经济数学基础

概率统计学习指导

（第2版）

隋亚莉 张启全 曲子芳 编

清华大学出版社

经济数学基础

概率统计学习指导

（第2版）

隋亚莉 张启全 曲子芳 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《概率统计》(第 4 版)(隋亚莉，曲子芳，清华大学出版社，2014)的辅助教材. 全书分为 8 章. 每章包括内容提要、典型例题解析、习题、习题参考答案四部分内容. 在内容提要中对本章的重要概念、定理、公式以表格形式进行了简明扼要的总结归纳，重点突出，层次清晰，便于读者复习；典型例题解析部分归纳出各种题型并详细介绍了各类题型的解题方法和技巧，例题选题广泛且具代表性；每章配三种类型习题：客观题(填空题和选择题)、计算题和证明题，读者可以借此进行训练，提高独立解题能力；每章给出了习题参考答案，部分习题给出了解法或提示，以适于读者自学.

本书可作为高等学校财经类、理工类各专业学生的参考书，也可作为硕士研究生入学考试的辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导/隋亚莉，张启全，曲子芳编. --2 版. --北京：清华大学出版社，2014
(经济数学基础)
ISBN 978-7-302-36622-5

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①隋…　②张…　③曲…　Ⅲ. ①概率统计－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 113413 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：12.5　　**字　　数**：255 千字
版　　次：2007 年 2 月第 1 版　　2014 年 7 月第 2 版　　**印　　次**：2014 年 7 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：24.00 元

产品编号：058629-01

编委会

前言

《概率统计学习指导》(第 2 版)是与《概率统计》(第 4 版)(隋亚莉,曲子芳,清华大学出版社,2014)配套的辅助教材.编写本书的目的是使学生在学习原教材的基础上,进一步开阔眼界,拓展思路,多实践,多练习,以增强分析问题和解决问题的能力.本书具有以下几个特点:

1. 全书是以财经类专业概率统计课程的教学大纲和全国硕士研究生入学考试大纲的要求为标准编写的,为了兼顾工科学生使用,对几何概型、条件分布等内容也进行了讨论.在章节和内容的编排上与原教材结合紧密,在叙述方式以及符号的使用等方面都与原教材保持一致.在例题和习题的选编上较原教材具有更多的信息量,讨论也更加深入全面.

2. 重要概念、定理、公式以表格的形式进行了简明扼要的总结归纳,重点突出,层次清晰,便于读者记忆和掌握.

3. 每章归纳出各种基本题型.全书共精选了将近 200 道典型例题,选题广泛且具代表性,并详细地介绍了各种题型的解题方法和技巧,对一些问题的讨论和分析中融合了作者在教学实践中的经验和体会.

4. 每章选配了两种习题,有计算题、证明题,也有近年来各种考试中常采用的客观题(填空题和选择题).在习题的编排上注意难易结合,既有基本题,也有较难的综合题,并在第 1 版的基础上增加了"考研题选练",在历年考研题中精选了与教材内容密切相关且难易程度适中的题目供读者参考练习.全书共配置了 300 余道各类习题,读者可以借此进行基本训练,提高独立解题能力,并检验自己对所学知识的掌握程度.每章后面给出了习题参考答案,部分习题给出了解法或提示,以便于读者自学.

本书可以作为财经类、理工类学生的学习参考书，也可以作为硕士研究生入学考试的辅导材料.

由于水平所限，加之时间仓促，本书一定有许多不妥之处，恳请读者多加批评、指正.

编 者

2014 年 4 月

目录

第 1 章 随机事件与概率

1.1 内容提要

本章讲述概率统计的基本概念——事件与概率及事件概率的计算方法. 下面我们将主要概念和计算公式总结如下.

