21世纪大学公共数学系列教材

微积分

严守权 编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

微积分

● 严守权　编著

Math

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

微积分/严守权编著. —北京：中国人民大学出版社，2014.9
21世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-20019-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①严… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第215768号

21世纪大学公共数学系列教材
微积分
严守权　编著
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2014年9月第1版
印　　张	20.25 插页1	**印　　次**	2014年9月第1次印刷
字　　数	487 000	**定　　价**	38.00元

总　序

进入21世纪以来,现代科学技术大潮汹涌澎湃,深刻地影响到人类社会的进步和发展.新的时代呼唤新的高素质的人才,呼唤教育有更多的创新和更大的发展.

在诸多教育中,数学教育具有特殊地位和作用.数学作为科学的"皇后"、一门具有丰富内容的知识体系,在其发展过程中,与其他学科交叉渗透,广泛应用,已成为科学发展的强有力的工具和原动力.数学以其特有的哲学属性,又是人们的思维训练的体操.正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中指出的,"数学提供了有特色的思考方式,包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断,以及运用符号,等等.它们是普遍适用并且强有力的思考方式.运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力,它使人们能批判地阅读,能识别谬误,能探察偏见,能估计风险,能提出变通办法.数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.""数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用."同样的,数学是一种文化,一门艺术,同样可以为人们提供美的熏陶.多年来,我国高校的数学教育为了适应新形势,已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科,课程建设和教学改革广泛而深入,硕果累累.

教材建设是教学改革的核心,为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设和发展,我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了"21世纪大学公共数学系列教材".系列教材的宗旨是,面向世界,面向未来,面向现代化,总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果,更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能.

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多学科,在总体把握数学教育的功能定位的基础上,充分考虑不同学科的特点和需求,区分出不同层次和侧重点,并参照相关专业通行的教学大纲编写.例如,理、工学科的公共数学课同时是专业基础课,更要注重课程的工具功能,更强调与后续课程的有机衔接,而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能.

系列教材力求将传统和创新相结合. 相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点. 历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材. 我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富.

我们深知,一部好的数学教材不仅需要对数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神. 我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证.

前 言

为了更好地体现经济和管理类专业数学基础教育的功能定位，便于基础数学的各个教学环节的有效实施，在广泛征求意见和教学实践的基础上，本书在如下方面作了改进：

1. 对内容作必要调整。主要是，参照国内各经济和管理类专业普遍采用教学大纲的要求，将实际教学中基本上不涉及的章节或知识点删除，如二阶常系数差分方程，广义积分收敛性判别法。调整后，教学重点更加突出，更能适应不同的教学对象，有助于教学安排，提高教材使用效率。

2. 更加强化对数学的基本概念、基本理论和基本运算的表述。主要是改变原版教材要兼顾全国硕士研究生入学考试数学考试的思路，在体系结构、内容表述、例题选择和习题配置等方面更侧重于教学大纲所确定的重点内容，如函数概念，极限及无穷小概念，导数、偏导数和微分、全微分的概念，两个不同的积分概念，级数及其收敛的概念，微分方程和差分方程的概念；经济数学中经济函数，边际和弹性的概念；极限的运算，导数和基本的积分运算及微分方程和差分方程的基本解法。应用部分主要侧重于利用导数时函数性状的分析；微分的近似计算；平面图形的面积计算，经济应用等。同时删除了对概念的不必要的延伸和扩展，减少了例题和习题中过多的变化类型，压缩了介绍运算方法和技巧的内容和篇幅。上述变化都有助于体现课程的基础教育的属性和功能定位。

3. 全方位地降低教材的难度。微积分是后续的数学基础课程的先修课，同时也是经济和管理类专业的专业基础课，过易，则基础不够，过难，超出多数学生的接受能力，则基础不牢，均会影响后续课程的学习。因此，教材难度的把握十分重要。本着“够用”和“注重实效”的原则，本书尽可能降低教材的难度，以适应绝大多数的经济、管理类专业及类似专业的学生的学习能力和需求。本书在调整内容和改变编写的思路的基础上，讲述微积分的基本概念和基本定理时，除了作必要的严密的推理和证明外，还注意应用良好的几何直观背景，选配简单又更能贴近问题的典型例题，相应的练习题也作了较大的调整，强化了对基本概念的理解、对基本运算的训练和对基本应用的体验。

