

有耗媒质中电磁场的计算和测量

刘鹏程 朱建立 编译

西安电子科技大学情报资料室
一九八九年十月

有耗媒质中电磁场的计算和测量

前 言

有耗媒质中电磁场的计算和测量是有耗电磁学、生物电子学及电磁场技术等领域中重要的课题。近年来引起了国内、外学者的关注。由于媒质的有耗性及其几何形状的不规则，因而确定有耗媒质内的感应电磁场是很困难的。本资料介绍了有耗媒质中电磁场的计算方法，其中有张量积分方程法、快速付里叶变换法、扩展边界条件法、谱迭代法和MIE方法等。既有解析计算又有数值计算，既有二维问题计算又有三维问题计算。还介绍了有耗媒质内场的几种测量手段。该资料从一个侧面反映了电磁场计算的近代发展及应用，可供有关专业的科研人员、教师 and 研究生参考。

资料的编译工作是在梁昌洪教授的指导下进行的。因编译者水平有限，译文中不妥之处肯定存在，请批评指正。

编译者

1989. 3.

有耗媒质中电磁场的计算和测量

目 录

1. 在有限长的生物体内感应电磁场的实验研究与理论研究
刘鹏程译 胡小培
2. 任意形状生物体内的感应电磁场
刘鹏程译 胡小培
3. 在精细离散的非均匀生物体模型中计算比吸收率(SAR)分布的快速付里叶变换法
刘鹏程译 朱建立校
4. 生物体内电磁场的数值分析
刘鹏程译 朱建立校
5. 口径源近场作用下有耗介质体的散射和吸收特性
刘鹏程译 朱建立校
6. 求解大纵横比的有耗介质体吸收特性的迭代扩展边界条件法
邱长兴译 刘鹏程校
7. 生物媒质中微波功率吸收分析的一种新的分层二维谱迭代方法
邱长兴译 刘鹏程校
8. 1—20 MHz 电磁波照射下人体球形模型中的功率积聚
朱建立译 刘鹏程校
9. 电磁场与生物体的相互作用
杨承勇 朱建立译 刘鹏程校

在有限长的生物体内感应电磁场 的实验研究与理论研究

B.S. GURU, KUN-MU CHEN

摘要：电磁波在某些仿真生物体内感应的电场，已用近代提出的张量积分方程法来进行定量计算和用绝缘探针来进行定量测量。一般来说，求得生物体内的感应电场是很复杂的，在理论与实验之间已经得到极好的一致性。

一、引言

在电磁辐射与生物体相互作用的研究中，决定物体生物效应的关键物理量是由入射电磁波在物体内部感应的实际电磁场，因为生物体一般是一个形状不规则的非均匀的有限长的物体。定量地求出其内部的电磁场是一个困难的问题，为了进行数学简化，通常利用的模型是平板〔1, 2〕，球〔3-5〕，圆柱和多球体〔7, 8〕，虽然这样简单的模型提供了内部电磁场的估计，但这些结果对于不规则形状的生物体及微波照射的应用受到限制。

近来，Livesay 和 chen〔9〕提出一种理论方法称为张量积分方程法，该方法可用来定量计算入射电磁波在任意形状生物体内部所感应的电磁场。并且已经用来确定由微波照射下的一些仿真生物体内部的感应场，同一感应场已用小绝缘探针测量出来。一般来说，计算物体内部的感应电场，即使入射波是简单的平面波也是很复杂的，在该研究中，理论和实验结果之间是精确一致的，这种一致性证实了张量积分方程法是正确的，在本文中还讨论了与埋入有限长生物体内的插入探针有关的固定实验误差。

二、张量积分方程法

因为张量积分方程法已经发表，这里只引用两个关键的方程。

如果任意形状的有限长生物体具有介电常数 $\epsilon(\vec{r})$ ，电导率 $\sigma(\vec{r})$ ，磁导率 μ_0 ，

该物体在自由空间中由电场强度为 $\vec{E}^i(\vec{r})$ 的入射电磁波照射，则生物体内的感应总电场可由下面的张量积分方程来确定

$$\left[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3j\omega\epsilon_0}\right] \vec{E}(\vec{r}) - PV \int_V \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ = \vec{E}^i(\vec{r}) \quad (1)$$

式中 $\tau(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) + j\omega[\epsilon(\vec{r}) - \epsilon_0]$, ϵ_0 是自由空间的介电常数, PV 符号表示积分的主值, $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ 是自由空间的张量格林函数, V 是生物体的体积。

如果将生物体分成 N 个小体积或称子体积, 假设每个子体积内, $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\tau(\vec{r})$ 是常数, 则由点匹配法, 对于在 N 个子体积中心的 $\vec{E}_x$ 、 $\vec{E}_y$ 、 $\vec{E}_z$, (1) 式可变换为 $3N$ 个齐次方程, 这些齐次方程用矩阵形式写为

$$\begin{bmatrix} [G_{xx}] & [G_{xy}] & [G_{xz}] \\ [G_{yx}] & [G_{yy}] & [G_{yz}] \\ [G_{zx}] & [G_{zy}] & [G_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\vec{E}_x] \\ [\vec{E}_y] \\ [\vec{E}_z] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\vec{E}_x^i] \\ [\vec{E}_y^i] \\ [\vec{E}_z^i] \end{bmatrix} \quad (2)$$

