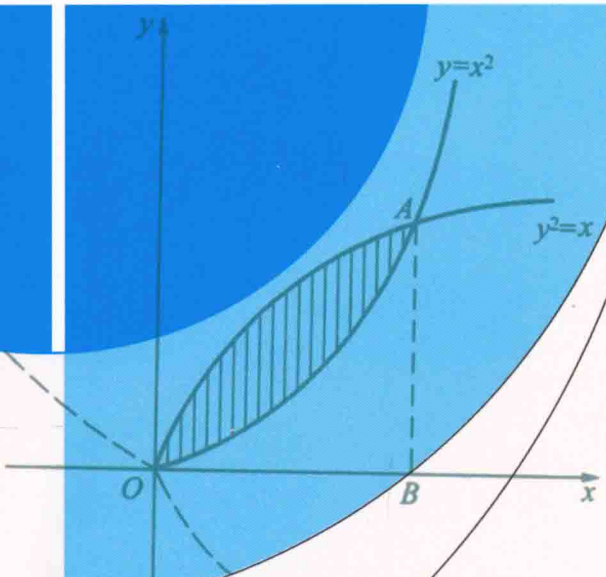
全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

刘晓峰　主编



中国农业出版社

全国高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学

刘晓峰 主编

中国农业出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 刘晓峰主编．—北京：中国农业出版社，2012.5

全国高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-16674-5

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 063084 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　李　燕

文字编辑　魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2012 年 5 月第 1 版　　2012 年 5 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：12.75

字数：293 千字

定价：25.00 元

编审人员名单

主　编　刘晓峰

副主编　孙用明　朱广恩

编　者　（以姓名笔画为序）

朱广恩　刘晓峰　孙用明

李甜甜　费彦宏

审　稿　王贺元

前　言

目前，随着我国高等教育的快速发展和高职人才培养模式的不断创新，对高职教材建设不断提出了新的要求。近年来，高职院校在创建全国示范性、骨干性高等职业技术学院活动中，在专业建设、课程设置、教学内容、教学方法和教学手段等方面进行了深入改革，使高职院校办学特色更加明显。本教材是结合目前高职院校学生的状况和高等数学课程教学特点，从教学实际出发，紧扣“必需、够用、实用”的教学原则，以专业课程对数学知识的需求为依据，汲取全国高职院校高等数学教学改革的成果编写而成的，具有以下特色：

1. 本书紧紧围绕高职院校各专业的培养目标，以能力为基础，以素质培养为主线，按照高职院校各专业职业岗位需求的基本数学知识选择和安排教学内容，教学时可针对各专业对数学基础不同需求及教学计划学时实际，选择教材的全部内容或部分章节。

2. 本书从高职院校学生的认知实际出发，起点低，注意与高中阶段数学知识的衔接；内容广而不深，数学概念的引入强调从实际背景出发，可读性强；理论以“必需”、“够用”为度；每节后附有同步训练，每章后附有阅读小知识、本章小结和自测题。

3. 注重与各专业的结合，从实例引入问题，以问题为引线进行数学的概念、应用及其实际意义、数学思想方法等方面的介绍。围绕着案例教学，注重让学生在“做中学”、“学中做”，在运用数学知识解决实际问题的过程中进行体验学习。

4. 引入数学软件 MATLAB，让学生接触现代计算技术。教学时把数学软件作为演示工具、计算工具和应用工具，构建高等数学学习平台，让学生自主进行“数学实验”及“问题解决”。注重培养学生用现代计算技术进行数学学习的意

识，为学生将来运用现代计算技术解决实际问题打好基础。

本书由刘晓峰担任主编，孙用明，朱广恩担任副主编。具体编写分工为：辽宁职业学院刘晓峰编写第一章、第四章、第五章，河南科技学院孙用明编写第六章，河南农业职业学院朱广恩编写第三章，辽宁职业学院李甜甜编写第七章，山西运城农业职业技术学院费彦宏编写第二章，习题参考答案、附录及全书统稿工作由刘晓峰完成。

辽宁工业大学王贺元教授对本书进行了审稿并提出了大量建设性意见和建议，各位编者所在学校的有关领导和同志们在本书组稿和编写过程中提供了许多帮助和支持，在此一并表示感谢。