本书作为经济和管理类专业采用的教材，提供了微积分在经济学中应用的背景和实例。

本书配套出版学习辅导书。学习辅导书的编写与教材编写的指导思想一致，主要是加强对教材中重要知识点的解读和更多的求解问题的训练，以提高学生分析问题、解决问题的能力。书后继续附有教材中所有练习题的详细解答。作为学习微积分学的有力帮手，欢迎大家采用。

本书的编写由严守权负责完成，北京大学姚孟臣老师、清华大学胡金德老师对本次修订提供了宝贵的意见，相关的教师和读者对本书也提出了许多宝贵的建议和意见。尤其是中国人民大学出版社为本书的编写做了大量调查研究，付出了很多心血，对此表示衷心的感谢。

编者

2014 年 3 月

目　录

第 1 章

函　　数

函数是微积分研究的对象，也是高等数学重要的基本概念之一. 鉴于函数在微积分中的重要地位. 本章将重温函数概念并进一步学习相关的知识.

§1.1　实数与实数集

一、实数与数轴

微积分主要是在实数范围内研究函数. 有理数和无理数统称为**实数**，全体实数的集合称为**实数系**. 实数轴是一条有原点、有正方向、有长度单位的直线. 如图 1—1 所示，数轴上的点与实数之间存在一一对应关系. 因此，通常当我们用一个字母或数字表示一个实数时，也同时表示数轴上以该实数为坐标的对应点. 如，实数 x 既可称为数 x，也可称为点 x.

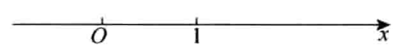

图 1—1

容易看到，数轴上任意两个不同点的坐标之间可以比较大小，称为实数的有序性；任意两个不同点之间必存在无穷多个点，称为实数的稠密性；有理数和无理数对应的有理数点和无理数点填满数轴，称为实数的完备性或连续性.

二、实数的绝对值及其性质

定义 1.1　设 x 是一个实数，则定义 x 的绝对值为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}.$$

绝对值 $|x|$ 的几何意义是表示点 x 到原点 O 的距离，$|x-y|$ 则表示 x 与 y 两点之间的距离.

例 1　解不等式 $|x+3|<|x-5|$.

解 根据绝对值的几何意义，不等式表示数轴上与点 $x_1=-3$ 的距离小于与点 $x_2=5$ 的距离的所有点的集合. 如图 1—2 所示，与点 x_1 和 x_2 等距离的中点为

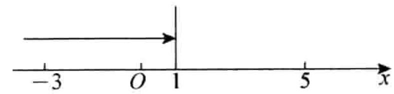

图 1—2

$$x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1.$$

所求点集在 x_3 的左侧，因此得解集 $\{x \mid x<1\}$.

例 1 表明，熟悉绝对值的几何意义，对于求解绝对值问题是有益的。

绝对值有以下基本性质：

设 x,y 为任意实数，则

(1) $|x|\geqslant 0,\ |x|=|-x|,\ |x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(3) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$;

(4) $||x|-|y||\leqslant |x-y|$;

(5) $|xy|=|x||y|$，一般地 $|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1||x_2|\cdots|x_n|$;

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|},\ y\neq 0.$

只证(3)和(4)，其余性质读者可自行证明.

由性质(2)，有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\ -|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

从而有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

即

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|,$$

又由性质(3)，有

$$|x|=|(x-y)+y|\leqslant |x-y|+|y|,\ |y|=|(y-x)+x|\leqslant |y-x|+|x|,$$

即

$$|x|-|y|\leqslant |x-y|,\ |y|-|x|\leqslant |y-x|=|x-y|,$$

从而有

$$||x|-|y||\leqslant |x-y|.$$

三、区间与邻域

实数系可以用一般的集合表示法表示，并习惯用特殊记号表示特定的实数集，如 R 表示全体实数的集合，N 表示全体自然数的集合，Z 表示全体整数的集合，又如 R^+、Z^- 分别表示全体正实数、全体负整数的集合. 此外还有其特定的表示法，即区间表示法.

