

高等学校教材

高等数学

(初稿)

下册

朱公谨 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

(初稿)

下册

朱公瑾 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书由高等教育部委托交通大学数学教研组朱公谨教授编写。可作为高等工业学校 320 到 380 学时类型的高等数学课程的教学用书。因编写时间短促,没能广泛征求意见,先作为初稿出版;希有关方面提出意见,供再版时修正的参考。

本书于 1958 年出版,恰逢高等教育出版社建社 60 周年,甲午重印,以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:初稿.下册/朱公谨编. -- 北京:高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039862-5

I. ①高… II. ①朱… III. ①高等数学-高等职业教育-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 094830 号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 蒋 青 封面设计 杨立新 版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅 责任校对 刘 莉 责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市四季青双青印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
印 张	13.5	版 次	2014 年 7 月第 1 版
字 数	340 千字	印 次	2014 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	28.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39862-00

下册目录

第一篇 空间解析几何学

第一章 基本概念及矢量代数初步	(2)
§ 1. 空间有向线段的射影	(2)
§ 2. 空间直角坐标系	(3)
§ 3. 有向线段的坐标	(7)
§ 4. 矢量概念	(11)
§ 5. 矢量的标量积	(13)
附注 (1) 矢量的矢量积, (2) 矢量函数的求导	(16)
第二章 平面、直线及曲面的方程	(18)
§ 6. 平面方程的法式	(18)
§ 7. 三元一次方程	(19)
§ 8. 两平面的交角	(22)
§ 9. 空间直线方程	(24)
* § 10. 有向三角形的射影	(28)
* § 11. 空间坐标轴的旋转	(32)
§ 12. 曲面方程举例	(34)

第二篇 多元函数的微分学

第三章 偏导数与全微分	(42)
§ 13. 多元函数概念	(42)
§ 14. 二重极限	(45)
§ 15. 二元函数在一点上及在定义域内的连续性	(51)

§ 16. 偏导数	(55)
§ 17. 二元函数的可导性与可微性	(59)
§ 18. 方向导数	(62)
§ 19. 链导法的推广	(65)
§ 20. 全微分	(69)
§ 21. 二元函数的拉格朗日定理与泰勒定理	(73)
附注 (1) 关于重极限的存在问题, (2) 闭集与开集, (3) 极限 归并原则, (4) 再论二元函数在一个自变量固定时的 极限	(74)
第四章 从隐函数研究曲线及曲面	(80)
§ 22. 方程在一点邻近的解开	(80)
§ 23. 隐函数求导法	(84)
§ 24. 平面曲线、空间曲线与曲面的讨论	(87)
§ 25. 平面曲线的奇点	(92)
§ 26. 坐标变换与反变换	(94)
§ 27. 球面坐标与柱面坐标	(98)
§ 28. 二元函数的极值问题	(101)
附注 (1) 平面的参数方程, (2) 曲面的参数方程, (3) 空 间曲线的曲率与挠率, 弗雷内公式, (4) 极值的充分 条件	(109)
 第三篇 无 穷 级 数 	
第五章 常数项与函数项级数	(122)
§ 29. 无穷级数的收敛与发散	(122)
§ 30. 正项级数的收敛问题	(125)
§ 31. 绝对收敛与条件收敛	(131)
§ 32. 函数项级数的一致收敛问题	(135)
§ 33. 函数项级数的逐项积分与求导问题	(144)
§ 34. 幂级数	(148)
§ 35. 函数展开为幂级数问题	(152)
§ 36. 无穷级数与反常积分	(158)

§ 37. 复变量幂级数	(160)
附注 (1) 柯西普遍审敛准则应用于级数, (2) 级数项易位 问题, (3) 级数的相乘, (4) 阿贝尔审敛准则, (5) 阿贝 尔定理的证明, (6) 无穷乘积	(165)
第六章 傅里叶级数	(175)
§ 38. 三角级数与周期函数	(175)
§ 39. 函数的傅里叶级数	(177)
§ 40. 傅里叶级数的收敛问题	(180)
§ 41. 傅里叶级数举例	(184)
§ 42. 正交函数系	(191)
§ 43. 傅里叶级数的复数形式	(195)
附注 (1) 吉布斯现象, (2) 傅里叶级数的逐项求积分	(196)

