应用型本科院校数学教材

Mathematics Foundation
for
Economics and Management

经济管理数学基础

阳　军◎主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

应用型本科院校数学教材

经济管理数学基础

主 编 阳 军
副主编 陈 亮
参 编 周 念 郑 英
史纪磊

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本套教材是针对"本科经济管理类专业应用型人才培养模式"而编写的数学类课程教学用书，分《经济管理数学基础》和《经济管理数学技术》上下两册。

本书是上册《经济管理数学基础》，内容以微积分中的极限、导数、微分、积分等数学理论为主线，融合了一些常用的经济与管理学知识，具有叙述平缓通俗、抽象推导简单、应用案例丰富等特点，有很强的专业融合性和教学适用性。本书分为基础理论、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分四部分内容，共七章。可以作为普通本科、民办本科、独立学院等本科院校经济管理类专业的数学基础课教材，也可作为高职高专院校学生及经济管理行业工作者的参考教程。

图书在版编目（CIP）数据

经济管理数学基础／阳军主编．—杭州：浙江大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-308-13706-5

Ⅰ.①经… Ⅱ.①阳… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 186787 号

经济管理数学基础

阳　军　主编

责任编辑　徐　霞
封面设计　黄晓意
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15.25
字　　数　372 千
版 印 次　2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-13706-5
定　　价　32.00 元

前　言

本套教材的编写，注重时代发展对人才素质的要求，遵循应用型本科人才培养目标和要求，树立“与专业相结合、为专业服务”的基本理念，争取在有限的课时里能做到数学知识“广、浅、新、用”。因此，在教材编写中对应用型本科的数学内容提出了数学技术化处理思想，把本科经济管理类各专业需要的数学理论——微积分、线性代数、概率论与数理统计、部分运筹学内容、部分数值计算内容与数学实验和数学模型等内容有机地融合在一起，适当弱化数学理论性和系统性，删减部分实用性不强且复杂的数学理论内容，充分融合一些经济与管理学知识，突出数学技术的应用，在整个课程难度有所下降的基础上增大课程信息量，而不是按照通常的做法去删减知识量。

教材内容总体安排是把应用型本科院校经济管理数学分为两大教学内容，分别编写教材《经济管理数学基础》和《经济管理数学技术》。

1.《经济管理数学基础》(建议课时 64)

主要包含微积分学的基础理论、常用的运算方法、相关交叉学科内容以及一些常用数学模型，为经管学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用的数学方法。考虑到微积分的内容较多、课时有限，针对应用型本科的培养特点与要求，对教材结构进行了一定的优化，强调与实际问题相结合，注重渗透核心数学思想。内容上删减了经济管理中基本用不到的一些反三角函数，降低了极限与连续的理论要求，降低不定积分的计算技巧与要求，弱化了二元函数微积分的理论，融合了一些经济与管理学知识及应用介绍。目的是做到既能培养学生的数学思想和逻辑思维能力，又让学生在较熟练地掌握微积分知识基本方法的基础上能运用所学知识去分析问题和解决问题，具备一定的抽象概括问题的能力以及一定的逻辑推理能力。

2.《经济管理数学技术》(建议课时 80)

主要内容为矩阵与行列式、向量与线性方程组、特征值与特征向量、概率论、数理统计、MATLAB 介绍、数学实验与数学建模、常用经济应用模型。

相对于传统的本科数学教材内容来说,删减了线性代数中应用性不是很强的一些知识及理论推导,例如线性空间的概念与二次型问题,同时把线性规划问题融入到教材中去。弱化了概率论中的多元随机变量部分内容,只介绍了二元离散型随机变量分布的理解和应用,同时把顾客迁移理论、决策论、保险精算等相关经济管理学知识作为应用性问题融入到教材中去。考虑到学生后续课程会开设应用统计学,所以对数理统计部分也进行了适当的弱化,主要介绍了统计思想、统计基本概念以及基本的参数估计、假设检验及回归分析方法。教材最后适当地纳入了一些数学实验内容,主要包含了一些利用 MATLAB 和 Excel 软件去解决一些应用当中的数学计算问题。

