TONGJI FANGFA YINLUN

统计方法引论

于善奇◎著

北京工业大学出版社

统计方法引论

于善奇　著

北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书从数理统计方法的各项概念开始，通过基本例子，逐步介绍统计方法的基本概念和基本理论。主要内容包括：概率与统计基础，统计假设检验，统计质量控制，抽样检验原理与方法，标准型抽样方案的设计，相关与回归分析，试验设计技术，可靠性基础及统计分析，计量基础与测量不确定度等。

本书可作为工科硕士或博士研究生的教材，也可作为中、高级质量工程师的备忘录，并为标准化研究人员提供了参照和依据。

图书在版编目（CIP）数据

统计方法引论／于善奇著．—北京：北京工业大学出版社，2014．5

ISBN 978－7－5639－3843－8

Ⅰ．①统…　Ⅱ．①于…　Ⅲ．①统计方法　Ⅳ．①C81

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 057372 号

统计方法引论

著　　者：于善奇
责任编辑：李周辉
封面设计：何　强
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　邮编：100124）
010－67391722（传真）bgdcbs@ sina. com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国各地新华书店
承印单位：徐水宏远印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：27. 5
字　　数：581 千字
版　　次：2014 年 5 月第 1 版
印　　次：2014 年 5 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978－7－5639－3843－8
定　　价：48. 00 元

前　言

数理统计方法在实践中的应用十分广泛，尤其在工业生产、科学实验和工程技术等领域，其成果显著、效益可观。20 世纪以来，科学技术迅猛发展，为数理统计及其应用带来了勃勃生机，使数理统计的理论日臻完善，统计方法也在不断创新。理论可以引领方法，反过来，方法也可以完善理论。

对于假设检验与抽样检验、统计质量控制和工序能力指数等基础性研究，本书不仅有新见解，而且有新方法。在内容的广度方面，除常规的统计方法，如参数估计、假设检验、方差分析、相关与回归，还增添了正交试验设计与分析、测量不确定度评定及其应用、可靠性试验中的经典统计方法、标准型抽样方案的设计原理等内容。

在经典的假设检验理论中，无论是理论还是方法，单侧限和简单双侧限假设检验的研究都已十分成熟甚至完美无缺。但在广义双侧限（也称一般双侧限）的假设检验理论中，其水平为 α 的一致最大功效无偏检验（简称 UMPU 检验）的两个界限值，需要逐步试探、不断调整才能得出隐函数方程组的求解结果。从理论的角度看，这已经无懈可击；但从应用的角度看，并不能满足实际工作者的需求。众所周知，过河需要搭桥。作者通过引进变量 α_1，研究了广义双侧假设检验的具体方法，并设计了双侧限假设检验表，使实际工作者通过查表即可解决“过河”的难题。例如，在标准差已知的情况下，采用双侧限假设检验理论，可以使用监督抽样检验国家标准 GB/T 14900—1994 中的表 2；在标准差未知的情形下，对一般双侧限的假设检验，也有便于操作的统计方法。

在抽样检验的理论中，单侧限抽样检验的理论和方法都已至善至美，但双侧限抽样检验的精确理论还是空白。在传统的双侧限抽样检验的方法中，都是在标准化量 $(\mu_{OU}-\mu_{OL})/(\sigma/\sqrt{n})>1.7$ 的约束下，用单侧限的理论去求近似值，并没有严格意义下的双侧限抽样检验公式。作者在 20 世纪 80 年代的一系列研究中，去掉了该约束条件，相继得出了多套双侧限抽样检验的精确公式，包括以均值和不合格品率为质量指标的两种类型，每种类型又分为标准差已知和未知两种情形，用其中的第二套公式主持修订了抽样检验国家标准 GB/T 8053—2001。可以说，这是我国用自行研究的数学公式制定国家标准的案例之一。