1. 随机事件的概念与性质

<table>
<tr><td>随机试验</td><td colspan="2">具有以下 3 个特点的试验称为随机试验：
(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；
(2) 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的全部可能结果；
(3) 试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.</td></tr>
<tr><td>样本点与样本空间</td><td colspan="2">随机试验 E 的每一个不可再分的结果 ω，称为一个样本点；
样本点的全体所组成的集合 Ω，称为 E 的样本空间.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">随机事件</td><td rowspan="4">在一次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复的试验中具有某种统计规律性的随机试验的结果，称为随机事件. 它是样本空间的某个子集.</td><td>由一个样本点构成的子集称为基本事件.</td></tr>
<tr><td>由多个样本点构成的子集称为复合事件.</td></tr>
<tr><td>样本空间 Ω 称为必然事件.</td></tr>
<tr><td>空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">事件间的运算</td><td colspan="2">事件的和 $A+B$：表示事件 A 与 B 至少有一个发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件的积 AB：表示事件 A 与 B 同时发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件的差 $A-B$：事件 A 发生而事件 B 不发生.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">事件间的关系</td><td colspan="2">事件的包含 $A\subset B$：事件 A 发生必然导致事件 B 发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件相等 $A=B$：$A\subset B$ 且 $B\subset A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">互不相容事件：事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">对立事件 $\overline{A}$：事件 A 不发生，即 $\Omega-A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生且不同时发生，即
$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$ 且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件独立：事件 A 与 B 发生与否互相不受影响，即 $P(AB)=P(A)P(B)$.</td></tr>
</table>

2. 概率的定义与计算公式

概率的定义	统计定义	在相同的条件下重复进行 n 次试验.如果当 n 增大时,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动;且一般说来,n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率.这样定义的概率称为统计概率.
	公理化定义	设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,若它满足如下3个条件: (1) 对任何事件 A,$P(A)\geqslant 0$; (2) $P(\Omega)=1$; (3) 对于可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$,有 $$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$ 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.
	条件概率	设 A,B 为两个事件,且 $P(B)>0$,称比值 $P(AB)/P(B)$ 为事件 A 在事件 B 发生的条件下的条件概率,记作 $P(A\|B)$.
概率的计算公式	加法公式	$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$ $$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$ 特别地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则 $$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$
	减法公式	设 A,B 为任意两个事件,则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$. 若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.
	乘法公式	若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 $$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$ 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则 $$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$ 特别地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$
	全概率公式	如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots)$,则对任何一个事件 B,有 $$P(B)=\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i).$$
	贝叶斯公式	若 $A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots)$,则对任一事件 B,$P(B)>0$,有 $$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad j=1,2,\cdots.$$

续表

概率模型	古典概型	具有下列两个特点的概率模型称为古典概型(或等可能概型): (1) 样本空间只包含有限个基本事件; (2) 每个基本事件发生的可能性相同. 设在古典概型中共有 n 个基本事件,A 为包含其中 m 个基本事件的随机事件,则定义事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}$.
	几何概率	将古典概型中的有限性推广到无限性而保留等可能性,就得到几何概型.一般来说,具有下列特点的概率问题称为几何概型: 有一个可度量的几何图形 Ω,试验 E 看成在 Ω 中随机地投掷一点,即 Ω 为样本空间.A 是 Ω 中可度量的图形,事件 $A=\{$投掷的点落入图形 A 中$\}$.则事件 A 的概率定义为 $P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$ (L 表示度量,指长度、面积、体积等).
	伯努利概型	设试验 E 只有两种可能结果 A 和 $\overline{A}$,在相同的条件下独立地重复 n 次,这样的 n 次试验称为 n 重伯努利试验;描述 n 重伯努利试验结果的概率模型称为 n 重伯努利概型(也称独立试验序列).二项概率公式:在 n 重伯努利概型中,设每次试验事件 A 发生的概率为 $P(A)=p$,A 不发生的概率为 $P(\overline{A})=1-p=q(p,q>0)$,则在 n 次试验中 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率 $P_n(k)$ 为 $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$.

1.2 典型例题解析

题型 1:基本概念、公式与简单运算的填空、选择、判断;

题型 2:古典概型、几何概型、伯努利概型的概率计算;

题型 3:利用加法公式、乘法公式、条件概率公式及事件的独立性计算概率;

题型 4:利用全概率公式、贝叶斯公式计算概率.