由于编者水平有限,时间也有点仓促,其中一定存在不妥之处,希望同行及读者批评指正,使本书在教学实践当中不断完善。

编　者

2014 年 7 月

目　录

微积分的发展史 …… 1

第一部分　基础理论

第一章　函数与经济 …… 5
　§1.1　函数 …… 5
　§1.2　初等函数 …… 17
　§1.3　常用经济函数 …… 22
　§1.4　利息与贴现 …… 30
第二章　极限与连续 …… 34
　§2.1　数列的极限 …… 34
　§2.2　函数的极限 …… 38
　§2.3　极限运算 …… 45
　§2.4　两个重要极限 …… 49
　§2.5　无穷小的比较 …… 55
　§2.6　函数的连续性 …… 58
　§2.7　连续函数的性质 …… 64

第二部分　一元函数微分学

第三章　导数与微分 …… 71
　§3.1　导数的概念 …… 71
　§3.2　初等函数的导数 …… 81
　§3.3　隐函数的导数 …… 86
　§3.4　高阶导数 …… 89
　§3.5　微分 …… 91
第四章　导数与微分的应用 …… 97
　§4.1　边际与弹性 …… 97
　§4.2　洛必达法则 …… 104
　§4.3　函数形态分析 …… 109
　§4.4　函数的最优化 …… 122

第三部分 一元函数积分学

第五章 积分及计算 …… 131
§5.1 不定积分的概念与性质 …… 131
§5.2 换元积分法 …… 137
§5.3 分部积分法 …… 141
§5.4 定积分 …… 144
§5.5 定积分的性质及计算 …… 147
第六章 积分应用 …… 152
§6.1 定积分概念的深化 …… 152
§6.2 定积分的几何应用 …… 157
§6.3 积分的经济应用 …… 164
§6.4 微分方程 …… 172
§6.5 广义积分 …… 180

第四部分 多元函数微积分

第七章 二元函数微积分及应用 …… 185
§7.1 二元函数的极限和连续性 …… 185
§7.2 偏导数与全微分 …… 188
§7.3 偏导数与全微分的经济应用 …… 193
§7.4 二元函数的优化问题 …… 198
§7.5 二重积分 …… 207

附 录

附录1 常用数学公式 …… 218
附录2 习题参考答案 …… 222

主要参考文献 …… 237

微积分的发展史

微积分的产生是数学上的伟大创造.它从生产技术和理论科学的需要中产生,又反过来广泛影响着生产技术和科学的发展.如今,微积分已是广大科学工作者以及技术人员不可缺少的工具.

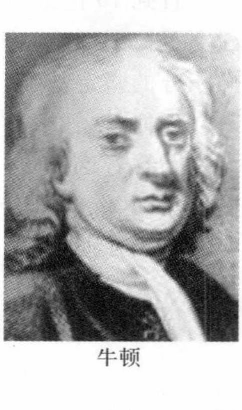
微积分是微分学和积分学的统称.微积分成为一门学科,是在17世纪.但是,微分和积分的思想在古代就已经产生了.

公元前3世纪,古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中,就隐含着近代积分学的思想.作为微分学基础的极限理论来说,早在古代就已有比较清楚的论述.比如,我国的庄周所著的《庄子》一书的"天下篇"中,记有"一尺之棰,日取其半,万世不竭".三国时期的刘徽在他的割圆术中提到:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣."这些都是朴素的、也是很典型的极限概念.

到了17世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素.归结起来,大约有四种主要类型的问题:第一类是研究运动的时候直接出现的,也就是求即时速度的问题.第二类是求曲线的切线的问题.第三类是求函数的最大值和最小值问题.第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力的问题.

17世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如法国的费尔玛、笛卡尔、罗伯瓦、笛沙格,英国的巴罗、瓦里士,德国的开普勒,意大利的卡瓦列利等人都提出了许多很有建树的理论,为微积分的创立做出了贡献.

17世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作,虽然这只是十分初步的工作.他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起:一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题).


牛顿

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量,因此这门学科早期也称为无穷小分析,这正是现代数学中分析学这一大分支名称的来源.牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑,莱布尼茨却是侧重于从几何学来考虑的.

牛顿在1671年写了《流数法和无穷级数》,这本书直到1736年才出版.他在这本书里指出,变量是由点、线、面的连续运动产生的,否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合.他把连续变量叫做

流动量，把这些流动量的导数叫做流数. 牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度(微分法)；已知运动的速度求给定时间内经过的路程(积分法).