在统计质量控制的方法中，作者采用统计量的标准化方法，研制了一套标准化控制图打点表；在计量值控制图中，提出了标准化控制图的理念；在工序能力指数的概念中，研制了工序能力指数的标准化定义体系，并将“6σ”管理中的定量质量评价方法纳入工序能力指数的标准化定义体系，规范了统计质量管理中的多重评价要素。

阅读或应用本书的人，只要具备工科或管理类本科生的数学基础即可。本书可当作工科硕士或博士研究生的教材，也可作为管理科学与工程专业的研究生教材，尤其

是为中、高级质量工程师提供了一本不可或缺的案边备忘录，也为统计方法标准化研究人员提供了参照或依据。此外，本书的价值不局限于对学术成果的直接应用，更重要的是针对实际问题给出了研究方法。比如一类隐函数方程组的逆向思维解法，可为相关学科特别是工程技术类数值方程的解法提供借鉴或拓展思路。初次阅读的读者，建议略去定理或公式之证明，仅关注结论，把握方法，重在应用。有兴趣的读者，可以究根溯源，或许有预料之外的启迪与收获。

综观全书，这是一本集基础性研究与应用研究为一体、难易适中的应用统计学著作。期望大家随时指正，不时添砖加瓦，完善统计方法。在这里，对关注和支持本书出版事宜的各界朋友，表示衷心的谢意。

囿于作者学识，书中不当或谬误之处恐在所难免，恳请学界与工程界的同行不吝指教。

目 录

第一章　概率与统计基础

第一节　概率基础知识

一、随机现象与随机事件

（一）随机现象

在一定条件下进行试验，可能出现不同结果的现象称为随机现象。它有两个基本特点：

（1）随机现象的结果至少有两个；

（2）究竟哪一个结果出现，事先不能确知。

随机现象是概率论与数理统计的研究对象。

随机现象是自然科学和社会科学中普遍存在的现象。例如，抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面。究竟哪一面出现，人们事先并不知道。又如掷一个骰子，可能出现 1 点至 6 点中的某一种，至于哪一种出现，人们事先并不确知。

随机现象中的每一个结果称为一个样本点，所有可能的样本点集合称为该随机现象的样本空间，记为 Ω。

【例 1.1.1】 写出下面各随机现象的样本空间。

抛一枚硬币：$\Omega=\{$正面，反面$\}$；

掷一个骰子：$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$(点)$\}$；

一支显像管的寿命：$\Omega=\{t: t\geqslant 0\}$；

一台仪表的误差：$\Omega=\{t: -a<t<a\}$。

（二）随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称为事件，通常用英文大写字母 A、B、C 等表示事件。

由于 Ω 是所有样本点组成的集合，所以可用 Ω 表示一个必然事件。类似地，把不含有样本点的空集 ϕ 也可以看作 Ω 的子集，空集 ϕ 表示不可能事件。必然事件和不可能事件在本质上不具有随机性，但为方便起见，仍把它们看作随机事件，也称为广义随机事件。

1. 随机事件的特征

(1)任一事件 A 是相应样本空间 Ω 的一个子集。为直观起见，常用一个长方形表示样本空间 Ω，用其中的一个圆形表示事件 A，见图 1.1.1。

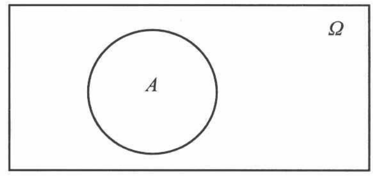


图 1.1.1　A 是 Ω 的子集

(2)任一样本空间 Ω 都有一个最大子集。这个最大子集就是 Ω 本身，它对应的事件是一个必然事件，仍用 Ω 表示。顾名思义，必然事件就是在一次试验中必定发生的事件。例如，掷一个骰子，“出现的点数不超过 8”就是一个必然事件。