第四篇 多元函数的积分学

第七章 重积分及其应用	(202)
§ 44. 含参数的定积分	(202)
§ 45. 二重积分概念	(208)
§ 46. 重积分的基本特性	(212)
§ 47. 矩形域上重积分的计算	(215)
§ 48. 任意域上重积分的计算	(218)
§ 49. 重积分转换于极坐标	(222)
§ 50. 三重积分略说	(225)
§ 51. 反常重积分	(227)
§ 52. 用重积分计算体积	(230)
§ 53. 曲面的面积	(234)
§ 54. 重积分在物理学中的简单应用	(239)
附注 (1) 重极限与累极限的关系, (2) 含参数的反常 积分	(246)
第八章 线积分与面积分	(253)
§ 55. 线积分概念	(253)

§ 56. 线积分与路线无关的问题	(257)
§ 57. 全微分求积分问题	(259)
§ 58. 线积分的基本定理	(262)
§ 59. 矢量场与标量场	(266)
§ 60. 联系重积分与线积分的高斯定理	(271)
§ 61. 格林公式	(278)
§ 62. 面积分概念	(279)
§ 63. 联系重积分与面积分的奥斯特罗格拉茨基定理	(284)
§ 64. 联系面积分与线积分的斯托克斯定理	(286)
附注 (1) 重积分转换式, (2) 斯托克斯定理的证明, (3) 矢量 场作为旋度场的充分条件	(288)

第五篇 微分方程

第九章 一阶微分方程	(294)
§ 65. 一阶微分方程的几何意义	(294)
§ 66. 变量可分离的一阶微分方程	(298)
§ 67. 用变量转换求变量的分离	(300)
§ 68. 一阶线性微分方程	(305)
§ 69. 全微分方程	(309)
§ 70. 单参数曲线族的微分方程	(314)
§ 71. 一阶微分方程组	(316)
附注 (1) 平面曲线族的包络, (2) 克莱罗微分方程, (3) 欧拉 - 柯西折线近似积分法	(317)
第十章 二阶线性微分方程	(322)
§ 72. 解的存在定理	(322)
§ 73. 齐次二阶线性微分方程的解	(323)
§ 74. 常系数齐次二阶线性微分方程	(328)
§ 75. 简谐振动与阻尼振动	(330)
§ 76. 非齐次二阶线性微分方程	(334)
§ 77. 强迫振动	(339)
§ 78. 贝塞尔微分方程略说	(340)

附注 (1) 二阶微分方程的边值问题, (2) 高于二阶的常系数

齐次线性微分方程的基解组 (342)

第十一章 数学物理学中的偏微分方程 (345)

§ 79. 求积分的几种简单方法 (345)

§ 80. 波动方程的初值问题 (352)

§ 81. 圆域上拉普拉斯方程的边值问题 (355)

§ 82. 自由的弦振动 (357)

§ 83. 阻尼的弦振动 (364)

§ 84. 热传导方程 (366)

第六篇 复变函数的微积分学

第十二章 解析函数的特性 (370)

§ 85. 可导性的条件 (370)

§ 86. 解析函数的反函数 (376)

§ 87. 复变函数的定积分与不定积分 (377)

§ 88. 柯西 - 古尔萨基本定理 (382)

§ 89. 从复变对数到复变初等函数 (385)

§ 90. 解析函数与保形映射 (389)

§ 91. 柯西 - 古尔萨基本定理的一种应用 (402)

§ 92. 柯西积分公式 (406)

§ 93. 解析函数的泰勒展开 (409)

§ 94. 解析函数的洛朗展开 (411)

§ 95. 留数定理 (415)

§ 96. 解析函数与拉普拉斯方程 (419)

参考书目 (422)

