

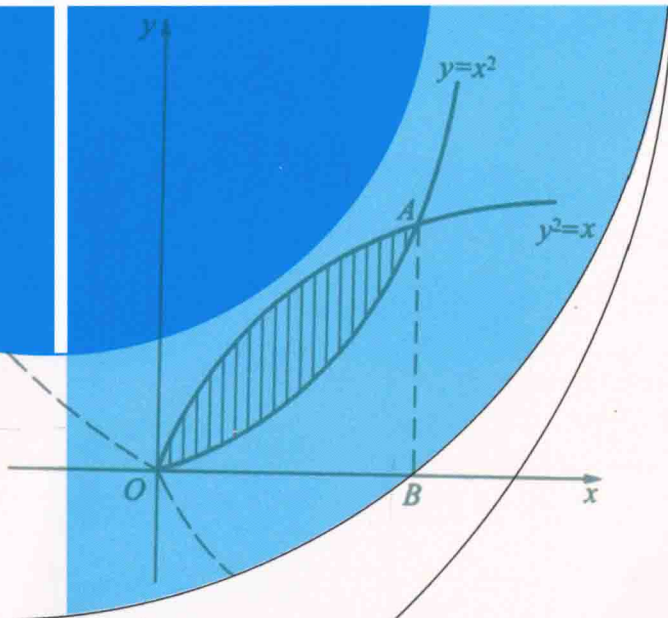



全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

刘晓峰 主编



 中国农业出版社

全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

刘晓峰 主编

中国农业出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 刘晓峰主编. —北京: 中国农业出版社, 2012. 5

全国高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-16674-5

I. ①高… II. ①刘… III. ①高等数学-高等职业教育-教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 063084 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 李 燕

文字编辑 魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2012 年 5 月第 1 版 2012 年 5 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 12.75

字数: 293 千字

定价: 25.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编审人员名单



主 编 刘晓峰

副主编 孙用明 朱广恩

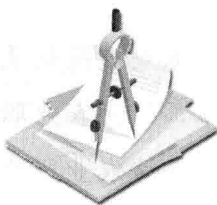
编 者 (以姓名笔画为序)

朱广恩 刘晓峰 孙用明

李甜甜 费彦宏

审 稿 王贺元

【 前 言 】



目前，随着我国高等教育的快速发展和高职人才培养模式的不断创新，对高职教材建设不断提出了新的要求。近年来，高职院校在创建全国示范性、骨干性高等职业技术学院活动中，在专业建设、课程设置、教学内容、教学方法和教学手段等方面进行了深入改革，使高职院校办学特色更加明显。本教材是结合目前高职院校学生的状况和高等数学课程教学特点，从教学实际出发，紧扣“必需、够用、实用”的教学原则，以专业课程对数学知识的需求为依据，汲取全国高职院校高等数学教学改革成果编写而成的，具有以下特色：

1. 本书紧紧围绕高职院校各专业的培养目标，以能力为基础，以素质培养为主线，按照高职院校各专业职业岗位需求的基本数学知识选择和安排教学内容，教学时可针对各专业对数学基础不同需求及教学计划学时实际，选择教材的全部内容或部分章节。

2. 本书从高职院校学生的认知实际出发，起点低，注意与高中阶段数学知识的衔接；内容广而不深，数学概念的引入强调从实际背景出发，可读性强；理论以“必需”、“够用”为度；每节后附有同步训练，每章后附有阅读小知识、本章小结和自测题。

3. 注重与各专业的结合，从实例引入问题，以问题为引线进行数学的概念、应用及其实际意义、数学思想方法等方面的介绍。围绕着案例教学，注重让学生在“做中学”、“学中做”，在运用数学知识解决实际问题的过程中进行体验学习。

4. 引入数学软件 MATLAB，让学生接触现代计算技术。教学时把数学软件作为演示工具、计算工具和应用工具，构建高等数学学习平台，让学生自主进行“数学实验”及“问题解决”。注重培养学生用现代计算技术进行数学学习的意



识，为学生将来运用现代计算技术解决实际问题打好基础。

本书由刘晓峰担任主编，孙用明，朱广恩担任副主编。具体编写分工为：辽宁职业学院刘晓峰编写第一章、第四章、第五章，河南科技学院孙用明编写第六章，河南农业职业学院朱广恩编写第三章，辽宁职业学院李甜甜编写第七章，山西运城农业职业技术学院费彦宏编写第二章，习题参考答案、附录及全书统稿工作由刘晓峰完成。

