组的过程之中.行列式运算不但在数学中有广泛的应用,而且在其他学科中也经常会遇到.本章先从二阶与三阶行列式入手,运用递归的方法引入一般 n 阶行列式的定义并研究其性质,借助于性质进行行列式的计算.

本书中所指的数,除特别说明外,一般均指实数.

第一节　行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为 4 个数,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式.它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 a_{11},a_{12} 称为行列式的第 1 行元素;a_{21},a_{22} 称为行列式的第 2 行元素;a_{11},a_{21} 称为行列式的第 1 列元素;a_{12},a_{22} 称为行列式的第 2 列元素;一般地,a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列元素.

利用二阶行列式的运算,如二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

在满足条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 下,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

经过简单的消元可得方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

利用二阶行列式,可以建立三阶行列式的运算.

设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是9个数,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式.它的值定义为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(-1)^{1+1}D_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}D_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}D_{13} \\ &=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \end{aligned}$$

其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示元素 a_{ij} 所在的行数,第二个下标 j 表示 a_{ij} 所在的列数;D_{ij} 是划去 a_{ij} 所在的行与列的元素后,剩下的元素按原来的相对位置所构成的二阶行列式,称为 a_{ij} 的余子式;称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.从而一个三阶行列式的值就等于它的第1行元素与其对应的代数余子式乘积的和.

同样地,利用三阶行列式的运算,如三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

在满足条件 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 下,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

经过简单的消元可得方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}, \\ z=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

二、n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义知,一个三阶行列式的值可以表为它的第 1 行元素与其对应的代数余子式乘积的和.以下用递归法定义一般的 n 阶行列式.

定义 1.1.1 设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 n^2 个数,记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.它的值用递归法定义如下:

(1) 若 $n=1$,则一阶行列式 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$;

(2) 设 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1} 的值已定义,则 n 阶行列式 D_n 定义为

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j},$$

其中 D_{1j} 是划去 D_n 中的第 1 行与第 j 列元素后,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{1j} 的余子式.

一般地,我们有

定义 1.1.2 在 n 阶行列式 D_n 中,划去 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列元素后,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式 D_{ij} 称为 a_{ij} 的余子式,而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 1.1.2,n 阶行列式 D_n 又可表为

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

即一个 n 阶行列式可以表为它的第 1 行元素与其对应的代数余子式乘积的和.

由定义 1.1.1 知,一个 n 阶行列式的值是 $n!$ 项的代数和,其中每一项是取自行列式不同行与不同列的 n 个元素的乘积.

例 1.1.1 计算对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 由定义

$$D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.2 计算下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 由定义

$$D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

第二节 行列式的性质

行列式的性质是计算行列式的重要依据,行列式的计算方法之一就是借助于行列式的性质,将行列式化为三角形行列式.

对于二阶及三阶行列式而言,下列性质 1.2.1 与性质 1.2.2 是容易得到的,借助于数学归纳法,有下列更一般的结果.

性质 1.2.1 行列互换,行列式不变.

把一个行列式 D_n 的行列互换后得到的行列式称为 D_n 的转置行列式. 性质 1.2.1 表明,一个行列式与其转置行列式是相等的. 同时,性质 1.2.1 还表明在行列式中,行与列的地位是平等的,因此对行成立的性质,对列也是成立的. 以下仅对行进行讨论,相应的结果对列自然也成立. 由性质 1.2.1 及例 1.1.2 知

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.2.2　对换行列式任意两行,行列式反号.

推论 1.2.1　若行列式某两行对应元素相同,则行列式为零.

性质 1.2.3(行列式展开式定理)　行列式等于它的任一行的所有元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

证　将 D_n 的第 i 行逐行与上一行对调,共 $i-1$ 次. 于是第 i 行便调到第 1 行,记此行列式为 $\overline{D}_n$,则

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1.2.2,$D_n=(-1)^{i-1}\overline{D}_n$,再将 $\overline{D}_n$ 按第 1 行展开就有

$$\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{1+j}\overline{D}_{1j},$$

其中 $\overline{D}_{1j}$是 a_{ij}在 $\overline{D}_n$ 中的余子式. 因为划去 $\overline{D}_n$ 的第 1 行第 j 列后剩下元素构成的 $n-1$ 阶余子式与划去 D_n 的第 i 行第 j 列后剩下元素构成的 $n-1$ 阶余子式完全相同,从而 $\overline{D}_{1j}=D_{ij}$,故有

$$D_n=(-1)^{i-1}\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\overline{D}_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

推论 1.2.2　行列式任意一行元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的

和为零,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0 \quad (i\neq k).$$

证　不妨设 $i>k$,作辅助行列式

$$C_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是将 D_n 的第 k 行换成 D_n 的第 i 行而得到的行列式,因 C_n 中有两行相同,由推论 1.2.1 知 $C_n=0$. 又由性质 1.2.3,将 C_n 按第 k 行展开,因 C_n 的第 k 行元素的代数余子式与 D_n 的第 k 行元素的代数余子式对应相同,故有

$$0=C_n=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0 \quad (i\neq k).$$

把性质 1.2.3 与推论 1.2.2 结合在一起,有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=\begin{cases} D_n, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$

性质 1.2.4　行列式某一行的所有元素的公因子可以提到行列式外,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda T_n.$$

证　将 D_n 按第 i 行展开,因 D_n 与 T_n 的第 i 行元素的代数余子式是对应相同的,故

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij}A_{ij}=\lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\lambda T_n.$$

推论 1.2.3　若行列式某一行元素全为零,则行列式为零.

推论 1.2.4　若行列式某两行对应元素成比例,则行列式为零.

性质 1.2.5　若行列式的某一行的元素均为两项之和,则行列式可按此行

拆成两个行列式的和,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=B_n+C_n.$$

证　将 D_n 按第 i 行展开,因 D_n 与 B_n 及 C_n 的第 i 行元素的代数余子式对应相同,故

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}A_{ij}=B_n+C_n.$$

由性质 1.2.5,性质 1.2.4 及推论 1.2.4 易知

性质 1.2.6　行列式的某一行的倍数加到另一行,行列式的值不变.

第三节　行列式的计算

行列式计算的基本方法,一是借助于行列式的性质将一个行列式化成一个三角形行列式,即三角化法;二是借助于行列式展开式定理不断降阶,即降阶法.这两种方法不是孤立的,有机地结合在一起使用可以起到更好的效果.

例 1.3.1　计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解　直接利用行列式的性质,将行列式三角化,即

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$
=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{57}{14} \end{vmatrix}
$$

$$
=-1\times 1\times(-14)\times\frac{57}{14}=57.
$$

例 1.3.2 计算 $D_n=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$.

解 从第 2 列起各列均加到第 1 列，将第 1 列公有的因子 $b+(n-1)a$ 提出，再将行列式三角化，即

$$
D_n=\begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ b+(n-1)a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+(n-1)a & a & \cdots & b \end{vmatrix}=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & b \end{vmatrix}
$$

$$
=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix}=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.
$$

例 1.3.3 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，这里每个 $a_i\neq 0$.

解 分析行列式的特点，除主对角线（左上角到右下角的对角线）上元素外，其余元素均相同，由性质 1.2.3 得

$$
D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.
$$

将第 1 行的−1 倍加到第 2 行至第 $n+1$ 行，得