书中如存在不足之处，恳切希望得到广大读者的批评指正。

编　者

2012年1月

目 录

第一章 函数、极限与连续

问题引入

一个边长为 a 的正三角形，将每边三等分，并以每条边三等分后的中段为边向外再做正三角形，但要去掉与原三角形叠合的边．接着对每个正三角形尖出的部分继续上述过程，即在每条边三等分后的中段，向外画新的尖形．不断重复这样的过程，其边缘的构造越来越精细，如图 1－1 所示，看上去就像一片雪花，所以称为 Koch 雪花．上述方法构造的曲线称为 Koch 曲线．

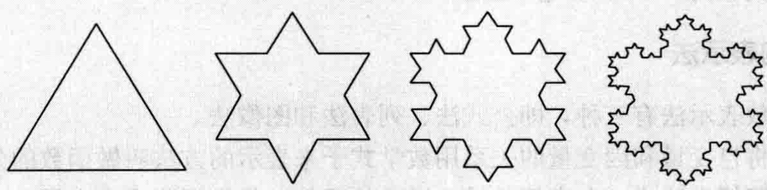


图 1－1

你想知道最终 Koch 雪花的面积和 Koch 曲线的周长是多少吗？这就需用到本章所讲授的有关极限的知识．

函数是近代数学研究的主要对象，极限是贯穿微积分始终的一个最基本、最重要的概念．微积分中的几个主要概念，如连续、导数、定积分等都是用极限表达的，而且其中的很多定理也是用极限方法推导出来的．因此，掌握极限的思想与方法是学好微积分的前提．

第一节 函　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

引例　已知圆半径为 r，则其面积为 $S=\pi r^2$．当半径 r 给定一个数值时，面积 S 总有唯一确定的数值与其对应．

定义 1.1 设 x，y 是两个变量，若对非空数集 D 中的每一个值 x，变量 y 按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域，$M=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域．

定义域与对应法则是构成函数的两个基本要素，只有定义域与对应法则完全相同的两个函数才是相同的函数．

例 1.1 求 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的定义域．

解 要使 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 有意义，必须满足

$$x^2-2x-3\geqslant 0,$$

即

$$x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -1,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty,\ -1]\cup[3,\ +\infty)$.

例 1.2 求 $f(x)=\dfrac{\lg(2-x)}{x-1}$ 的定义域．

解 要使 $f(x)=\dfrac{\lg(2-x)}{x-1}$ 有意义，必须满足

$$2-x>0 \text{ 且 } x-1\neq 0,$$

即

$$x<2 \text{ 且 } x\neq 1,$$

所以函数的定义域为 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种，即公式法、列表法和图像法．

公式法：将自变量和因变量的关系用数学式子来表示的方法叫做函数的公式法．这些数学式子也叫做解析表达式．在高等数学中讨论的函数一般都用公式法表示．

列表法：将自变量的值与对应的函数值列成表的方法叫作函数的列表法．

图像法：在坐标系中用图形表示函数关系的方法叫作函数的图像法．

3. 函数的几种特性

(1) 有界性:

定义 1.2 设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 是有界函数，否则称函数 $y=f(x)$ 为无界函数．

(2) 单调性:

定义 1.3 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是单调增加的（或单调减少的）. 单调增加的函数与单调减少的函数统称为单调函数．区间 $(a,\ b)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

(3) 奇偶性:

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数．

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称．

（4）周期性：

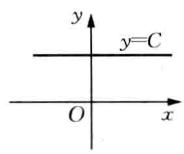
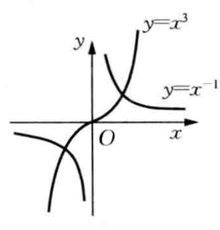
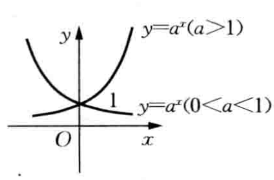
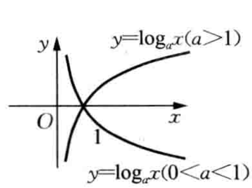
定义 1.5 设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在不为零的常数 T，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期．

