高等学校教材

高等数学

（初稿）

下册

朱公谨　编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（初稿）

下册

朱公谨　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书由高等教育部委托交通大学数学教研组朱公谨教授编写。可作为高等工业学校320到380学时类型的高等数学课程的教学用书。因编写时间短促，没能广泛征求意见，先作为初稿出版；希有关方面提出意见，供再版时修正的参考。

本书于1958年出版，恰逢高等教育出版社建社60周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：初稿.下册/朱公谨编.--北京：高等教育出版社，2014.7

ISBN 978-7-04-039862-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第094830号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 蒋 青 封面设计 杨立新 版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅 责任校对 刘 莉 责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市四季青双青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.5	版　　次	2014年7月第1版
字　　数	340千字	印　　次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	28.10元

物 料 号 39862-00

下册目录

第一篇　空间解析几何学

第二篇　多元函数的微分学

第三篇 无 穷 级 数

第四篇 多元函数的积分学

第五篇 微 分 方 程

第六篇 复变函数的微积分学

第一篇

空间解析几何

第一章

基本概念及矢量代数初步

§1. 空间有向线段的射影

对于空间的有向线段,以 A 为起点,B 为终点,常记作 AB,我们也可从它与另一条有向直线的关系来加以考察,像在平面中一样(参照上册第 26 页 §9)。设以 S'记这有向直线,从 S'来看 AB,则有所谓 AB 在 S'上的射影。试通过 AB 的两端 A 及 B,作垂直于 S'的平面,其与 S'的交点分别记作 A'及 B'(图 1),则 $A'B'$称为 AB 在 S'上的射影。当 $A'B'$的方向与 S'的正向相同时,$A'B'$是一正数,相反时是一负数。因此,从 AB 在 S'上的射影 $A'B'$,我们可以了解 AB。

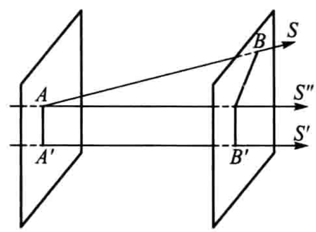

图 1.

若有两个线段 AB 及 CD,彼此平行而同向,则两者在 S'上的射影 $A'B'$及 $C'D'$之间必有如下关系:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}。$$

这就是说，一个线段的射影与该线段本身之比，对于一切平行而同向的线段来说，总是一个常数。这常数必为 $\cos(AB,S')$，因通过 A 可作一与 S'平行而同向的有向直线 S''如图 1，从而可见 $\cos(AB,S'')=\cos(AB,S')$。于是有

定理一 若 S 及 S'为空间任何两有向直线，则不论 S 及 S'是否在同一平面上①，S 上任何线段 AB 在 S'上的射影必为

$$A'B'=AB\cos(S,S')。\tag{1.1}$$

其次，若有一折线段，由 AB,BC,CD,DL 首尾相接而成，则其在另一有向直线 S'上的射影，为各线段分别在 S'上的射影连接起来的结果：

$$A'B'+B'C'+C'D'+D'L'=A'L'。\tag{1.2}$$

但 $A'L'$就是连接 A 及 L 两点的线段 AL 的射影。这一线段 AL，像在平面中的一样，也叫做该折线段的封闭线段。因此又得

定理二 任何折线段在 S'上的射影恰等于其封闭线段在 S'上的射影。

据此，可知空间的折线段若是闭合的，就是起点与终点相合的，则其射影必然是零了。

§2. 空间直角坐标系

要讲空间解析几何学，首先应使空间的点与数取得联系，因此，应当说明一下空间的笛卡儿直角坐标系。试作三条有向直线

① 两条有向直线 S 及 S'若不在同一平面上，所谓它们的夹角$\angle(S,S')$，就是指两条通过空间任何一点而分别与 S 及 S'平行且同向的有向直线 S_1 及 S'_1所夹成的角$\angle(S_1,S'_1)$。我们把这角的余弦简写为 $\cos(S,S')$。

交于一点而互相垂直,称为坐标轴,其交点称为坐标原点,简称原点,记作 O。通过原点而互相垂直的坐标轴分别叫做 OX、OY、OZ 轴,或横轴、纵轴、竖轴,或第一、第二、第三坐标轴。又通过原点而垂直于坐标轴的平面称为坐标面。垂直于第一、第二、第三坐标轴的坐标面分别称为第一、第二、第三坐标面(图 2)。依照平面解析几何学的习惯,把第一、第二坐标轴的正向规定好之后(任意决定了 OX 轴的正向,在第三坐标面上依反时针方向旋转一直角,即为 OY 轴的正向),有两种不同方法,可以来取定第三坐标轴的正向。我们可依右手螺旋(如图 3)或左手螺旋(如图 4)的旋向,由第一坐标轴的正向转到第二坐标轴的正向,那么盘旋的方向就是第三坐标轴的正向,前者称为右手坐标系,如图 2,后者称为左手坐标系,如图 5。以后应用直角坐标系,如无特别声明,都指右手坐标系。规定好坐标轴的正向(同时包括它的负向),则垂直于坐标轴的坐标面就随着而有正侧与负侧可分,不必琐述。

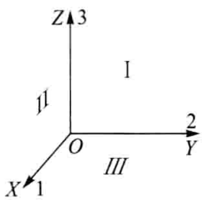

图 2.