(3)任一样本空间 Ω 都有一个最小子集。这个最小子集就是空集，它对应的事件是一个不可能事件，记作 ϕ。例如，掷一个骰子，“出现 8 点”就是一个不可能事件。

(4)事件 A 发生是指当且仅当 A 中的某一样本点发生。

【例 1.1.2】 在工业产品的检验中，常把合格品记为“0”，把不合格品记为“1”。则

(1)检验一件产品的样本空间(含有 2 个样本点)为

$$\Omega=\{0,\ 1\};$$

(2)检验两件产品的样本空间(含有 2^2 个样本点)为

$$\Omega=\{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\}。$$

其中，样本点(1，0)表示第一件为不合格品，第二件为合格品；其余类推。下面给出该样本空间中常见事件的描述，如：

A =“至少有一件不合格品” $=\{(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$；

B =“恰有一件不合格品” $=\{(0,\ 1),\ (1,\ 0)\}$；

C =“至多有两件不合格品” $=\{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\}=\Omega$。

(3)检验三件产品的样本空间(含有 2^3 个样本点)为

$$\Omega=\{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}。$$

其中，样本点(0，1，0)表示第一件为合格品，第二件为不合格品，第三件为合格品。下面给出该样本空间中常见事件的描述，如：

A =“至少有一件合格品” $=\{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0)\}$；

B =“恰有一件合格品” $=\{(0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0)\}$；

C =“至多有一件不合格品” $=\{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0)\}$。

2. 随机事件间的关系

(1)包含。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B，若事件 A 中的样本点都在事件 B 中，则称事件 B 包含事件 A，记作 $B\supset A$，见图 1.1.2。换句话说，$B\supset A$ 是指：事件 A 发生必导致事件 B 发生。例如，掷一个骰子，记事件 A =“出现 3 点”，事件 B =“出现奇数点”，则 $B\supset A$。显然，对任一事件 A，恒有 $\Omega\supset A\supset\phi$。

(2)相等。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B。若事件 A 与 B 含有的样本点相同，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$。也可以说，若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则 $A=B$。

(3)互斥(互不相容)。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B，若 A 与 B 无相同的样本点，则称事件 A 与 B 互斥，也称 A 与 B 互不相容。换句话说，不可能同时发生的两个事件称为互斥，其几何意义见图 1.1.3。

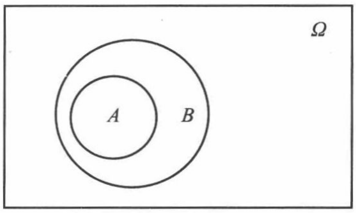


图 1.1.2　$B \supset A$

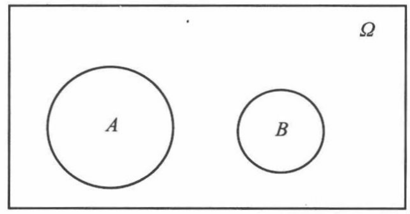
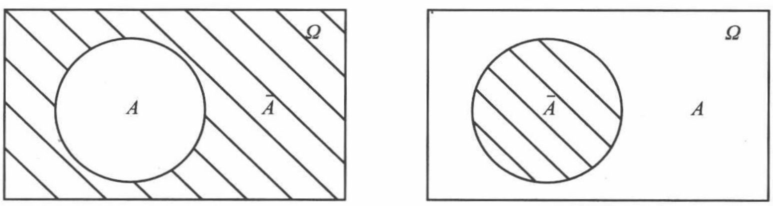


图 1.1.3　A 与 B 互斥

(4)对立。在一个随机现象中，Ω 为样本空间，A 为事件，则由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的事件称为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$，读作“A 补”，见图 1.1.4 中的阴影部分。事件 $\overline{A}$ 可理解为“事件 A 不发生”。按定义可知，$\overline{A}$ 的对立事件是 A，所以 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件；A 与 $\overline{A}$ 也是互斥事件。