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，则定义：

$(a,b)=\{x|a<x<b\}$,称为开区间(a,b);

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,称为闭区间$[a,b]$;

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间;

$[a,b)$,$(a,b]$,(a,b),$[a,b]$统称为**有限区间**,a,b 称为区间的**左、右端点**,$b-a$ 为**区间长度**. 当端点为无限时,相应区间为**无穷区间**,即

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\};$$

$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

类似地可定义$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$.

讨论函数在某定点 x_0 附近的性质时,还经常会用到邻域的概念.

在数轴上,开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的一个**邻域**,其中称 x_0 为中心,正数 δ 为邻域的半径,记作 $N_\delta(x_0)$,如图 1—3 所示,并称集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

为以 x_0 为中心、δ 为半径的 x_0 的一个去心邻域,记作 $N_\delta(\bar{x}_0)$. 其中$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左邻域,$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右邻域,如图 1—4 所示.

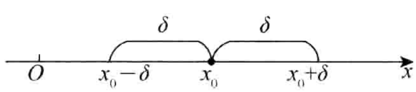

图 1—3

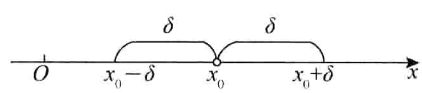

图 1—4

广义上,可将∞看作数轴上的无穷远点. 设 M 为正常数,类似地可以定义集合

$$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)=\{x\,|\,|x|>M\}$$

为点∞的 M 邻域,记作 $N_M(\infty)$. $(-\infty,-M)$,$(M,+\infty)$分别称为∞的左、右邻域.

§1.2 函数概念

一、常量与变量

微积分学通常又称为变量数学. 变量是指某个过程中不断变化的量. 如运动物体行走的路程、某上市公司的股票价格、生产某种产品的成本、某地区的气温等. 而在某个变化过程中,取值恒定不变的量称为常量. 如在同一大气压下水的沸点、在一段时间内银行的存款利率、圆周率 π 等. 变量之间在变化过程中形成的相互依存关系是构造函数关系的基础.

任何变量的取值都有一个确定的范围,称为该变量的变域. 变域一般是实数集的一个子集,或为实数轴上的一个点集,变量可看作该点集的一个动点. 从广义上讲,常量也可看作在一个非空单元素集合中取值的变量. 因此,常量也可看作变量的特例,在数轴上表示一个

定点.

如果变量的变域是由区间构成的，则称此类变量为连续型变量. 连续型变量在变域中的取值过程是连续的，是不能按照自然数顺序一一可列的. 在现实生活中，物理量一般都是连续型的，如时间变量 t、物体运动的速度 v、某地区的气温 T 等. 如果变量的变域是非区间形式的，即其取值过程是"跳跃"可列的，则称该类变量为离散型变量. 经济报表中的经济量通常是离散型变量，如不同年度的人口量、国民收入、税收额等.

注意 一个量的变与不变是相对的，通常与特定的过程或研究的范围有关. 例如，在世界的不同高度，水的沸点是变化的. 在一个相对长的时间范围内，银行的存款利率也在不断调整. 又如，在研究商品的销售收益时，一般情况下要考虑价格因素，即把价格看作变量处理. 但在研究广告费对销售收益的影响时，则把广告投入看作变量，而把价格看作常量. 因此，在处理具体问题时，首先要弄清问题所在的环境或条件，把握变与不变的辩证关系.

二、函数概念

定义 1.2 设有两个变量 x,y，x 属于一个非空实数集 D. 如果存在一个对应法则 f，使得对于每个 $x\in D$，依法则必存在一个唯一的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为 f 的**定义域**，记作 D_f，函数全体取值的集合称为 f 的**值域**，记作 Z_f，即 $Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

根据定义 1.2，法则 f 确定了变量 x 与 y 之间的一种对应关系，并称为函数关系. $f(x)$是在法则 f 下变量 x 对应的函数值. 显然，f 与 $f(x)$是有区别的，由于微积分主要是通过函数值 $f(x)$的变化来研究函数的，因此，我们仍然习惯上把 $f(x)$看作自变量 x 的函数.

注意 构成函数概念的两个基本要素是定义域和对应法则. 两个函数只有在定义域和对应法则都相同的情况下才相等. 例如，函数 $y=\sqrt{x(1-x)}$与 $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$有相同的定义域和对应法则，因此两函数相等. 函数 $y=\sqrt{x(x-1)}$与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$定义域不相同，因此是两个不同的函数.