$[G]$ 是 $3N \times 3N$ 阶矩阵, 而 $[\vec{E}]$ 和 $[\vec{E}^i]$ 是 $3N$ 阶列矩阵, 分别表示在 N 单元 (小室) 中心的总电场和入射场, $[G]$ 矩阵的元素在文献 [9] 中已经计算。因此, 利用已知的入射场 $\vec{E}^i(\vec{r})$, 生物体内感应的总电场可由 (2) 式, 通过 $[G]$ 的逆矩阵来得到。

该方法已经用来计算由简单的平面波照射的生物体内的感应电场。下面举个例子, 用以证明即使入射波是简单的平面波, 生物体内的感应电磁场也是很复杂的。样品是

$5 \times 5 \times 0.5 \text{ cm}$ 的肌肉层, 用 1 GHz 的平面电磁波从一端入射, 如图 1 所示, 对于这种情况, 入射波的电场相对肌肉层的中心轴 (x 轴) 可分解为对称分量及反对称分量

$$\vec{E}^i = e^{-j\beta_0 z} \hat{x} = \vec{E}_s^i + \vec{E}_a^i$$

式中

$$\vec{E}_s^i = \cos \beta_0 z \hat{x} \\ \vec{E}_a^i = -j \sin \beta_0 z \hat{x} \quad (3)$$

在肌肉层内部感应的总电场也由对称分量 $\vec{E}_s$ 和反对称分量 $\vec{E}_a$ 组成, $\vec{E}_s$ 和 $\vec{E}_a$ 可由下列张量积分方程来确定:

$$\left[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3j\omega\epsilon_0}\right] \vec{E}_s(\vec{r}) - PV \int_V \tau(\vec{r}') \vec{E}_s(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ = \cos \beta_0 z \hat{x} \quad (4)$$

$$\left[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3j\omega\epsilon_0}\right] \vec{E}_a(\vec{r}) - PV \int_V \tau(\vec{r}') \vec{E}_a(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ = -j \sin \beta_0 z \hat{x} \quad (5)$$

$\vec{E}_s(\vec{r})$ 和 $\vec{E}_a(\vec{r})$ 的数字结果如图 1-3 所示。图 1 表明, $\vec{E}_s(\vec{r})$ 是大致平行于入射场的线极化场。图 2 指出 $\vec{E}_a(\vec{r})$ 近似是一个线极化的环形场。 $\vec{E}_a(\vec{r})$ 激励一个涡旋电流, 这可以由另一种观点看成是入射波的磁场所感应的。如果将 $\vec{E}_s(\vec{r})$ 和 $\vec{E}_a(\vec{r})$ 合成, 得到总的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 是椭圆极化的, 如图 3 所示。一般说来, $\vec{E}(\vec{r})$ 的振幅和相位是生物体内位置的函数而且与入射波的频率、极化及生物体的电物理特性有关。

重要的是应指出, 如果假设入射场 $\vec{E}^i(\vec{r})$ 在生物层上是近似均匀的, 而且 $\vec{E}^i(\vec{r})$ 的反对称分量可以忽略(这个假设是很粗糙的, 当物体与波长相比很小时经常采用)则总的感应电场是线极化场, 其分布类似于 $\vec{E}_s(\vec{r})$ 如图 1 所示。这样, 反对称分量 $\vec{E}_a(\vec{r})$ 完全被忽视了, 椭圆极化总场 $\vec{E}(\vec{r})$ 的精确特性没有指出。

该例子表明, 入射场的精细特性对于精确地确定物体内部的感应场是很重要的, 对于物体被非均匀电场照射的情况下要特别注意。对于电小物体的情况, 如果作准静近似, 该物体应假设侵入在近似均匀的入射电场和磁场中。

为了证明上述理论观点和证实张量积分方程法的正确性。作一个测量装有盐溶液的小盒内部感应电场的实验, 这个实验的详细情况在第三节中给出。

三、实 验

测量仿真生物体内感应电场的实验设备简图如图 4 所示。对于仿真生物体, 各种尺寸的许多实验模型是由有机玻璃来构成, 其内充满各种浓度的盐溶液。将这些模型置入暗室中并由 1.7 到 13GHz (有 1KHz 调制) 频率的喇叭天线辐射的电磁波来照射。在溶液内的感应电场是由一个小的偶极子探针来测量, 在其端点用一微波检波器偶极子 (HP5082-2755) 作为其负载。探针的检波输出通过一对细的高阻线 (直径为 $2\text{mil} = 2 \times 10^{-3}$ 吋的 Nichrome V 线) 接到驻波表上, 为了减少对入射电磁波的影响必需用高阻线, 因为探针和高阻线的一部分是侵在导电的盐溶液中, 因此探针及导线必须用 K1 yron 薄层来绝缘。垂直电偶极子用于测量感应电场的垂直分量 (E_z), 而水平电偶极子用来测量水平分量 (E_y 和 E_x), 偶极子的长度大约为 5mm。