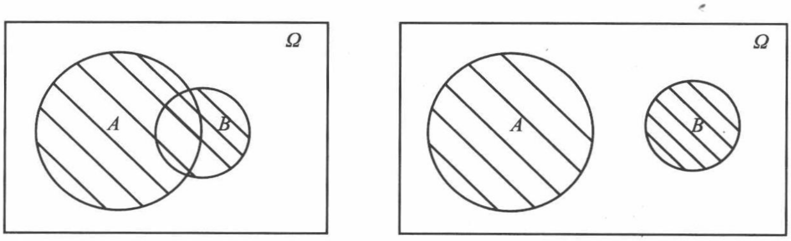


(a) 第一种情况　　(b) 第二种情况

图 1.1.4　A 与 $\overline{A}$

3. 随机事件的运算

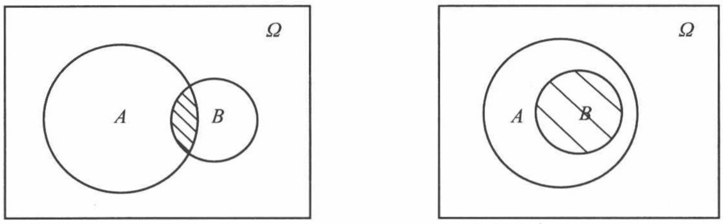
(1)事件的并。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B，则由事件 A 与 B 中所有的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$，其几何意义见图 1.1.5 中的阴影部分。按定义，$A \cup B$ 发生意味着“A 与 B 至少有一个发生”，也可以表述为“A 发生或 B 发生”。事件的并，也称作事件的和，记作 $(A+B)$。



(a) 第一种情况　　(b) 第二种情况

图 1.1.5　$A \cup B$

(2)事件的交。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B，则由事件 A 与 B 中共有的样本点组成的集合称为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，其几何意义见图 1.1.6 中的阴影部分。按定义，$A\cap B$ 发生意味着“A 与 B 同时发生”，也可表述为“A 发生且 B 发生”。事件的交，也称作事件的积，简记为 AB。

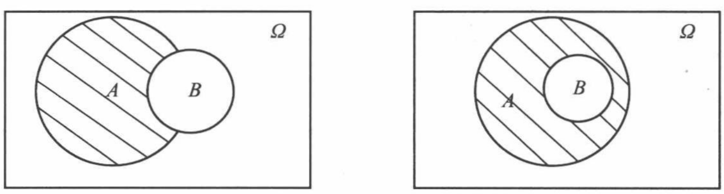


(a) 第一种情况　　(b) 第二种情况

图 1.1.6　$A\cap B$

两个事件的并与交可以推广到多个事件上去。

(3)事件的差。在一个随机现象中有两个事件 A 与 B，则由在 A 中而不在 B 中的样本点组成的集合称为 A 对 B 的差，记作 $A-B$，其几何意义见图 1.1.7 中的阴影部分。$A-B$ 可以表述为“A 发生且 B 不发生”，也可以表为 $A-B=A\overline{B}$。



(a) 第一种情况　　(b) 第二种情况

图 1.1.7　$A-B$

(4)事件的运算律。事件除满足通常的交换律、结合律和分配律外，还满足德·摩根律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B};\ \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}。$$

二、概率的定义与基本性质

如前所述，随机事件的发生是带有偶然性的。尽管如此，随机事件发生的可能性仍有大小之分，而且是可以度量的。

(一)概率的公理化定义

概率的公理化定义是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров，A. H)在 1933 年提出的。在一个随机现象中，表示任一随机事件 A 发生可能性大小的实数称为该事件的概率，记作 $P(A)$，并具有如下性质：

(1)非负性。即 $P(A)\geqslant 0$。

(2)正则性。即 $P(\Omega)=1$。

(3)可列可加性。若 A_1，A_2，…为两两互斥事件，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

【例 1.1.3】 某随机现象共有四种不同的结果，这四种结果分别记作 a，b，c，d。它们发生的概率如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1　某随机现象的四种结果的概率