第一篇

空间解析几何学

第一章

基本概念及矢量代数初步

§ 1. 空间有向线段的射影

对于空间的有向线段,以 A 为起点, B 为终点,常记作 AB ,我们也可从它与另一条有向直线的关系来加以考察,像在平面中一样(参照上册第 26 页 § 9)。设以 S' 记这有向直线,从 S' 来看 AB ,则有所谓 AB 在 S' 上的射影。试通过 AB 的两端 A 及 B ,作垂直于 S' 的平面,其与 S' 的交点分别记作 A' 及 B' (图 1),则 $A'B'$ 称为 AB 在 S' 上的射影。当 $A'B'$ 的方向与 S' 的正向相同时, $A'B'$ 是一正数,相反时是一负数。因此,从 AB 在 S' 上的射影 $A'B'$,我们可以了解 AB 。

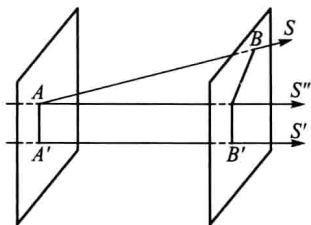


图 1.

若有两个线段 AB 及 CD ,彼此平行而同向,则两者在 S' 上的射影 $A'B'$ 及 $C'D'$ 之间必有如下关系:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}.$$

这就是说,一个线段的射影与该线段本身之比,对于一切平行而同向的线段来说,总是一个常数。这常数必为 $\cos(AB, S')$, 因通过 A 可作一与 S' 平行而同向的有向直线 S'' 如图 1, 从而可见 $\cos(AB, S'') = \cos(AB, S')$ 。于是有

定理一 若 S 及 S' 为空间任何两有向直线, 则不论 S 及 S' 是否在同一平面上^①, S 上任何线段 AB 在 S' 上的射影必为

$$A'B' = AB \cos(S, S'). \quad (1.1)$$

其次, 若有一折线段, 由 AB, BC, CD, DL 首尾相接而成, 则其在另一有向直线 S' 上的射影, 为各线段分别在 S' 上的射影连接起来的结果:

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'L' = A'L'. \quad (1.2)$$

但 $A'L'$ 就是连接 A 及 L 两点的线段 AL 的射影。这一线段 AL , 像在平面中的一样, 也叫做该折线段的封闭线段。因此又得

定理二 任何折线段在 S' 上的射影恰等于其封闭线段在 S' 上的射影。

据此, 可知空间的折线段若是闭合的, 就是起点与终点相合的, 则其射影必然是零了。

§ 2. 空间直角坐标系

要讲空间解析几何学, 首先应使空间的点与数取得联系, 因此, 应当说明一下空间的笛卡儿直角坐标系。试作三条有向直线

① 两条有向直线 S 及 S' 若不在同一平面上, 所谓它们的夹角 $\angle(S, S')$, 就是指两条通过空间任何一点而分别与 S 及 S' 平行且同向的有向直线 S_1 及 S'_1 所夹成的角 $\angle(S_1, S'_1)$ 。我们把这角的余弦简写为 $\cos(S, S')$ 。

交于一点而互相垂直,称为坐标轴,其交点称为坐标原点,简称原点,记作 O 。通过原点而互相垂直的坐标轴分别叫做 OX 、 OY 、 OZ 轴,或横轴、纵轴、竖轴,或第一、第二、第三坐标轴。又通过原点而垂直于坐标轴的平面称为坐标面。垂直于第一、第二、第三坐标轴的坐标面分别称为第一、第二、第三坐标面(图2)。依照平面解析几何学的习惯,把第一、第二坐标轴的正向规定好之后(任意决定了 OX 轴的正向,在第三坐标面上依反时针方向旋转一直角,即为 OY 轴的正向),有两种不同方法,可以来取定第三坐标轴的正向。我们可依右手螺旋(如图3)或左手螺旋(如图4)的旋向,由第一坐标轴的正向转到第二坐标轴的正向,那么盘旋的方向就是第三坐标轴的正向,前者称为右手坐标系,如图2,后者称为左手坐标系,如图5。以后应用直角坐标系,如无特别声明,都指右手坐标系。规定好坐标轴的正向(同时包括它的负向),则垂直于坐标轴的坐标面就随着而有正侧与负侧可分,不必赘述。

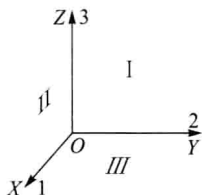


图 2.

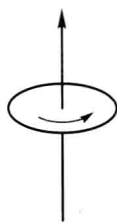


图 3.