莱布尼茨

德国的莱布尼茨是一个博才多学的学者，1684 年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字 ——《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》. 就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义，它已含有现代的微分符号和基本微分法则. 1686 年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献. 他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响. 现在我们使用的微积分通用符号“dx”和“$\int$”就是当时莱布尼茨精心选用的.

微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力.

前面已经提到，一门科学的创立绝不是某一个人的业绩，它必定是经过众多人的努力后，在积累了大量成果的基础上，最后由某个人或几个人总结完成的，微积分也是这样.

不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立. 英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百年.

其实，牛顿和莱布尼茨分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的. 比较特殊的是，牛顿创立微积分要比莱布尼茨早 10 年左右，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿早 3 年. 他们的研究各有长处，也都各有短处. 那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论竟从 1699 年始延续了一百多年.

应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的. 他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊. 牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的也不能自圆其说. 这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生.

直到 19 世纪初，法国科学学院以柯西为首的科学家，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成了微积分的坚定基础，才使微积分进一步地发展开来.

任何新兴的、具有无量前途的科学成就都吸引着广大的科学工作者. 在微积分的历史上也闪耀着这样的一些明星：瑞士的雅科布 · 贝努利和他的兄弟约翰 · 贝努利、欧拉，法国的拉格朗日、柯西 ……

欧氏几何也好，上古和中世纪的代数学也好，都是一种常量数学，微积分才是真正的变量数学，是数学中的大革命. 微积分是高等数学的主要分支，不只是局限在解决力学中的变速问题，它驰骋在近代和现代科学技术园地里，建立了数不清的丰功伟绩.

第一部分

基础理论

第一章　函数与经济

在我们的生活中，变化的量随处可见，例如温度、湿度、降雨量等.我们会发现这些变化的量随着时间、地域、季节的变化而变化.同样在经济领域中，这种变化的量也随处可见，例如国民收入、经济增长率、商品的产量、价格等.这些变化的量都有一个共同的特点，就是它之所以变化是因为受到其他一些变化的量的制约.例如，某种商品的需求量会受该商品的价格影响，它随价格的变化而变化.又如，银行的利率受到国家政策中多种因素的影响，所谓多种因素也是一些变化的量.这些变化的量之间相互制约的关系是普遍存在的，这种关系用数学的方法加以抽象与描述便得到一个重要的概念，就是函数.函数也是数学中非常重要的基本概念，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是经济学的主要研究对象之一，是我们定性、定量地研究各种变化的量的一个重要数学工具.

本章从讨论函数概念开始，通过对一般函数特性的概括，引进初等函数概念，并介绍经济学中常用的一些函数及其构建，为后续学习打下基础.

§1.1　函　数

一、集合

集合概念是数学中一个原始的概念，例如一个书柜中的书构成的集合，一个班级的学生构成的集合，全体实数的集合，等等.一般地说，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素.

通常用大写英文字母或拉丁字母表示集合，用其小写字母表示集合中的元素.事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$（读作 a 属于 M）；事物 a 不是集合 M 的元素，记作 $a \notin M$（读作 a 不属于 M）.

若认为一个集合已经给定，则对于任何事物都能判定它是否属于这个集合.因此要给定一个集合 M，实质上就是要给出一个判别法则，根据这个法则，对于任何事物 a 能判别 $a \in M$ 或 $a \notin M$ 两者究竟哪一个成立（两者中必有一个且只有一个成立）.

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示.例如，由元素 a_1，a_2，…，a_n 组成的集合 A，可记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下的记号表示：设 M 是具有某个特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x\,|\,x\text{ 所具有的特征}\}.$$

例如，平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体所组成的集合 M，可记作

$$M=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2=1\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径等于1的圆周上的点的全体所组成的集合.

全体实数组成的集合通常记作 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x\,|\,x\text{ 为实数}\}.$$

以后用到的集合主要是**数集**，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

若在一直线上（通常画水平直线）确定一点为原点，标以 O，指定一个方向为正方向（通常把指向右方为正方向），并规定一个单位长度，则称这样的直线为**数轴**. 任一实数都对应数轴上唯一的点，反之，数轴上每一点都唯一地表示一个实数. 正是由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系，所以在以下的叙述中，将把"实数 a"与"数轴上的点"两种说法看作有相同的含义，而不加以区别.