结果	a	b	c	d
概率	0.1	0.3	0.4	0.2

若定义事件 $A = \{a, b, d\}$，$B = \{b, c, d\}$，则

(1)$P(A) = P(a) + P(b) + P(d) = 0.6$。

(2)$P(B) = P(b) + P(c) + P(d) = 0.9$。

(3)$A \cup B = \{a, b, c, d\} = \Omega$，$P(A \cup B) = 1$。

(4)$A \cap B = \{b, d\}$，$P(A \cap B) = P(b) + P(d) = 0.5$。

(5)$A - B = \{a\}$，$P(A - B) = P(a) = 0.1$。

(6)$B - A = \{c\}$，$P(B - A) = P(c) = 0.4$。

(二)概率的古典定义和统计定义

1. 古典定义

概率的古典定义：其条件为，

(1)随机现象的样本空间只有有限个样本点，

(2)每个样本点出现的可能性是相同的，

则样本空间 Ω 中任一事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}} = \frac{k}{n}。\tag{1.1.1}$$

【例 1.1.4】 掷两个骰子，记 x、y 分别表示第一个与第二个骰子出现的点数。则该随机现象的样本空间含有 $6^2 = 36$ 个样本点，并且每个样本点出现的可能性相同。样本空间可表示为

$$\Omega = \{(x, y), x、y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}。$$

(1)设事件 A =“点数之和为 5” $= \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$，则 $P(A) = 4/36 = 1/9$。

(2)设事件 B =“点数之和超过 10” $= \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$，则 $P(B) = 3/36 = 1/12$。

(3)设事件 C =“点数之和大于 8，小于 12” $= \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$，则 $P(C) = 9/36 = 1/4$。

(4)设事件 D =“点数之和大于 5，不超过 7” $= \{(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\}$，

则 $P(D)=11/36$。

【例 1.1.5】 一批产品共 100 件，其中有 4 件不合格品。从中随机抽取 3 件，求其中恰有 0 件不合格品的概率。

解 记 A_0 = "抽取 3 件中恰有 0 件不合格品"，则

$$P(A_0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{4!}{0!\ 4!}\cdot\frac{96!}{3!\ 93!}\cdot\frac{3!\ 97!}{100!}=0.8836。$$

2. 统计定义

概率的统计定义：其条件为，

(1) 与事件 A 有关的随机试验可以重复进行，

(2) 在 n 次重复试验中，事件 A 发生 k_n 次，其频率为

$$P_n(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数}}{\text{重复试验的次数}}=\frac{k_n}{n}, \tag{1.1.2}$$

则当重复试验次数不断增加时，事件 A 的频率将在某个固定常数的附近徘徊，这个固定的常数称为频率的稳定值，也就是事件 A 的概率 $P(A)$。

在概率论的发展史中，部分学者对掷硬币进行了试验，试验的结果见表 1.1.2。其中，皮尔森(K. Pearson)是英国著名的统计学家，先后进行了两次掷硬币试验。

表 1.1.2 掷硬币试验结果

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 k_n	正面出现频率 k_n/n
德·摩根	2048	1061	0.5181
布丰	4040	2048	0.5069
皮尔森	12000	6019	0.5016
皮尔森	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

由表 1.1.2 可以看出，当试验次数增加时，正面出现的频率徘徊在 0.5，这个常数 0.5 就是频率的稳定值，也就是"出现正面"的概率为 0.5。注意，不应把概率理解为频率的极限值。

(三) 概率的基本性质

根据概率的公理化定义，不难证明概率的基本性质，有：

性质 1：不可能事件的概率为 0，即

$$P(\phi)=0。$$

性质 2：概率具有可加性。即若 A_1，A_2，…，A_n 为两两互斥事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)。$$

性质 3：对任一事件 A，有

$$P(A)=1-P(\bar{A})。$$

性质4：若$A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)。$$

性质5：对任意两个事件A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)。$$

应当指出，性质5通常称为加法公式，它可以推广到任意有限个事件。比如，对任意三个事件A_1、A_2、A_3，有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)。$$

类似地，对任意n个事件A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\prod_{i=1}^{n}A_i)。$$

【例1.1.6】　一批产品共50件，其中有4件不合格品，从中随机抽取3件，求其中有不合格品的概率。

解　记A=“任取3件，其中有不合格品”。

因为　$P(\bar{A})=\dfrac{\binom{46}{3}}{\binom{50}{3}}=\dfrac{15180}{19600}=0.7745$；