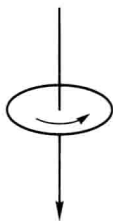


图 4.

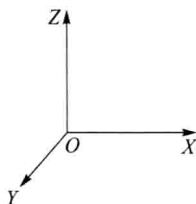


图 5.

在坐标轴上取定相等或不相等的长度单位(以后如无特别声明,所取单位都假定是相等的),则空间的点的位置,就可用三个数来确定。设有一点 P ,我们可通过 P ,作平行于三个坐标面的平面,与第一、第二、第三坐标轴分别相交于 Q, R, S (图 6),就得

$$x = OQ, \quad y = OR, \quad z = OS,$$

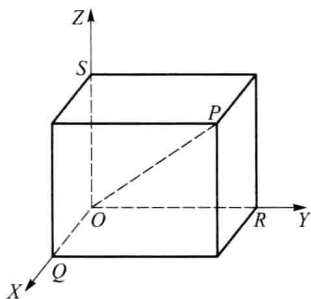


图 6.

分别称为 P 点的第一、第二、第三坐标,依次记作 (x, y, z) ,简称为 P 点的坐标。若 P 定,则 (x, y, z) 随着而定。反之,若有三个实数 a, b, c ,则可作平行于坐标面的三个平面,与第一、第二、第三坐标轴分别交于 Q, R, S ,使 $OQ = a, OR = b, OS = c$,从而得到这三个平面的交点,其位置由 (a, b, c) 来决定。还有,如作一个起自原点而终于 $P(x, y, z)$ 的有向线段,称作矢径,则矢径 OP 在第一、第二、第三坐标轴上的射影,就分别是 P 点的第一、第二、第三坐标 x, y, z 。

很显然,若有一个垂直于第一坐标轴的平面,则其上各点的第一坐标必为一常数 $x = a$ 。同样的,试看垂直于第二、第三坐标轴的平面,其上各点必分别满足 $y = b$ 及 $z = c$,其中 b, c 都是常数。这样看来,可知三个坐标面当分别由 $x = 0, y = 0, z = 0$ 来表达。我们又看到,整个空间被三个坐标面分成八个部分,叫做卦限,在每一卦限内各坐标都有确定的正负号,正如平面直角坐标系中的象限一样,可不必细说。

据上述方法,用三条正交的坐标轴或三个正交的坐标面来规定点的位置,称作笛卡儿直角坐标系,常记作 $OXYZ$ 坐标系。若把原点 $(0,0,0)$ 沿第一坐标轴移至 $(a,0,0)$,则对于移动后的坐标 x'',y'',z'' (图 7) 必有

$$x'' = x - a, \quad y'' = y, \quad z'' = z。$$

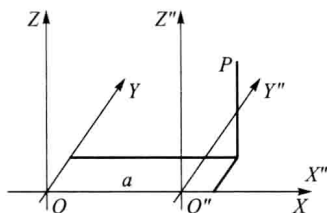


图 7.

照此再把原点沿其他两坐标轴平移,可以推想当原点由 $(0,0,0)$ 移至 (a,b,c) 后,则任意一点的前后坐标 x,y,z 与 x',y',z' 间必有如下关系成立(见图 8):

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c, \quad (2.1)$$

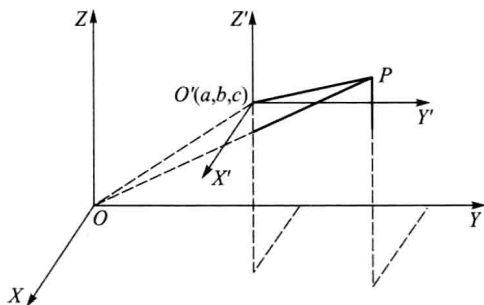


图 8.