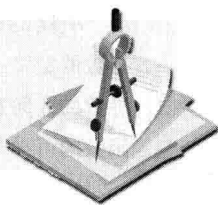
辽宁工业大学王贺元教授对本书进行了审稿并提出了大量建设性意见和建议，各位编者所在学校的有关领导和同志们在本书组稿和编写过程中提供了许多帮助和支持，在此一并表示感谢。

书中如存在不足之处，恳切希望得到广大读者的批评指正。

编者

2012年1月

【目 录】



前言

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
一、函数的概念	1
二、初等函数	3
【同步训练 1.1】	5
第二节 极限	6
一、极限的概念	6
二、极限的运算	8
【同步训练 1.2】	12
第三节 无穷小量与无穷大量	13
一、无穷小量	13
二、无穷大量	14
三、无穷小量与无穷大量的关系	14
【同步训练 1.3】	14
第四节 函数的连续性	15
一、函数连续性的概念	15
二、初等函数的连续性	16
【同步训练 1.4】	17
第五节 应用模型	17
一、合理避税问题	18
二、复利问题	19
【同步训练 1.5】	19
阅读小知识	20
本章小结	21
自测题 1	22



第二章 一元函数的导数与微分	24
第一节 导数的概念	24
一、导数的定义	24
二、导数的几何意义	27
三、函数的可导与连续	27
【同步训练 2.1】	27
第二节 导数的基本公式与运算法则	28
一、基本初等函数的导数公式	28
二、导数的运算法则	28
三、高阶导数	31
【同步训练 2.2】	32
第三节 函数的微分	33
一、微分的概念	33
二、微分的运算	34
三、微分在近似计算中的应用	35
【同步训练 2.3】	36
第四节 导数的应用	36
一、函数单调性的判别法	36
二、函数的极值	37
三、函数的最值	39
四、曲线的凹凸性与拐点	39
五、曲线的渐近线	40
【同步训练 2.4】	41
第五节 应用模型	41
一、最省油的车速	41
二、最经济的采购	42
【同步训练 2.5】	43
阅读小知识	43
本章小结	45
自测题 2	45
第三章 一元函数的积分学	47
第一节 不定积分的概念与性质	47
一、原函数与不定积分	47
二、不定积分的性质与基本积分公式	49
【同步训练 3.1】	51
第二节 不定积分的计算	51



一、第一类换元积分法	51
二、第二类换元积分法	53
三、分部积分法	55
【同步训练 3.2】	56
第三节 积分表的使用	57
一、直接查表法	57
二、先代换后查表	57
三、利用递推公式	58
【同步训练 3.3】	58
第四节 定积分的概念与性质	59
一、定积分的概念	59
二、定积分的性质	62
【同步训练 3.4】	63
第五节 定积分的计算	63
一、微积分基本定理	63
二、定积分的计算	64
【同步训练 3.5】	67
第六节 定积分的应用	67
一、定积分在几何上的应用	67
二、定积分在物理上的应用——变力所做的功	69
【同步训练 3.6】	69
第七节 应用模型	70
一、经济应用模型	70
二、大坝闸门受压模型	70
三、常见交流电路中的平均功率模型	71
【同步训练 3.7】	71
阅读小知识	72
本章小结	73
自测题 3	73
第四章 二元函数的微积分学	76
第一节 二元函数的基本概念	76
一、二元函数的定义	76
二、二元函数的极限与连续	77
【同步训练 4.1】	79
第二节 偏导数和全微分	79
一、偏导数的概念与运算	79
二、全微分的概念与应用	81



【同步训练 4.2】	83
第三节 二元函数的极值	83
一、二元函数极值的概念	83
二、二元函数极值的运算	84
【同步训练 4.3】	87
第四节 二重积分的概念与性质	87
一、二重积分的概念	87
二、二重积分的性质	89
【同步训练 4.4】	90
第五节 二重积分的计算	91
一、直角坐标系下二重积分的计算	91
二、极坐标系下二重积分的计算	94
【同步训练 4.5】	96
第六节 二重积分的应用	97
一、二重积分在几何上的应用	97
二、平面薄片的重心	99
三、平面薄板的转动惯量	100
【同步训练 4.6】	101
第七节 应用模型	101
一、广告投资决策问题	101
二、工程作业总量问题	102
【同步训练 4.7】	103
阅读小知识	103
本章小结	104
自测题 4	105
第五章 常微分方程	107
第一节 常微分方程的基本概念	107
一、微分方程的定义	107
二、微分方程的解	108
【同步训练 5.1】	109
第二节 一阶微分方程	109
一、可分离变量的微分方程	109
二、一阶线性微分方程	110
【同步训练 5.2】	112
第三节 二阶常系数线性微分方程	113
一、二阶常系数齐次线性微分方程	113
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	114