例 1.1 写出下列随机试验的样本空间及下列事件所包含的样本点:

(1) 掷一颗骰子,出现奇数点;

(2) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地取两个数,其中一个数是另外一个数的 2 倍;

(3) 将 a,b 两个球随机地放到三个盒子中去,盒子容量不限,第一个盒子中至少有一个球;

(4) 两人约定在某处会面,分别记录这两个人到达该处的时间,假定他们都在一个小时内到达.如果约定先到者应该等待另外一个人,等待时间超过 1 刻钟即可离去.事件 $A=\{$两人能见面$\}$;

(5) 从一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.考虑事件 $A=\{$寿命大于 1000h$\}$.

解 (1) 掷一颗骰子,其结果有6种可能:出现1点,2点,3点,……,6点,可以记样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,那么"出现奇数点"的事件为 $\{1,3,5\}$.

(2) 1,2,3,4四个数中可重复地取两个数,共有16种可能,可记样本空间为 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$."一个数是另一个数的2倍"的事件为 $\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$.

(3) 我们记三个盒子分别为甲、乙、丙,依题意,将 a,b 两球随机放入三个盒子中共有9种可能结果,如果用(甲,乙)表示 a 球放入甲盒,b 球放入乙盒的可能结果,那么样本空间可表示为

$$\Omega=\{(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,甲),\\(乙,乙),(乙,丙),(丙,甲),(丙,乙),(丙,丙)\}.$$

"第一个盒子中至少有一球"的事件可记为

$$A=\{(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,甲),(丙,甲)\}.$$

(4) 如果用 t_1 表示第一人到达的时间,t_2 表示第二人到达的时间,那么样本空间是坐标为 (t_1,t_2) 的点组成的正方形,其中 $0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1$. 可记为

$$\Omega=\{(t_1,t_2)\mid 0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1\}.$$

那么事件 A 表示为

$$A=\left\{(t_1,t_2)\,\middle|\,|t_1-t_2|\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1\right\}.$$

(5) 灯泡的使用寿命理论上可为任一非负实数. 因为上限不确定,可认为没有上限,所以样本空间 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$,事件 $A=\{t\mid t>1000\}$.

说明 在研究随机事件相应的样本点时,我们常要利用集合论中的概念与记法. 首先确定样本空间 Ω,然后写出要讨论的每个随机事件相应的集合.

例 1.2 设 A,B,C,D 为四个事件,试用这四个事件表示下列各事件:

(1) E_1:这四个事件至少发生一个;

(2) E_2:这四个事件都不发生;

(3) E_3:这四个事件至多发生一个;

(4) E_4:这四个事件至少发生两个;

(5) E_5:这四个事件恰好发生两个.

解 (1) A,B,C,D 至少发生一个,就是 A 发生或 B 发生或 C 发生或 D 发生,即 $E_1=A+B+C+D$;

(2) $E_2=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}=\Omega-E_1$;

(3) 四个事件至多发生一个就是四个事件都不发生或一个事件发生而其余三个事件都不发生,即 $E_3=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$;

(4) $E_4=AB+AC+AD+BC+BD+CD$;

(5) $E_5=AB\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}\overline{B}CD$.

说明 (1) 注意事件 $AB\overline{C}\overline{D}$ 与事件 AB 的差别. 前者表示 A,B 都发生而 C,D 都不发生；后者表示 A,B 都发生而 C,D 可发生也可不发生.

事实上，
$$\begin{aligned}AB&=AB\Omega=AB[C(D+\overline{D})+\overline{C}(D+\overline{D})]\\&=AB(CD+C\overline{D}+\overline{C}D+\overline{C}\overline{D})\\&=ABCD+ABC\overline{D}+AB\overline{C}D+AB\overline{C}\overline{D}.\end{aligned}$$

(2) 事件的运算和表示非常重要，一些常用记法和结论务必熟记，在后面的概率计算中经常用到. 在分析事件的关系及进行事件运算时，除了熟练运用事件间关系及运算的公式外，还经常以文氏图和集合论中的运算法则为工具解决问题.