在图5至17中给出实验结果与理论结果的比较,在图5中,一个尺寸为 $6 \times 6 \times 1$ cm的有机玻璃盒内装有0.5当量的盐溶液,被频率为2.45 GHz的垂直电场在一端入射,图6指出了在小体积中心处感应电场 x 、 z 分量的理论结果,因为 y 分量很小而忽略了。在该计算中假设 $\sigma = 5.934 \text{ v/m}$, $\epsilon = 68.48\epsilon_0$,这相当于0.5盐浓度当量在9.45 GHz的值[10]。由于对称性,图6只表示出模型之半。图7的上半部分表示由 E_x 产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ 的理论和实验结果的比较。是沿 $x = 0.5$ cm, $x = 1.5$ cm和 $x = 2.5$ cm作为 z 的函数给出的,图7的下半部分给出由于 E_x 产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ 理论和实验值,是沿 $x = 0.5$ cm, $x = 1.5$ cm和 $x = 2.5$ cm作为 z 的函数给出的。可以看出,损耗功率图是位置的复杂函数。而理论和实验结果是非常一致的。应注意在图7中关于 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ 的实验结果是不能得到的,因为在靠近盒子的边缘不能用有限尺度的水平探针来测量 E_x 。下一个例子我们考虑在 $12 \times 12 \times 1$ cm模型内的场,该模型内含有各种浓度当量的盐溶液。由2.032或2.45 GHz的微波垂直入射。图8表示对三种不同的频率、电导率和介电常数情况下沿 $x = 0.5$ cm线作为 y 的函数由 E_x 产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ 的理论和实验值。图8中的每种情况均指定 f 、 σ 和 ϵ 的特定值。当 f 、 σ 和 ϵ 有较小变化时,损耗功率的分布将有很大变化。除了在模型的边缘之外,理论与实验结果完全一致。边缘处的误差将在第四节中讨论。在图9中表示了大模型 $16 \times 16 \times 1$ cm中 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ 的分布,图中表示出相关参数,并指出理论和实验结果还是完全一致的,只是在模型的边缘除外。还研究了比较厚的模型($12 \times 12 \times 2$ cm),如图10所示。研究该模型的目的是观察感应电场随入射波的穿透深度是怎样衰减的以及场分布的伴随变化。图11表示由 E_x 产生的损耗功率 $\sigma/2 E_x^2$ 在通过第一第二层中心沿 $x = 0.5$ cm线作为 y 函数的理论和实验结果,不出所料,在第一层中的损耗功率高于第二层几个分贝,另一个有趣的现象是在这两层中的损耗功率分布图相差很大,还可看到,在这种情况下理论和实验结果是一致的。

在充分考查长方体内的感应电场之后,考虑不规则物体的情况,其尺寸及结构如图12所出的I—型模型,由2.45 GHz的微波垂直入射及端入射。实验时模型内充满0.5当量的盐溶液,图13指出了用微波功率垂直入射时模型内感应电场 $\vec{E}$ 的理论值。由于对称性,图13只划出模型的四分之一,在小体积的中心处 E_x 和 E_y 的振幅和相位也表示在图中,由于 E_x 很小而忽略了,图14指出由 E_x 产生的损耗功率

$\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ (在 $x = 0.5$ cm和 $x = 3.5$ cm线上作为 y 的函数)理论和实验值的比较,损

耗功率是位置的复杂函数，但理论和实验结果是非常一致的，图 15 指出由 $\mathbf{E}_y$ 所产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_y^2$ （在 $x = 0.5\text{cm}$ 和 $x = 3.5\text{cm}$ 线上作为 y 的函数）理论和实验结果的比较。在图 16 和图 17 中指出 I——型模型用同样的激励功率在端入射情况下的结果，图 16 指出由 $\mathbf{E}_x$ 产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_x^2$ （在 $x = 0.5\text{cm}$ 及 $x = 3.5\text{cm}$ 线上作为 z 的函数）理论和实验结果的比较，可以看出，损耗功率作为位置的函数与垂直入射的情况是不同的。而且在这种情况下再一次得到理论和实验结果是完全一致的。（注意，端入射情况的 z 轴相应于垂直入射情况的 y 轴）图 17 指出了由 $\mathbf{E}_z$ 产生的损耗功率 $\frac{1}{2}\sigma E_z^2$ （沿 $x = 3.5\text{cm}$ 及 $x = 5\text{cm}$ 线作为 z 的函数）理论和实验值。

正如由图 5 至图 17 所显见的，张量积分方程法已完全被实验所证实（只是在物体边缘除外）在物体边缘处，理论和实验值的偏差主要是由于实验探针的固有误差。这一点将在第四节中讨论。