或

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c。 \quad (2.2)$$

这叫做空间坐标轴平移的变换式，包括上册第 33 页 (11.1) 与 (11.2) 各公式在内。

讲明了点的坐标，我们可从两点的坐标来计算其间的距离。若有一点 $P(x, y, z)$ ，则其与原点相去的距离，就是 OP 的长度，当然是

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.3)$$

再用坐标轴平移式，可证 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离（参看上册第 33 页 § 12）为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.4)$$

此外，又有所谓直线上的定比分点。若在一有向直线上取两点不同的点 A 及 B ，规定由 A 到 B 的方向是直线的正向，则对于直线上任何不同于 B 的点 P 来说，

$$\frac{AP}{PB} = \lambda \quad (2.5)$$

必有确定意义。这个数 λ 叫做 P 对 AB 的分比。假定 A, B 两点为固定，其坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) ，又 P 的坐标为 (x, y, z) ，则（参看上册 § 13）有如下关系成立：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.6)$$

据此，当 λ 在不等于 -1 的条件下变动时，将从而获得直线上对应于定比 λ 的各点；例如 $\lambda = 1$ 时，得 AB 的中点的坐标

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.7)$$

§ 3. 有向线段的坐标

应用直角坐标系，不但可以确定点的位置，两点所连成的有向线段的长度也可用数明确地表达出来。可是，有向线段不仅有长

度,还有正负方向。因此,让我们先讲一讲如何在空间直角坐标系的基础上,用数来表达有向直线的方向,即所谓有向直线的方向余弦。

设有一条通过原点的有向直线,它与第一、第二、第三坐标轴的正向所夹角称为第一、第二、第三方向角,其余弦称为第一、第二、第三方向余弦,分别记作 α, β, γ 。如有不通过原点的有向直线 L ,则通过原点,作一与 L 平行而同向的有向直线 OS ,以 OS 的方向余弦来定义 L 的方向余弦。应当注意, α, β, γ 所记的,是夹角的余弦而不是夹角本身。因高等数学中所遇见的,都是角的余弦,我们对于夹角的起边与终边,或夹角有 2π 倍数的增减,都无须加以说明,前在平面解析几何学中早已讲明(参看上册 §8)。

有向直线的方向余弦照此定义之后,可知两有向直线如平行而同向,则其方向余弦必分别相等,否则就不可能相等。例如,一有向直线的方向余弦若为 α, β, γ ,则与此平行而反向的有向直线必以 $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 为方向余弦。平行而同向的,称为方向相同;平行而不一定同向的,称为方位相同。

我们要把方向余弦用数表达出来,可根据如下定理:

定理一 若在一条通过原点而方向余弦为 α, β, γ 的有向直线上取一同向而长度等于 ρ ($\rho \neq 0$) 的线段 OP (图 9),则其终点 P 的坐标 (x, y, z) 必为

$$x = \rho\alpha, \quad y = \rho\beta, \quad z = \rho\gamma. \quad (3.1)$$

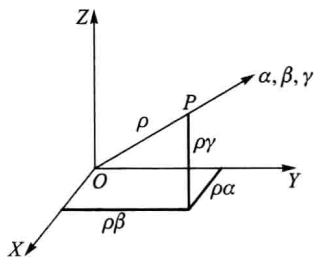


图 9.

由此可见 $\rho=1$ 时,也就是说,在方向余弦为 α, β, γ 的直线上,取长度等于 1 的线段,则其终点的坐标就是 (α, β, γ) 。

定理二 设自原点 O 直指任何不同于原点的点 $P(x, y, z)$ 作一矢径,则其方向余弦 α, β, γ 必为

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (3.2)$$

应用坐标轴平移式,可再证由 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 直指 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的有向线段必有方向余弦

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

到此,我们再提出方向余弦的基本特性,由如下两定理来说明:

定理三 任何有向直线对直角坐标系的方向余弦 α, β, γ 必满足

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (3.4)$$

定理四 任何三个数 α, β, γ , 只要满足 (3.4) 式, 则必有空间的唯一方向, 其对直角坐标系的第一、第二、第三方向余弦分别为 α, β, γ 。

因我们可取一点 P , 其坐标为 (α, β, γ) , 而由于上述关系的成立, P 显然不能是原点。因此由原点作一直达 P 点的有向线段, 其方向余弦必为 α, β, γ ; 而任何直线若与此平行而同向, 则其方向余弦亦为 α, β, γ , 其他不同方向的方向余弦决不能与 α, β, γ 完全相同。这样一来, 我们可用方向余弦来明确而唯一地规定方向。