例 1.3 甲、乙、丙三人独自破译一个密码，设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙独自译出，试分别表示下列事件：(1)$D=$\{密码被译出\}；(2)$E=$\{密码被译出但甲没译出\}；(3)$F=$\{甲、乙都译出但丙没译出\}.

解 (1) 密码被译出意即甲、乙、丙中至少有一人将密码译出，所以 $D=A+B+C$.

(2) 密码被译出但甲没译出可表示为 $E=D\overline{A}=(A+B+C)\overline{A}=(B+C)\overline{A}$.

(3) 甲、乙都译出但丙没译出表示为 $F=AB\overline{C}$.

例 1.4 某批产品中有 a 件正品，b 件次品. 从中用(1)有放回抽取；(2)不放回抽取两种抽样方式抽取 n 件产品，问其中恰有 $k(k\leqslant\min\{b,n\})$件次品的概率是多少？

解 (1) 有放回抽取

从 $a+b$ 件产品中有放回地抽取 n 件产品，所有可能的取法有 $(a+b)^n$ 种. 取出的 n 件产品中有 k 件次品，它们可以出现在 n 个位置中 k 个不同的位置，所有可能的取法有 C_n^k 种. 对于取定的一种位置，由于取正品有 a 种可能，取次品有 b 种可能，即有 $a^{n-k}b^k$ 种可能. 于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的可能取法共有 $C_n^k a^{n-k}b^k$ 种，故所求概率为

$$p_1=\frac{C_n^k a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{a+b}\right)^k.$$

在我们学习了伯努利概型后将会更好地理解这个结果.

(2) 不放回抽取

从 $a+b$ 件产品中抽取 n 件(不计次序)的所有可能的取法有 C_{a+b}^n 种. 在 a 件正品中取 $n-k$ 件的所有可能的取法有 C_a^{n-k} 种，在 b 件次品中取 k 件的所有可能的取法有 C_b^k 种，于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的所有可能的取法有 $C_a^{n-k}C_b^k$ 种. 故所求概率为

$$p_2=\frac{C_a^{n-k}C_b^k}{C_{a+b}^n}.$$

这个公式就是第 2 章将要介绍的超几何分布的概率公式.

说明 此例属于摸球问题(产品的随机抽样问题). 解答这类习题时，需注意次序应一致，如果计算样本点总数时，样本空间中的元素考虑了次序，则事件中的元素也要考虑次

序；或者两者都不考虑次序.

例 1.5 任意投掷可以区别的四颗均匀的骰子，求下列事件的概率.

$A=\{$四颗骰子出现的点数全都相同$\}$；

$B=\{$四颗骰子出现的点数全不相同$\}$；

$C=\{$四颗骰子恰有三个出现的点数相同$\}$；

$D=\{$四颗骰子恰有两个出现的点数相同$\}$；

$E=\{$四颗骰子出现的点数恰成两对$\}$.

解 每个骰子可以取 1～6 点中的任意一个点数，由乘法原理知，任意投掷可以区别的四个骰子的全部样本点数为 6^4.

若使四颗骰子出现的点数完全相同，则只需四颗骰子同取 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点中的任一个，共 6 种可能，故 $P(A)=\frac{6}{6^4}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$；

四颗骰子出现的点数全不相同，即第一颗骰子可以取 1～6 点中的任意一个，共 6 种可能，第二颗骰子只能取其他 5 个点中的任一点，共 5 种可能，以此类推，事件 B 所包含的基本事件数为 P_6^4.

$$P(B)=\frac{P_6^4}{6^4}=\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}=\frac{5}{18};$$

四颗骰子分成两组，其中一组三个骰子取同一点，另一组一个骰子取不同的一点，其分法有 C_4^3(或 C_4^1)种. 第一组骰子可以取 1～6 点中的任一点数，共 6 种取法，则第二组有 5 种取法，故事件 C 包含的基本事件数为 $C_4^3P_6^2$. 所以

$$P(C)=\frac{C_4^3P_6^2}{6^4}=\frac{4\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{54};$$