【同步训练 5.3】	116
第四节 应用模型	116
一、人口预测(马尔萨斯人口模型)	116
二、请你破案	117
【同步训练 5.4】	118
阅读小知识	119
本章小结	120
自测题 5	120
第六章 线性代数初步	122
第一节 矩阵	122
一、矩阵的概念与运算	122
二、逆矩阵及矩阵的初等变换	126
三、矩阵的秩	130
【同步训练 6.1】	131
第二节 线性方程组	132
一、线性方程组	132
二、齐次线性方程组的解的结构	134
三、非齐次线性方程组的解的结构	136
【同步训练 6.2】	138
第三节 应用模型	139
一、生物遗传模型	139
二、员工培训模型	140
三、网络流模型	141
【同步训练 6.3】	142
阅读小知识	143
本章小结	144
自测题 6	145
第七章 数学实验	147
第一节 前言	147
第二节 MATLAB 入门	147
一、MATLAB 变量命名规则	147
二、基本数学运算	148
第三节 利用 MATLAB 计算数学问题	149
一、利用 MATLAB 绘一元函数图像	149
二、利用 MATLAB 求极限	150



三、利用 MATLAB 计算导数	152
四、利用 MATLAB 计算积分	153
五、利用 MATLAB 计算二元函数的微分与积分	154
六、利用 MATLAB 求微分方程的解	155
七、利用 MATLAB 计算矩阵和求解线性方程组	157
习题参考答案	162
附录	176
附录 I 初等数学常用公式	176
附录 II 简易积分公式表	179
参考文献	188

[第一章]

函数、极限与连续



问题引入

一个边长为 a 的正三角形，将每边三等分，并以每条边三等分后的中段为边向外再做正三角形，但要去掉与原三角形叠合的边。接着对每个正三角形尖出的部分继续上述过程，即在每条边三等分后的中段，向外画新的尖形。不断重复这样的过程，其边缘的构造越来越精细，如图 1-1 所示，看上去就像一片雪花，所以称为 Koch 雪花。上述方法构造的曲线称为 Koch 曲线。

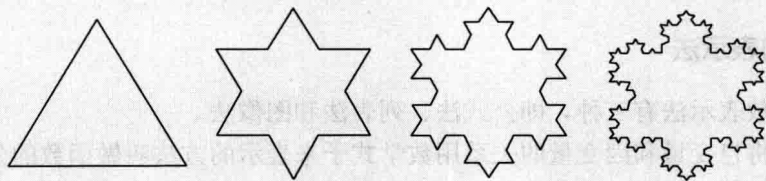


图 1-1

你想知道最终 Koch 雪花的面积和 Koch 曲线的周长是多少吗？这就需用到本章所讲授的有关极限的知识。

函数是近代数学研究的主要对象，极限是贯穿微积分始终的一个最基本、最重要的概念。微积分中的几个主要概念，如连续、导数、定积分等都是用极限表达的，而且其中的很多定理也是用极限方法推导出来的。因此，掌握极限的思想与方法，是学好微积分的前提。

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

引例 已知圆半径为 r ，则其面积为 $S = \pi r^2$ 。当半径 r 给定一个数值时，面积 S 总有唯一确定的数值与其对应。



定义 1.1 设 x, y 是两个变量, 若对非空数集 D 中的每一个值 x , 变量 y 按照一定的对应法则 f , 总有唯一确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为函数的定义域, $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

定义域与对应法则是构成函数的两个基本要素, 只有定义域与对应法则完全相同的两个函数才是相同的函数.

例 1.1 求 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 有意义, 必须满足

$$x^2-2x-3 \geq 0,$$

即

$$x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

例 1.2 求 $f(x)=\frac{\lg(2-x)}{x-1}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)=\frac{\lg(2-x)}{x-1}$ 有意义, 必须满足

$$2-x > 0 \text{ 且 } x-1 \neq 0,$$

即

$$x < 2 \text{ 且 } x \neq 1,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种, 即公式法、列表法和图像法.

公式法: 将自变量和因变量的关系用数学式子来表示的方法叫做函数的公式法. 这些数学式子也叫做解析表达式. 在高等数学中讨论的函数一般都用公式法表示.

列表法: 将自变量的值与对应的函数值列成表的方法叫作函数的列表法.

图像法: 在坐标系中用图形表示函数关系的方法叫作函数的图像法.

3. 函数的几种特性

(1) 有界性:

定义 1.2 设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域, 若存在一个正数 M , 对于所有的 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 是有界函数, 否则称函数 $y=f(x)$ 为无界函数.