四、实验误差

当把探针插入有限长的生物体内用以测量感应电场时，探针的输出成为与位置相关的。特别是在物体的边缘，为了说明这一事实，我们研究其几何形状如图 18 所示的问题。一有限长物体占据空间区域为 V ，其电参数用 $\epsilon(\vec{r})$ ， $\sigma(\vec{r})$ 和 μ_0 来表征。该物体被电场为 $\vec{E}^i$ 的入射波所照射，一细线探针插入 V 内，在回路 Γ 上探针的位置用变量 s 表示，在探针的端点为 s 的原点（ $s = 0$ ）， $\hat{s}$ 为任意点上对 Γ 的单位切线矢量。 V_0 和 I_0 是探针端点的电压和电流，负载阻抗 Z_L 联接在探针端点。入射电场 $\vec{E}^i$ 在物体 V 内激励感应电场 $\vec{E}(\vec{r})$ ，该电场继而在探针中激励电流分布 $I(s) = I_0 f(s)$ ，其中 $f(s)$ 是电流分布函数，且 $f(0) = 1$ ，探针上的感应电流在物体中又维持一个二次场 $\vec{E}_p$ 。这样当探针存在时 V 内的总电场

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + \vec{E}_p(\vec{r}) \quad (6)$$

探针的作用是测量 $\vec{E}(\vec{r})$ 而不是 $\vec{E}'(\vec{r})$ ，从下面的研究中可以看到确实是这样。

在探针表面切向电场的边界条件要求除窄缝端外有 $\hat{s} \cdot \vec{E}'(s) = 0$ ，在窄缝端

$$\vec{s} \cdot \vec{E}'(s) = V_0 \delta(s) = Z_L I_0 \delta(s) \quad (7)$$

式中 $V_0 = Z_L I_0$ 如图 18 所示。

对方程 (7) 积分有

$$\int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}'(s) ds = Z_L I_0, \quad (\because f(0)=1) \quad (8)$$

利用式 (6), (8) 式为

$$\int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}(s) ds + \int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}_p(s) ds = Z_L I_0 \quad (9)$$

因为式 (9) 中的第一项积分代表探针电流的总电动势, 可把等效探针电压定义为

$$V_{eq} = \int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}(s) ds \quad (10)$$

$\vec{E}(s)$ 是在探针不存在时, 探针所在处的内电场。这是测量的关键数值。

式 (9) 的第二项积分是 $\vec{E}_p(s)$ 的积分, 它正比于 I_0 , 可以把探针的内阻定义为

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_0} \int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}_p(s) ds \quad (11)$$

这个 Z_{in} 是探针作为埋入有限生物体的辐射天线时的输入阻抗。

把式 (10)、(11) 代入式 (9) 中得

$$V_{eq} = I_0 Z_{in} + I_0 Z_L$$

或

$$I_0 = \frac{V_{eq}}{Z_{in} + Z_L} \quad (12)$$

方程 (12) 导出一个探针的等效电路, 如图 19 所示, 该电路与接收天线的常规等效电路不同, 电路中的 Z_{in} 与媒质的不均匀性和物体的几何形状有密切关系。因为 $f(s)$ 是探针所在处电参数的函数, 所以 V_{eq} 也受媒质不均匀性的影响。

探针的响应等于端电压, 并可表示为

$$\begin{aligned} V_0(\vec{r}) &= I_0 Z_L = \frac{V_{eq}(\vec{r}) Z_L}{Z_{in}(\vec{r}) + Z_L} \\ &= \frac{Z_L}{Z_{in}(\vec{r}) + Z_L} \int_{\Gamma} f(s) \vec{s} \cdot \vec{E}(s) ds \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} f(s) \vec{s} ds \left[\frac{Z_L}{Z_{in}(\vec{r}) + Z_L} \right] \quad (13)$$

(对于小探针) 方程 (13) 清楚地指出探针响应正比探针所在处的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ (当探针不存在时)。而且还可指出 $V_0(\vec{r})$ 和 $\vec{E}(\vec{r})$ 间的比例常数, 由于下列原因是位置的强函数。第一, 在式 (11) 中定义的 $Z_{in}(\vec{r})$ 是位置的函数, 因为由探针电流所产生的 $\vec{E}_p(s)$ 与探针的相对位置及物体的形状有关。第二, 探针电流的分布函数 $f(s)$ 与探针所在处的电参数 ($\epsilon(\vec{r}), \sigma(\vec{r})$) 有关。应注意到, 在均匀媒质中, 例如在我们的实验模型中, ϵ 和 σ 是常数, 所以 $f(s)$ 也保持不变, 而且 $Z_{in}(\vec{r})$ 在均匀有限物体中也是位置的强函数。

简单的实验可指出, $Z_{in}(\vec{r})$ 在接近物体的边缘时发生急剧变化, $V_0(\vec{r})$ 和 $\vec{E}(\vec{r})$ 间的比例常数在接近物体边缘时也有急剧变化而引起该位置的固有误差。因此在插入探针用于精确测量有限物体内的感应场之前, 需要位置关系的探针校准因子。