同理，事件 D 包含的基本事件数为 $C_4^2P_6^3$，

$$P(D)=\frac{C_4^2P_6^3}{6^4}=\frac{6\times6\times5\times4}{6^4}=\frac{5}{9};$$

四颗骰子恰成两对的分法共$\frac{1}{2}C_4^2$ 种，于是事件 E 包含的基本事件数为$\frac{1}{2}C_4^2P_6^2$，则

$$P(E)=\frac{\frac{1}{2}C_4^2P_6^2}{6^4}=\frac{\frac{1}{2}\times6\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{72}.$$

说明 掷 n 颗骰子与 n 个人的生日，n 封信装入 n 个信箱，n 只球投入 n 个盒子，n 个人分配到 n 个房间等同属于“分房问题”(分配问题)，处理这类问题时，要分清什么是“人”，什么是“房子”，一般不可颠倒. 例如，本例可以看成 4 个人分配到 6 个房间，房间容量不限，事件 A 可相应地看成“4 个人分配到同一间房”. 为了更好地使读者理解此类问

题,下面再举出一例.

例 1.6 某班有 n 名学生,求至少两人同一天生日的概率是多少?

解 这个问题实质上是分房问题,这里关键是将生日作为"房子".因为每个人的生日都可能是 365 天中的任何一天,且是等可能的,因此基本事件总数 $n=365^n$,设 $A=\{$至少两人同一天生日$\}$,注意到 $\overline{A}=\{n$ 个人生日各不相同$\}$,由于 $\overline{A}$ 包含的基本事件为 P_{365}^n,则 A 包含的基本事件数为 $365^n-\mathrm{P}_{365}^n$.所以

$$P(A)=\frac{365^n-\mathrm{P}_{365}^n}{365^n}.$$

下面是 n 取不同的值时 $P(A)=p$ 的数值:

n	10	15	20	25	30	40	45	50	55
p	0.117	0.253	0.414	0.569	0.706	0.891	0.94	0.97	0.99

当 $n=64$ 时,$P(A)\approx 0.997$,"至少两人生日相同"几乎是必然的了.可见,一年 365 天,55 件大事是有的,所以不管"双喜临门"还是"祸不单行"也就没什么奇怪的了.

例 1.7(随机取数问题) 从 0,1,…,9 共 10 个数字中随机有放回地接连取 4 个数字,按其出现的先后排成一列.试求下列各事件的概率:

(1) $A_1=\{$4 个数字排成一偶数$\}$;

(2) $A_2=\{$4 个数字排成一四位数$\}$;

(3) $A_3=\{$4 个数字中 0 恰好出现两次$\}$;

(4) $A_4=\{$4 个数字中 0 不出现$\}$.

解 因为是有放回抽取,所以样本空间含 10^4 个样本点.

(1) 若使 4 个数字组成偶数,只需末位数字为偶数即可.这有 5 个可能,即 0,2,4,6,8,而前三位数是任意的,有 10^3 种取法,于是 A_1 共含有 $\mathrm{C}_5^1 10^3$ 个基本事件,从而

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_5^1 10^3}{10^4}=0.5.$$

(2) 若使 4 个数字组成一四位数,则只需第一位数字不是 0 即可,而后三位数是任意的,于是 A_2 共有 $\mathrm{C}_9^1 10^3$ 个基本事件,从而

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_9^1 10^3}{10^4}=0.9.$$

(3) 若使 0 恰好出现两次,则只需某两次取数为 0,另两次不为 0 即可.于是 A_3 共含 $\mathrm{C}_4^2 9^2$ 个基本事件,从而

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^2 9^2}{10^4}=0.0486.$$

(4) 若使取出的四位数字中不含 0,则共有 9^4 种不同的取法,于是

$$P(A_4)=\frac{9^4}{10^4}=0.6561.$$

例 1.8 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只,求下列事件发生的概率:

(1) 无成对的鞋子;(2) 恰有两对鞋子;(3) 有 r 对鞋子.