三、函数表示法

表示函数关系的方法通常有图像法、表格法、公式法，有时也可用文字语言表述法.

我们来看几个函数概念的实例.

例 1 伽利略在研究自由落体运动时发现 t 时刻物体下落的距离 y 与时间 t 的平方成正比，比例系数为常数$\frac{1}{2}g$，其中 g 为重力加速度. 于是当物体从高度为 h 的地方自由下落时，变量 y 与 t 构成函数关系

$$y=\frac{1}{2}gt^2.$$

这是用公式法建立函数关系的最早实例，其中 t 为自变量，y 为因变量，定义域为 $D_f=\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，值域为 $Z_f=[0,h]$.

例 2 表 1—1 表示的是 20 世纪的世界人口数，如果用 n 表示年份，x_n 表示第 n 年世界人口数，表格构成了 x_n 与 n 的函数关系，定义域为 $D_f=\{1900,1910,1920,\cdots,2000\}$.

表 1—1 单位：百万

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口	1 650	1 750	1 860	2 070	2 300	2 560	3 040	3 710	4 450	5 280	6 080

一般情况下，我们把定义在正整数集合的函数称为**数列**，或称为**整标函数**，记作 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为**通项**或**一般项**.

例 3 图 1—5 是上海证券交易所 2013 年某交易日股票交易综合指数图. 该曲线描绘了该交易日股票行情随时间 t 的变化而波动的情况. 由曲线图可以确定该交易日内的任何一个时点股票交易价格的综合指数. 这是用图像法表示函数的一个实例.

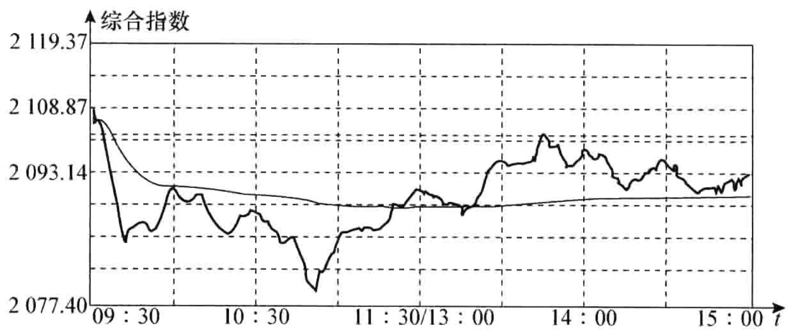

图 1—5

例 4 函数 $y=[x]$ 称为取整函数，即 y 定义为不超过 x 的最大整数，如

$$[1.054]=1,[-1.436]=-2,$$

取整函数可看作是用语言定义的函数.

四、定义域

讨论函数问题，首先要界定它的定义域. 对于由解析式表示的函数，定义域是指使该函数解析表达式有意义的自变量取值的全体，并称为函数的自然定义域.

例 5 求函数 $f(x)=\lg(x+2)-\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义，必须有

$$x+2>0 \text{ 且 } 25-x^2>0.$$

即 $x>-2$，且 $-5<x<5$，从而可得函数定义域为

$$D_f=(-2,+\infty)\cap(-5,5)=(-2,5).$$

例 6 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$，求函数 $g(x)=f(\log_2|x|)+f(2^x)$ 的定义域.

解 要使 $g(x)$ 有意义，必须使 $f(\log_2|x|)$，$f(2^x)$ 同时有意义，即有

$$0\leqslant\log_2|x|<1 \text{ 且 } 0\leqslant 2^x<1,$$

即

$$\begin{cases} -2<x\leqslant -1, 或\ 1\leqslant x<2 \\ x<0 \end{cases},$$

从而得函数定义域为 $D_g=(-2,-1]$.