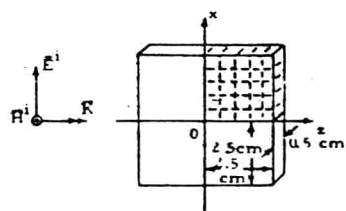
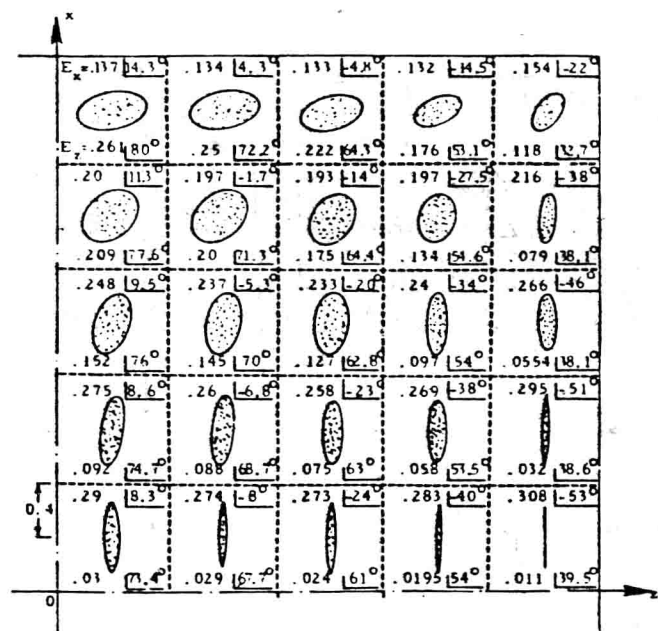
五、结 论

用有屏蔽的插入探针测量含有盐溶液的有限物体内部感应电场的实验已经作出, 实验结果用以证实基于张量积分方程法的理论结果的精确性。理论和实验结果均指出, 有限生物体内感应电场的复杂性。对用植入有限生物体内的探针而引入的固有实验误差也进行了讨论。

在张量积分方程法的数字计算中, 如果小体积的尺寸小于自由空间波长的四分之一, 将得到足够精确的结果。虽然用这小体积的尺寸不能预测物体内部驻波的精确图形。但可足以精确地预测体积中心处的感应电场。如果需要更精确的驻波图形, 必需减小小体积的尺寸而增加计算时间的消费。重要的是数字张量积分方程法在任意形状生物体内可得到精确解。唯一的限制是计算时间和计算机的存储容量。

(参考文献略)。

(译自: IEEE Tran. Vol. MTT-24, NO.7, July 1976)



$$f = 1 \text{ GHz}$$

$$\epsilon_r = 50.71$$

$$\sigma_r = 1.62 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$E^i = e^{-j\beta_0 z} \hat{a}_x$$