解 (1) 因从 n 双中取 $2r$ 只,即从 $2n$ 只中取 $2r$ 只,故样本点总数为 C_{2n}^{2r}. 要所取的 $2r$ 只中无成对的必须只须这 $2r$ 只来自不同的 $2r$ 双,因此可认为先从 n 双不同鞋子中取 $2r$ 双,然后每双取一只. 因此,有利场合数为 $C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}$,故

$$P_1=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(2) 样本点总数仍为 C_{2n}^{2r},有利场合数可如下考虑,即先从 n 双中取 2 双,再从 $n-2$ 双中取 $2r-4$ 双,然后每双取一只. 从而有利场合数为 $C_n^2(C_2^2)^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$,故

$$P_2=\frac{C_n^2(C_2^2)^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(3) 样本点总数仍为 C_{2n}^{2r}. 有 r 对即取出 $2r$ 只全配对,故有利场合数为 $C_n^r(C_2^2)^r=C_n^r$,于是所求概率为

$$P_3=\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

例 1.9 某路公共汽车每 5min 发出一辆,求乘客到达站点后,等待时间不超过 3min 的概率.

解 乘客到达站点的时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 5)$ 可视为向时间段$[0,5]$投掷一随机点. 事件$A=\{2\leqslant t\leqslant 5\}$表示"等待时间不超过 3min",而 $\Omega=\{0\leqslant t\leqslant 5\}$,因此事件 A 的概率决定于线段$[2,5]$与$[0,5]$的长度比,即

$$P(A)=\frac{3}{5}.$$

例 1.10 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船停泊的时间是 1h,乙船停泊的时间是 2h,求两艘船都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 设甲、乙两艘船到达的时刻分别为 x, y,则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 24\}$,即 Ω 是边长为 24 的正方形,如图 1.1 所示.

由题意,若使两艘船都不需要等候,则必有:若甲船先到,乙船应该晚来 1h 以上,即 $y-x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1+x$;若乙船先到,甲船应晚来 2h 以上,即 $x-y\geqslant 2$ 或 $y\leqslant x-2$,所以当 (x,y)落在区域 $G=\{(x,y)\mid 1+x\leqslant y\leqslant 24$ 或 $0\leqslant y\leqslant x-2, 0\leqslant x\leqslant 24\}$(图 1.1 中阴影部分)内时,两艘船都不需要等候.

由于 G 的面积 $=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2=\frac{1013}{2}$，所以 $P=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{1013}{2\times 24^2}=0.88$.

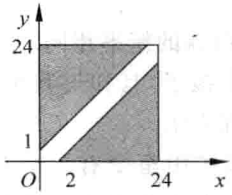

图 1.1

例 1.11（填空题） 对事件 A,B 和 C，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，$P(AB)=P(BC)=0$，则 A,B,C 中至少有一个发生的概率为（ ）.

解 求 A,B,C 中至少有一个发生的概率即是求 $P(A+B+C)$ 的值.

由已知得 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，最后由三个事件的加法公式可得 $P(A+B+C)=\frac{5}{8}$. 所以应填 5/8.

例 1.12 袋中有 10 个球，8 红 2 白，现从袋中任取两次，每次取一球作不放回抽取，求下列事件的概率：(1)两次都取红球；(2)两次中一次取红球，另一次取白球；(3)至少有一次取白球；(4)第二次取白球.

分析 此题关键是恰当地用事件把已知条件和所求表示出来，为此先把两次抽取结果设出来，以便找出事件间的关系.

解 设 $A_i=\{$第 i 次取出的是红球$\}$，$i=1,2$. 显然，$\overline{A}_i=\{$第 i 次取出的是白球$\}$.

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$.

(2) $P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)$，注意 $A_1\overline{A}_2$ 与 $\overline{A}_1A_2$ 互不相容，所以

$$\begin{aligned}P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)&=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}.\end{aligned}$$

(3) $P(\overline{A}_1+\overline{A}_2)=1-P(A_1A_2)=1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$.

注意所求中的“至少”问题常常借助其对立事件来解决.

(4) $P(\overline{A}_2)=P(\Omega\overline{A}_2)=P[(A_1+\overline{A}_1)\overline{A}_2]$

$=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$