区间是用得较多的一类数集，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x\,|\,a<x<b\},$$

称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

数集

$$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},$$

称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$. 类似地可说明

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长为有限的线段（见图1-1）.

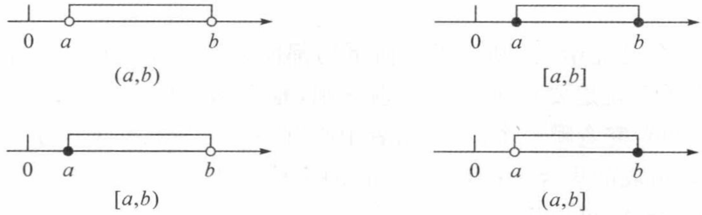


图 1-1

此外，还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作**正无穷大**）及 $-\infty$（读作**负无穷大**），则无限的半开或开区间表示如下：

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

数集 $[a,+\infty)$ 及 $(-\infty,b]$ 称为**无限的半开区间**，数集 $(a,+\infty)$ 及 $(-\infty,b)$ 称为**无限的开区间**. 它们在数轴上表示为长度为无限的半直线（见图 1-2）.

图 1-2

全体实数的集合 **R** 也记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

称为 a 的 δ **邻域**，记作 $\cup(a,\delta)$，即

$$\cup(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

点 a 叫做 $\cup(a,\delta)$ 的**中心**，δ 叫做 $\cup(a,\delta)$ 的**半径**. 因为 $|x-a|<\delta$ 相当于

$$-\delta<x-a<\delta \quad 即 \quad a-\delta<x<a+\delta,$$

所以

$$\cup(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$\cup(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（见图 1-3）.

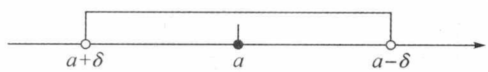


图 1-3

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此点 a 的 δ 邻域

$$\cup(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

在数轴上表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体，这正是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心邻域**，记作 $\mathring{\cup}(a,\delta)$，即

$$\mathring{\cup}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就是表示 $x\neq a$.

二、函数概念

在给出函数的定义之前，我们先看几个例子.

【例 1.1】 某种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 P 满足函数关系式

$$Q = 100 - 4P.$$

通过这个关系式，根据不同的价格 P 我们可以知道商品的市场需求量 Q. 例如，当商品价格 P 为 15 时，市场需求量 $Q = 100 - 4 \times 15 = 40$.

【例 1.2】 某厂生产一种产品的最大年产量为 100，年产量 Q 与该产品获得的利润 L 之间的关系由一条曲线来确定，如图 1-4 所示.

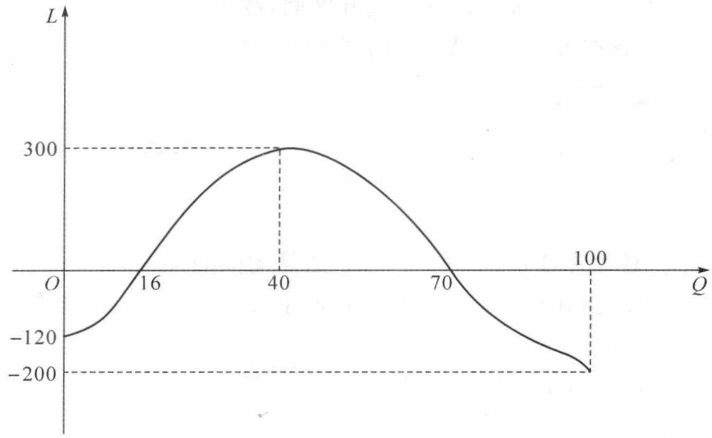


图 1-4

通过图形中的曲线我们可以知道不同产量时所得到的利润值. 如产量 Q 为 40 时可获得最大利润 L 为 300，不生产或是在最大产量时分别亏损 120 和 200，只有常量在 16 至 70 之间才能获得利润，其利润的多少可以从曲线的 L 坐标值去分析.