图 3

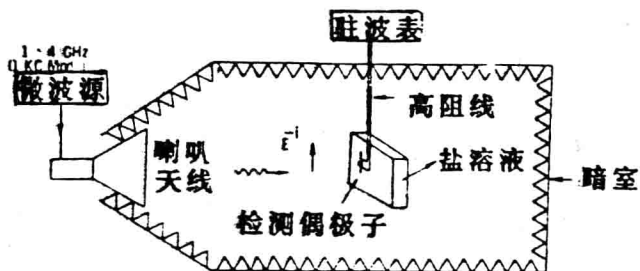


图 4

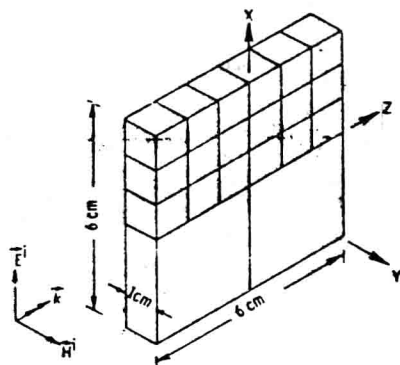


图 5

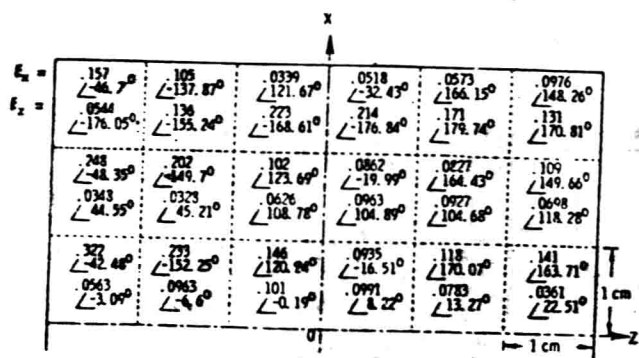


图 6

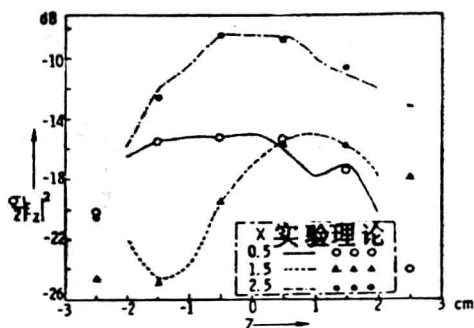
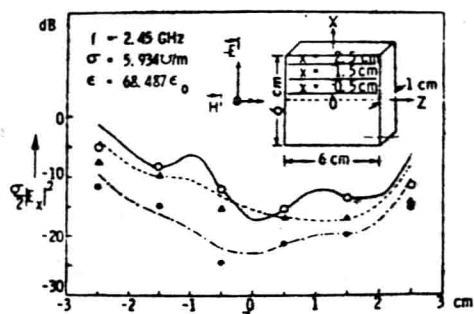
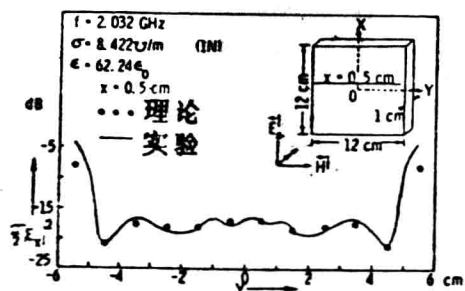


图 7

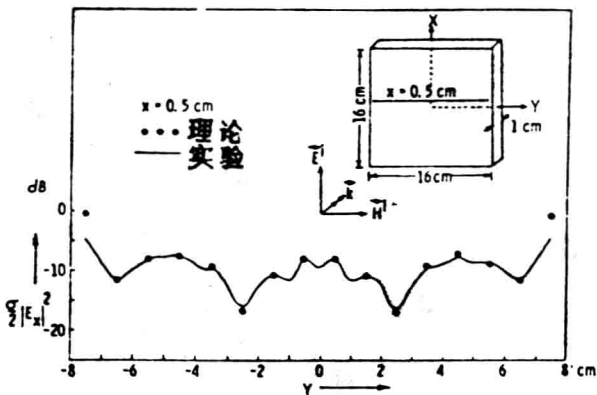
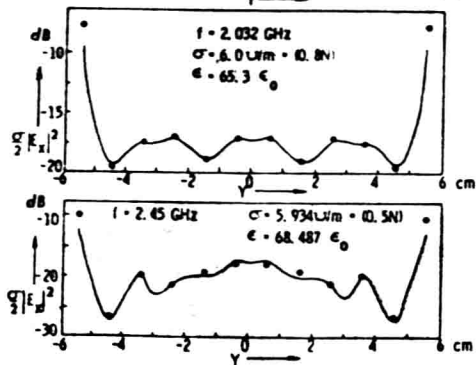