二、初等函数

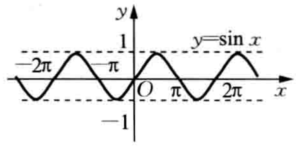
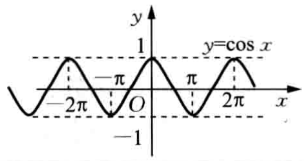
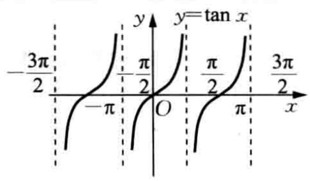
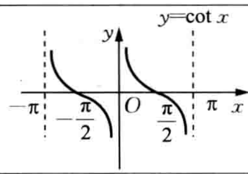
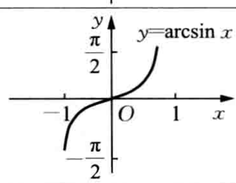
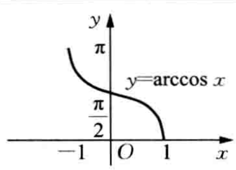
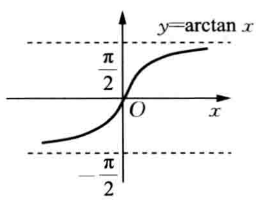
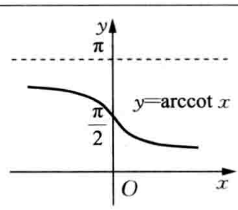
1. 基本初等函数

我们把常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六类函数统称为基本初等函数．熟记基本初等函数的图像是非常重要的，今后会经常用到它们．现将其表达式、定义域、值域、图像和性质列表 1－1：

表 1－1 基本初等函数表

函数	定义域与值域	图像	性质
常量函数 $y=C$ （C 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=C$		在 y 轴上的截距为 C； 图像平行于 x 轴．
幂函数 $y=x^{\alpha}$ （α 为常数）	随 α 而不同		过点（1，1）； 当 $\alpha>0$ 时，函数在第一象限单调增加； 当 $\alpha<0$ 时，函数在第一象限单调减少．
指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点（0，1）； 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少．
对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点（1，0）； 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少．

（续）

	函数	定义域与值域	图像	性质
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[-1, 1]$		奇函数，周期 2π，有界； 在每一个 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在每一个 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).
	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[-1, 1]$		偶函数，周期 2π，有界； 在每一个 $[2k\pi-\pi, 2k\pi]$ 内单调增加，在每一个 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π； 在每一个 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加($k\in\mathbf{Z}$).
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π； 在每一个 $(k\pi, k\pi+\pi)$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界.
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in[0, \pi]$		单调减少，有界.
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界.
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(0, \pi)$		单调减少，有界.

2. 复合函数

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_φ，如果 $D_f\cap M_\varphi\neq\varnothing$，那么 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中变量 u 称为**中间变量**.

应当指出，并非任何两个函数都可构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 与 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 的交集为空集，所以不能复合.

例 1.3 分解下列复合函数：

(1) $y=(2x+5)^7$；　　(2) $y=\cos^3(1-2x)$；

(3) $y=e^{\sin\sqrt{2x-1}}$；　　(4) $y=\ln(\sin\sqrt[3]{3x^2+1})$.

解 (1) $y=u^7$，$u=2x+5$；

(2) $y=u^3$，$u=\cos v$，$v=1-2x$；

(3) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=2x-1$；

(4) $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=3x^2+1$.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成的，且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln\sin x$，$y=e^{-x^2+1}$ 都是初等函数. 需要指出，并不是所有的函数都是初等函数，初等函数是能用一个解析式表示的函数，分段函数一般就不是初等函数，如

$$y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ 1-x, & x<0;\end{cases}$$

但有的分段函数也能用一个解析式来表示，如绝对值函数

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

却是初等函数.

同步训练 1.1

1. 判断下列各组函数是否表示同一个函数? 并说明理由.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$，$g(x)=1+x$；

(3) $f(x)=|\cos x|$，$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(4) $f(x)=\ln\sqrt{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln x$.