所以　$P(A)=1-P(\bar{A})=0.2255$。

【例1.1.7】　一批产品共200件，其中有6件不合格品，从中抽取3件，求其中不合格品数不超过1件的概率。

解　记A_i=“3件中恰有i件不合格品”，$i=0$，1。

因为　$P(A_0)=\dfrac{\binom{194}{3}}{\binom{200}{3}}=\dfrac{1198144}{1313400}=0.9122$，

$$P(A_1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{194}{2}}{\binom{200}{3}}=\frac{112326}{1313400}=0.0855;$$

所以　$P(A_0+A_1)=P(A_0)+P(A_1)=0.9977$。

三、条件概率与贝叶斯(Bayes)公式

(一)条件概率与乘法公式

设两个事件A与B，$P(B)>0$，在事件B已经发生的条件下，事件A发生的概率称

为条件概率，记作 $P(A \mid B)$。其计算公式为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)};\ P(B)>0。\tag{1.1.3}$$

将式(1.1.3)改写后，就得到计算概率的乘法公式：

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A \mid B);\ P(B)>0。\tag{1.1.4}$$

应当注意，式(1.1.3)和式(1.1.4)是把“事件 B 已发生”作为条件，如果把“事件 A 已发生”作为条件，则不难写出相应的公式。

对于三个事件 A_1、A_2、A_3，其乘法公式为

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2);\tag{1.1.5}$$

式中，$P(A_1)>0$，$P(A_1A_2)>0$。

类似地，n 个事件的乘法公式为

$$P(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})。$$

【例 1.1.8】 掷一个骰子，记 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$，求条件概率 $P(A \mid B)$。

解 因为 $AB=\{2\}$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{3}{6}$；

所以 $P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}$。

【例 1.1.9】 盒中装有 8 个合格品、2 个不合格品，从中依次取出 2 个，求第一次取得合格品且第二次取得不合格品的概率。

解 记 A_1 =“第一次取得合格品”，A_2 =“第二次取得不合格品”，则 $P(A_1)=\frac{8}{10}$，$P(A_2 \mid A_1)=\frac{2}{9}$。

由此可得所求事件的概率为

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot(A_2 \mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{45}。$$

【例 1.1.10】 一批产品的不合格品率为 4%，而合格品中有 75% 是优等品，求任取 1 个产品是优等品的概率。

解 记 A =“任取 1 件是合格品”，B =“任取 1 件是优等品”，则 $P(A)=96\%$，$P(B \mid A)=75\%$。

由此可得所求的概率为

$$P(B)=P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A)=0.96\times 0.75=0.72。$$

(二)独立性和独立事件的概率

设有两个事件 A 与 B，如果事件 B 的发生不依赖事件 A 的发生与否，事件 A 的发生也不依赖事件 B 的发生与否，则称事件 A 与事件 B 相互独立。

显然，若 A 与 B 相互独立，则有：

(1)$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$。

(2)$P(B \mid A)=P(B)$，$P(A \mid B)=P(A)$。

(3)$\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中的每一对事件相互独立。

对于三个事件 A_1、A_2、A_3，其相互独立性是指：

$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$；$P(A_1A_3)=P(A_1)\cdot P(A_3)$；$P(A_2A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3)$；

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$。

对于 n 个事件的相互独立性，是指其中任何一个事件的发生都不受其余的一个或任何几个事件发生与否的影响。

应当注意，n 个事件相互独立，可以推出 n 个事件两两独立；反之，不然。

【例 1.1.11】 某车间有甲、乙、丙三部自动机床各自独立工作，它们由一个工人技师照管。已知在一天内它们不需要照管的概率分别为 0.8、0.9 和 0.5。求在一天内至少有一台机床需要工人技师照管的概率。

解 用 A，B，C 分别表示一天内自动机床甲、乙、丙不需照管的事件，则 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.9$，$P(C)=0.5$。