图 8

图 9

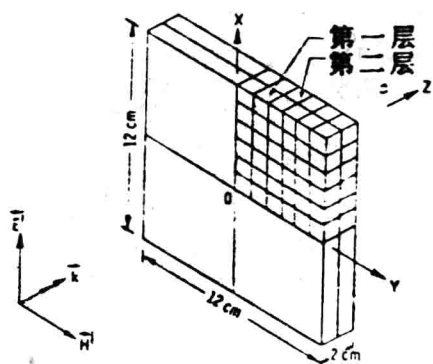


图 10

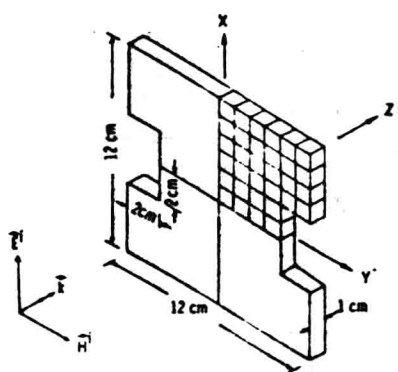


图 12

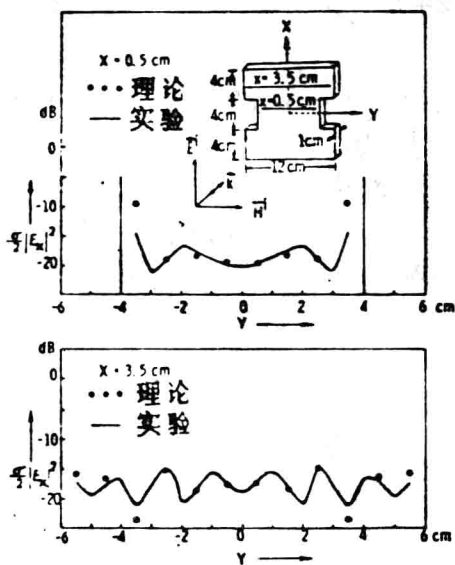


图 14

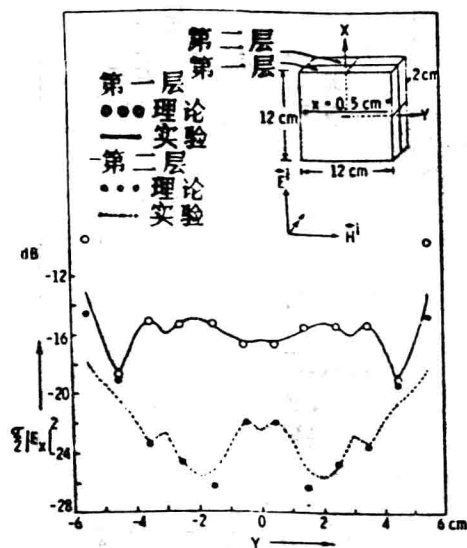


图 11

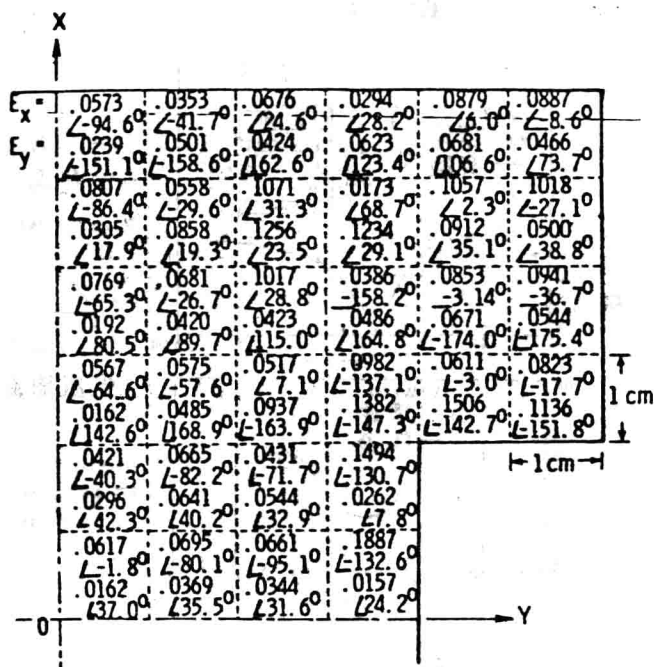


图 13

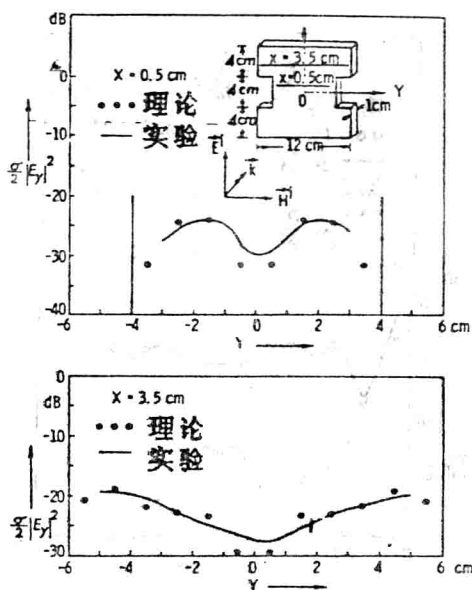


图 15

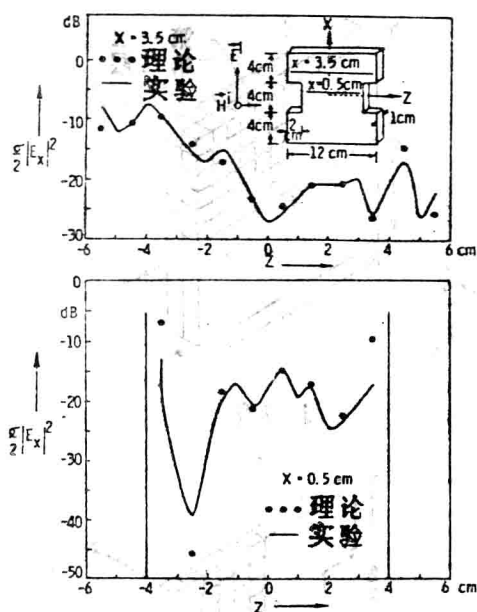


图 16

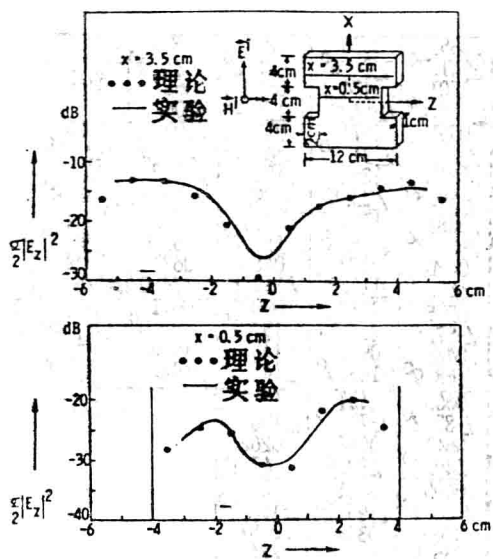


图 17

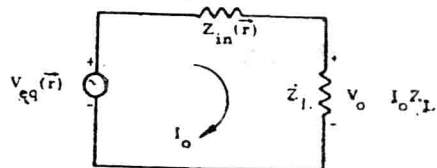


图 19

$Z_L =$ 负载阻抗
 $J_0 =$ 终端电流
 $V_0 = Z_L I_0 =$ 终端电压

电压测量仪

$I(s) = I_0 f(s)$
 $=$ 感应探针电流
 $(f(0) = 1)$

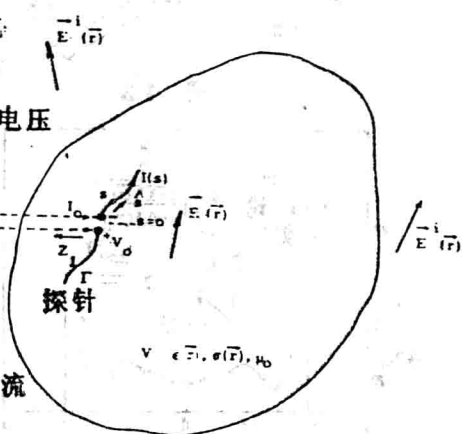


图 18

任意形状生物体内的感应电磁场

D.E. LIVESAY, KUN-MU CHEN

摘要：本文提出一种确定不规则形状的非均匀生物体内部感应电磁场的理论方法，导出了物体内部电场的张量积分方程并对各种生物体模型进行数字解。

一、引言

在前几年中，许多研究者对非电离电磁辐射的可能危害性进行争论，人和生物体对电磁辐射呈现出许多物理生物效应。但研究者还远不能确定这是热产生的效应还是非热产生的。出现这个问题主要是因为难以确定任意形状生物体内部电磁场的强度，不知道场强，实际上不可能确定生物结构内部热的产生和温度。所以难以判断所观察的效应是热的还是非热的。

当人体或生物体受到电磁波的照射时，在物体内部感应出电磁场，而电磁波将被物体向外散射。因为人体或生物体是一种形状不规则的，具有与频率有关的电容率和导电率的导电媒质，内部电磁场和散射电磁场的分布取决于物体的物理生物参数、几何形状以及入射波的频率和极化。

问题的数学复杂性使在该领域的研究者首先研究生物结构的简单模型。一些共同采用的模型是平板〔3〕〔4〕和介质柱〔5〕。

虽然分析简单的模型可以加强我们对微波吸收和生物组织散射的理解，但其结果对用于任意的物理生物系统受到限制。在我们的研究中，已经导出计算任意生物体内入射电磁波的感应电场。在导出内电场的张量积分方程之后，着手用矩量法对方程进行数字解〔7〕。

我们注意到 Richmond 对任意横截面的有限介质柱的二维积分方程已完成了类似于矩量法的解。用于介质环散射的积分方程法已由 V. Doren 研究出〔10〕。

二、积分方程的推导

考虑介电常数为 $\epsilon(\vec{r})$ ，导电率为 $\sigma(\vec{r})$ 任意形状的有限物体，在自由空间中被平面电磁波所照射，如图 1 所示。感应电流产生散射场 $\mathbf{E}^s$ ，该散射场可用自由空间等

等效电流密度 $\vec{J}_{eq}$ 代替该物体来计算, $\vec{J}_{eq}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\vec{J}_{eq}(\vec{r}) &= [\sigma(\vec{r}) + j\omega(\epsilon(\vec{r}) - \epsilon_0)]\vec{E}(\vec{r}) \\ &= \tau(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\end{aligned}\quad (1)$$