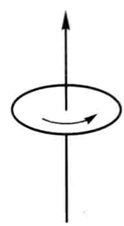

图 3.

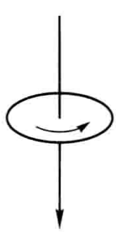

图 4.

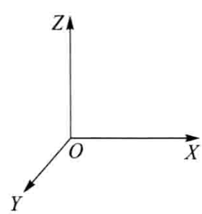

图 5.

在坐标轴上取定相等或不相等的长度单位(以后如无特别声明,所取单位都假定是相等的),则空间的点的位置,就可用三个数来确定。设有一点 P,我们可通过 P,作平行于三个坐标面的平面,与第一、第二、第三坐标轴分别相交于 Q,R,S(图 6),就得

$$x = OQ, \quad y = OR, \quad z = OS,$$

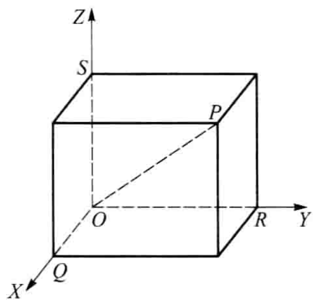

图 6.

分别称为 P 点的第一、第二、第三坐标,依次记作(x,y,z),简称为 P 点的坐标。若 P 定,则(x,y,z)随着而定。反之,若有三个实数 a,b,c,则可作平行于坐标面的三个平面,与第一、第二、第三坐标轴分别交于 Q,R,S,使 $OQ=a,OR=b,OS=c$,从而得到这三个平面的交点,其位置由(a,b,c)来决定。还有,如作一个起自原点而终于 $P(x,y,z)$的有向线段,称作矢径,则矢径 OP 在第一、第二、第三坐标轴上的射影,就分别是 P 点的第一、第二、第三坐标 x,y,z。

很显然,若有一个垂直于第一坐标轴的平面,则其上各点的第一坐标必为一常数 $x=a$。同样的,试看垂直于第二、第三坐标轴的平面,其上各点必分别满足 $y=b$ 及 $z=c$,其中 b,c 都是常数。这样看来,可知三个坐标面当分别由 $x=0,y=0,z=0$ 来表达。我们又看到,整个空间被三个坐标面分成八个部分,叫做卦限,在每一卦限内各坐标都有确定的正负号,正如平面直角坐标系中的象限一样,可不必细说。

据上述方法,用三条正交的坐标轴或三个正交的坐标面来规定点的位置,称作笛卡儿直角坐标系,常记作 $OXYZ$ 坐标系。若把原点(0,0,0)沿第一坐标轴移至(a,0,0),则对于移动后的坐标 x'',y'',z''(图 7)必有

$$x''=x-a,\quad y''=y,\quad z''=z。$$

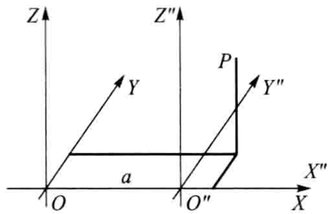

图 7.

照此再把原点沿其他两坐标轴平移,可以推想当原点由(0,0,0)移至(a,b,c)后,则任意一点的前后坐标 x,y,z 与 x',y',z'间必有如下关系成立(见图 8):

$$x'=x-a,\quad y'=y-b,\quad z'=z-c,\tag{2.1}$$

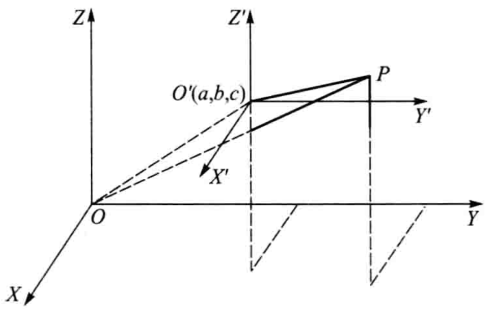

图 8.