易见，至少有一台机床需要照管这一事件可表为 $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$，于是所求概率为

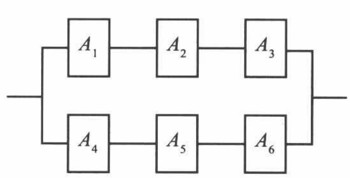
$$\begin{aligned}P(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})&=1-P(ABC)\\&=1-P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\\&=1-0.36\\&=0.64。\end{aligned}$$

【例 1.1.12】 一个自动报警系统由雷达和微机两部分组成。若其中的任一部分失灵，这个报警系统就失灵。已知报警系统使用 400 小时后，雷达不失灵的概率为 0.9，微机不失灵的概率为 0.8。假定两部分失灵与否相互独立，求报警系统使用 400 小时后失灵的概率。

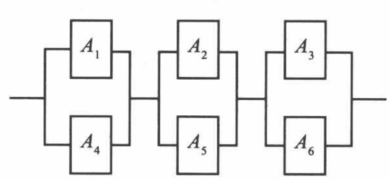
解 记 A =“雷达失灵”，B =“微机失灵”，则 $P(A)=0.1$，$P(B)=0.2$。报警系统使用 400 小时后失灵的概率为

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.1+0.2-0.1\times0.2\\&=0.28。\end{aligned}$$

【例 1.1.13】 两个系统的框图如图 1.1.8 所示。设构成系统的每个元件的可靠度皆为 $r(0<r<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的。试求每个系统的可靠度，并比较两个系统可靠度的大小。



(a) 系统 I



(b) 系统 II

图 1.1.8　两个系统框图

解 记 A_i =“第 i 个元件正常工作”，$i=1, 2, \cdots, 6$。

先看系统Ⅰ。记 $A=A_1A_2A_3$，$B=A_4A_5A_6$，则有：

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=r^3,$$

$$P(B)=P(A_4A_5A_6)=P(A_4)\cdot P(A_5)\cdot P(A_6)=r^3。$$

所以，系统Ⅰ的可靠度为

$$R_1=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=r^3(2-r^3)。$$

再看系统Ⅱ。记 $C_i=A_i+A_{i+3}(i=1,2,3)$，则 C_i 的概率为

$$P(C_i)=P(A_i+A_{i+3})=P(A_i)+P(A_{i+3})-P(A_i)\cdot P(A_{i+3})=r(2-r)。$$

由于系统Ⅱ是由各对并联元件串联而成，所以系统Ⅱ的可靠度为

$$R_2=P(C_1C_2C_3)=P(C_1)\cdot P(C_2)\cdot P(C_3)=r^3(2-r)^3。$$

不难证明，$R_2>R_1$。即先“并”后“串”的可靠度高于先“串”后“并”的可靠度。

(三)全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，并且事件 $B\subset\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)。\tag{1.1.6}$$

2. 贝叶斯公式(也称为逆概公式)

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，并且事件 $B\subset\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}。\tag{1.1.7}$$

式中的 $P(B)$ 见式(1.1.6)。

【例1.1.14】 某车间甲、乙、丙三个班组生产同一规格的产品，其产量依次占总量的45%、35%、30%。假定各班组的次品率依次为4%、2%、3%。现从待出厂产品中任取1件，求该件产品是次品的概率。

解 记 B=“任取1件，是次品”，A_1、A_2、A_3 分别表示“产品由甲、乙、丙三个班组生产”。依题意，有：

$$P(A_1)=45\%,\ P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=30\%;$$

$$P(B|A_1)=4\%,\ P(B|A_2)=2\%,\ P(B|A_3)=3\%。$$

由全概率公式得：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)\\&=45\%\times4\%+35\%\times2\%+30\%\times3\%\\&=3.4\%。\end{aligned}$$

【例1.1.15】 某发报台分别以概率0.6和0.4发出信号“·”和“—”，由于通信系统受到干扰，当发报台发出信号“·”时，收报台分别以0.6、0.2、0.2的概率收到信