上面例子表明，求函数的自然定义域，必须掌握常用函数，尤其是基本初等函数的定义范围，例如，分式的分母不能为零，对数的真数必须为正，偶次方根内的函数应该非负，由函数的四则运算组合而成的函数的定义域是各函数定义域的交集. 在求有实际背景的函数定义域时，在计算自然定义域的基础上还应根据实际意义进一步确定. 如例 1 中，函数 $y=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域为 $(-\infty,+\infty)$，依题意确定的实际定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

五、分段函数

在讨论经济问题时，经常会遇到一类在其定义域的不同部分用不同表达式表示的函数，称为分段函数. 例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & 当\ x\geqslant 0\ 时 \\ -x, & 当\ x<0\ 时 \end{cases}$$

和取整函数

$$y=[x]=\{n, n\leqslant x<n+1, n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$$

都可看作分段函数，其定义域为各段定义域的并集，即 $(-\infty,+\infty)$. 函数图形分别如图 1—6 和图 1—7 所示.

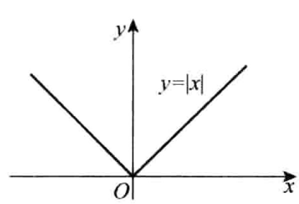

图 1—6

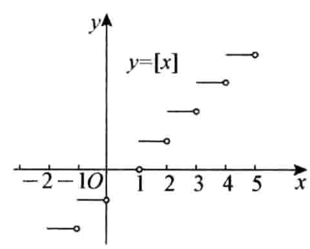

图 1—7

下面再看几个分段函数的例子.

例 7 某网络公司上网计费规定为：若每天上网不超过 2 个小时，每小时收费 2 元；上网在 2 至 4 个小时之间（不含 2 个小时），每小时收费 1.5 元，若每天上网超过 4 个小时（不含 4 个小时），每小时收费 1 元，则每天上网时间 t 与上网费用 $f(t)$ 之间有以下函数关系（单位：元）：

$$f(t)=\begin{cases} 2t, & 0\leqslant t\leqslant 2 \\ 1.5t, & 2<t\leqslant 4 \\ t, & 4<t\leqslant 24 \end{cases}.$$

显然 $f(t)$是分段函数，函数图形如图 1—8 所示，定义域为

$$D_f=[0,2]\cup(2,4]\cup(4,24]=[0,24].$$

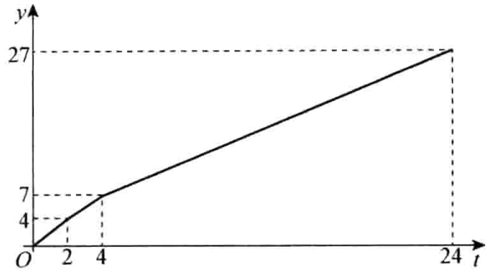

图 1—8

从例 7 的计费过程看，在各计费分段的开区间内，上网费用可由公式一般处理，而在分段点处，如何计费，容易引发争议，要严格按定义单独处理. 这也体现了处理分段函数问题的基本思路，即在各分段开区间，按公式或一般规则处理，分段点处应严格按相关定义处理.

注意 分段函数是在不同区间段用不同解析式表示的一个函数，而不是几个函数.

§1.3 函数的几何特性

函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性，是与函数的几何图形相关联的几个最为重要的函数特性，介绍如下.

一、单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$在实数集 D 上有定义，x_1，x_2 是取自 D 的任意两点，且 $x_1<x_2$，于是，

(1)若总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上**单调增加**，

(2)若总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上**单调减少**.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**，若 D 为区间，则称 D 为单调区间. 单调增加函数的图形是一条沿 x 轴正向上升的曲线，如图 1—9(1)所示；单调减少函数的图形是一条沿 x 轴正向下降的曲线，如图 1—9(2)所示.

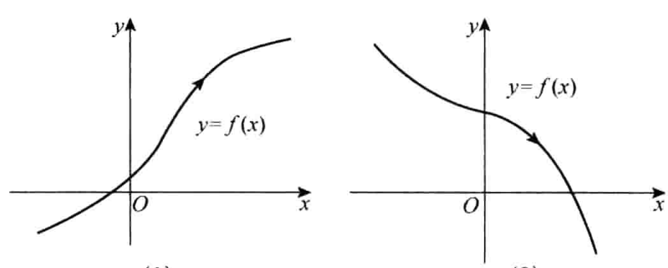

图 1—9

例 1 讨论函数 $f(x)=x^2$ 的单调性.

解 设 x_1，x_2 为两个任意实数，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

于是，当 $x_1<x_2<0$ 时，总有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，从而知 $f(x)$在$(-\infty,0)$内单调减少. 当 $0<$