或

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c。\tag{2.2}$$

这叫做空间坐标轴平移的变换式，包括上册第 33 页（11.1）与（11.2）各公式在内。

讲明了点的坐标，我们可从两点的坐标来计算其间的距离。若有一点 $P(x,y,z)$，则其与原点相去的距离，就是 OP 的长度，当然是

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}。\tag{2.3}$$

再用坐标轴平移式，可证 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离（参看上册第 33 页 §12）为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。\tag{2.4}$$

此外，又有所谓直线上的定比分点。若在一有向直线上取两不同的点 A 及 B，规定由 A 到 B 的方向是直线的正向，则对于直线上任何不同于 B 的点 P 来说，

$$\frac{AP}{PB} = \lambda \tag{2.5}$$

必有确定意义。这个数 λ 叫做 P 对 AB 的分比。假定 A,B 两点为固定，其坐标分别为 (x_1,y_1,z_1) 及 (x_2,y_2,z_2)，又 P 的坐标为 (x,y,z)，则（参看上册 §13）有如下关系成立：

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}。\tag{2.6}$$

据此，当 λ 在不等于 -1 的条件下变动时，将从而获得直线上对应于定比 λ 的各点；例如 $\lambda=1$ 时，得 AB 的中点的坐标

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\quad y = \frac{y_1+y_2}{2},\quad z = \frac{z_1+z_2}{2}。\tag{2.7}$$

§3. 有向线段的坐标

应用直角坐标系，不但可以确定点的位置，两点所连成的有向线段的长度也可用数明确地表达出来。可是，有向线段不仅有长

度,还有正负方向。因此,让我们先讲一讲如何在空间直角坐标系的基础上,用数来表达有向直线的方向,即所谓有向直线的方向余弦。

设有一条通过原点的有向直线,它与第一、第二、第三坐标轴的正向所夹角称为第一、第二、第三方向角,其余弦称为第一、第二、第三方向余弦,分别记作 α,β,γ。如有不通过原点的有向直线 L,则通过原点,作一与 L 平行而同向的有向直线 OS,以 OS 的方向余弦来定义 L 的方向余弦。应当注意,α,β,γ 所记的,是夹角的余弦而不是夹角本身。因高等数学中所遇见的,都是角的余弦,我们对于夹角的起边与终边,或夹角有 2π 倍数的增减,都无须加以说明,前在平面解析几何学中早已讲明(参看上册 §8)。

有向直线的方向余弦照此定义之后,可知两有向直线如平行而同向,则其方向余弦必分别相等,否则就不可能相等。例如,一有向直线的方向余弦若为 α,β,γ,则与此平行而反向的有向直线必以 $-\alpha,-\beta,-\gamma$ 为方向余弦。平行而同向的,称为方向相同;平行而不一定同向的,称为方位相同。

我们要把方向余弦用数表达出来,可根据如下定理:

定理一 若在一条通过原点而方向余弦为 α,β,γ 的有向直线上取一同向而长度等于 ρ $(\rho\neq0)$ 的线段 OP(图 9),则其终点 P 的坐标 (x,y,z) 必为

$$x=\rho\alpha,\quad y=\rho\beta,\quad z=\rho\gamma。\tag{3.1}$$

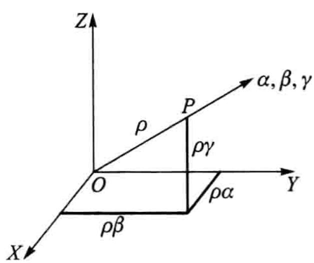

图 9.

由此可见 $\rho=1$ 时，也就是说，在方向余弦为 α,β,γ 的直线上，取长度等于 1 的线段，则其终点的坐标就是(α,β,γ)。

定理二 设自原点 O 直指任何不同于原点的点 $P(x,y,z)$ 作一矢径，则其方向余弦 α,β,γ 必为

$$\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。\tag{3.2}$$

应用坐标轴平移式，可再证由 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 直指 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的有向线段必有方向余弦

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \beta&=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \gamma&=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}。\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

到此，我们再提出方向余弦的基本特性，由如下两定理来说明：

定理三 任何有向直线对直角坐标系的方向余弦 α,β,γ 必满足

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1。\tag{3.4}$$

定理四 任何三个数 α,β,γ，只要满足(3.4)式，则必有空间的唯一方向，其对直角坐标系的第一、第二、第三方向余弦分别为 α,β,γ。

因我们可取一点 P，其坐标为(α,β,γ)，而由于上述关系的成立，P 显然不能是原点。因此由原点作一直达 P 点的有向线段，其方向余弦必为 α,β,γ；而任何直线若与此平行而同向，则其方向余弦亦为 α,β,γ，其他不同方向的方向余弦决不能与 α,β,γ 完全相同。这样一来，我们可用方向余弦来明确而唯一地规定方向。