(2) 单调性:

定义 1.3 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的 (或单调减少的). 单调增加的函数与单调减少的函数统称为单调函数. 区间 (a, b) 称为函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

(3) 奇偶性:

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

(4) 周期性:

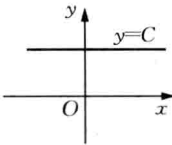
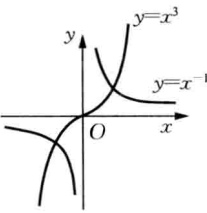
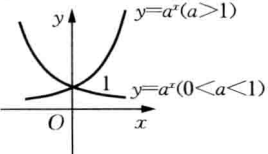
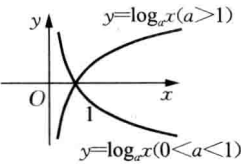
定义 1.5 设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在不为零的常数 T ，使得对于任意的 $x \in D$ ，都有 $x+T \in D$ ，且使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期。

二、初等函数

1. 基本初等函数

我们把常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六类函数统称为基本初等函数。熟记基本初等函数的图像是非常重要的，今后会经常用到它们。现将其表达式、定义域、值域、图像和性质列表 1-1:

表 1-1 基本初等函数表

函 数	定义域与值域	图 像	性 质
常量函数 $y=C$ (C 为常数)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y=C$		在 y 轴上的截距为 C ; 图像平行于 x 轴.
幂函数 $y=x^a$ (a 为常数)	随 a 而不同		过点 $(1, 1)$; 当 $a > 0$ 时, 函数在第一象限单调增加; 当 $a < 0$ 时, 函数在第一象限单调减少.
指数函数 $y=a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		过点 $(0, 1)$; 当 $a > 1$ 时, 单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, 单调减少.
对数函数 $y=\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		过点 $(1, 0)$; 当 $a > 1$ 时, 单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, 单调减少.



(续)

函数	定义域与值域	图 像	性 质
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$		奇函数, 周期 2π , 有界; 在每一个 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 内单调增加, 在每一个 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 内单调减少 ($k \in \mathbf{Z}$).
	余弦函数 $y = \cos x$		偶函数, 周期 2π , 有界; 在每一个 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 内单调增加, 在每一个 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 内单调减少 ($k \in \mathbf{Z}$).
	正切函数 $y = \tan x$		奇函数, 周期 π ; 在每一个 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k \in \mathbf{Z}$).
	余切函数 $y = \cot x$		奇函数, 周期 π ; 在每一个 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少 ($k \in \mathbf{Z}$).
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$		奇函数, 单调增加, 有界.
	反余弦函数 $y = \arccos x$		单调减少, 有界.
	反正切函数 $y = \arctan x$		奇函数, 单调增加, 有界.
	反余切函数 $y = \text{arccot } x$		单调减少, 有界.



2. 复合函数

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_φ , 如果 $D_f \cap M_\varphi \neq \emptyset$, 那么 y 通过变量 u 成为 x 的函数, 这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数, 记为 $y=f[\varphi(x)]$, 其中变量 u 称为中间变量.

应当指出, 并非任何两个函数都可构成复合函数. 例如, 函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数, 因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 与 $u=2+x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 的交集为空集, 所以不能复合.

例 1.3 分解下列复合函数:

$$(1) y=(2x+5)^7;$$

$$(2) y=\cos^3(1-2x);$$

$$(3) y=e^{\sin\sqrt{2x-1}};$$

$$(4) y=\ln(\sin\sqrt[3]{3x^2+1}).$$

解 (1) $y=u^7$, $u=2x+5$;

$$(2) y=u^3, u=\cos v, v=1-2x;$$

$$(3) y=e^u, u=\sin v, v=\sqrt{w}, w=2x-1;$$

$$(4) y=\ln u, u=\sin v, v=\sqrt[3]{w}, w=3x^2+1.$$

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成的, 且能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

例如, $y=\ln \sin x$, $y=e^{-x^2+1}$ 都是初等函数. 需要指出, 并不是所有的函数都是初等函数, 初等函数是能用一个解析式表示的函数, 分段函数一般就不是初等函数, 如

$$y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 1-x, & x < 0; \end{cases}$$

但有的分段函数也能用一个解析式来表示, 如绝对值函数

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

却是初等函数.

同步训练 1.1

1. 判断下列各组函数是否表示同一个函数? 并说明理由.

$$(1) f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x)=\frac{1-x^2}{1-x}, g(x)=1+x;$$

$$(3) f(x)=|\cos x|, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x};$$

$$(4) f(x)=\ln \sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{2} \ln x.$$