式(1)中的第一项是传导电流, 第二项代表极化电流, ϵ_0 是自由空间的介电常数,

$\vec{E}(\vec{r})$ 是物体内的总电场。

物体内的散射场可由 $\vec{J}_{eq}$ 用自由空间的张量格林函数来表示。然而当场点在物体内部时, 由于问题的奇异性和唯一性 $\vec{E}^s$ 的计算必须特别注意。根据 V. Bladel's 的论文 [6], 在物体内部任一意的散射场可表示为

$$\begin{aligned}\vec{E}^s(\vec{r}) &= \int_V \vec{J}_{eq}(\vec{r}') \cdot [PV\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{\vec{I}\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{3j\omega\epsilon_0}] dV' \\ &= PV \int_V \vec{J}_{eq}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{\vec{J}_{eq}}{3j\omega\epsilon_0}\end{aligned}\quad (2)$$

式中

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -j\omega\mu_0 [\vec{I} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}] \phi(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3)$$

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp(-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (4)$$

$$k_0 = \omega(\mu_0\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

μ_0 是自由空间的磁导率, PV 注脚表示由 V. Bladel 定义的积分的主值。

我们可把物体内的总场写为入射场 $\vec{E}^i$ 和散射场 $\vec{E}^s$ 的总和, 即

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + \vec{E}^s(\vec{r}) \quad (5)$$

把式(2)代入式(5)中并重新排列各项, 对 $\vec{E}(\vec{r})$ 给出积分方程:

$$\begin{aligned}[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3j\omega\epsilon_0}]\vec{E}(\vec{r}) &- PV \int_V \tau(\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ &= \vec{E}^i(\vec{r})\end{aligned}\quad (6)$$

在式(6)中, $\vec{E}^i(\vec{r})$ 是入射电场是已知量, $\vec{E}(\vec{r})$ 是物体内的未知总电场。 $\vec{E}(\vec{r})$