【例 1.3】 某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率，列表如下：

存期	三个月	六个月	一年	二年	三年	五年
年利率(%)	3.35	5.20	7.35	7.82	8.24	9.00

这张表格就确定了存期与年利率这两个变量之间的对应关系. 根据不同的存期就可以知道整存整取定期储蓄的年利率. 如存期是六个月的年利率为 5.20%，存期是 2 年的年利率为 7.82%.

可以发现上述三个例子具有如下共同特征：

(1) 都有两个变量，前者取值一经确定，后者的值随之确定. 每个变量都有相应的变化域. 第一个例题中商品价格 P 的变化域为 $(0,25]$，第二个例题中的产量 Q 的变化域为 $[0,100]$，而第三个例题中人民币存期的变化域为{三个月，六个月，一年，二年，三年，五年}.

(2) 两个变量都受一个对应规则约束，或者说两个变量按一定的规则对应. 如第一个例题中两个变量按一个关系对应，第二个例题中两个变量按一条曲线对应，第三个例题中两个变量按一个表格对应.

这些共同的特征所反映出的变量之间的对应关系就是函数，下面，我们给出函数的确切定义：

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集，若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值 x 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作：

$$y = f(x), x \in D.$$

其中，x 称为**自变量**；y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是使函数 $y = f(x)$ 有意义的自变量 x 的取值范围. 如果是实际问题的函数，我们一般取函数的实际定义域，也就是自变量的取值范围符合实际情况.

当 x 取值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$w = \{y | y = f(x), x \in D\},$$

称为函数的值域.

有关函数的几点解释：

（一）函数的两要素

由函数的定义可知，决定一个函数的因素有三个：定义域 D、对应法则 f 和值域 w，注意到每一个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定，于是只要给定 D 和 f，w 就相应地被确定了，从而 D 和 f 就是决定一个函数的两个要素. 正因为如此，函数一般记作

$$y = f(x), x \in D.$$

即只给出定义域 D 和对应法则 f，而没有写出值域 w.

由于定义域和对应法则是决定一个函数的两个要素，因此，在数学中两个函数相同是指它们的定义域和对应法则分别相同.

例如，函数 $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln|x|$ 是相同的函数，因为这两个函数的定义域都是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，根据对数的性质知 $\ln x^2 = 2\ln|x|$，即这两个函数的对应法则是相同的. 而函数 $f(x) = \ln x^2$ 与 $\varphi(x) = 2\ln x$ 是不同的函数，前者的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而后者的定义域为 $(0, +\infty)$.

（二）函数的单值性

函数定义中有“对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应”这样的描述，所以按照该定义的函数为**单值函数**. 如果定义中没有“唯一”这一限制，即某一变量 x 有不止一个 y 值与之对应，则称这样的函数为**多值函数**. 本书讨论的绝大多数函数为单值函数.

（三）函数的表示方法

函数的表示法一般有三种：**公式法**、**图示法**和**表格法**.

1. 公式法

公式法（又称解析法），就是用数学式子来表示两个变量之间的对应关系. 如例 1.1 就是用公式法表示函数的，在用公式法表示的函数中，有以下三种需要指明的情形：

（1）分段函数.

对于一个函数，在其定义域的不同部分用不同数学式来表达，称为**分段函数**.

例如，函数：

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -3<x<0\\ 3, & x=0\\ 2x-1, & 0<x\leqslant 5\end{cases},$$

就是分段函数，它的定义域是$(-3,5]$.

例如，函数：

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，这也是分段函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

(2) 显函数与隐函数.

若因变量 y 用自变量 x 的数学式直接表示出来，即等号一端只有 y，而另一端是 x 的解析式，这样的函数称为**显函数**.

例如，$y=\sin x$、$y=\sqrt{1-x^2}$ 都是显函数.

若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 来表示，则称为**隐函数**. 例如，$x^2+y^2=1$、$\sin(x+y)-e^{xy}=5$ 都是隐函数.

(3) 如果对于一个由公式法表示的函数 $y=f(x)$ 的定义域没有加以特殊限制，那么该函数的定义域就是使表达式有意义的所有 x 构成的集合，我们将这种定义域称为**自然定义域**，简称为定义域. 如果是实际问题的函数，我们一般取函数的**实际定义域**，也就是自变量的取值范围符合实际情况.

2. 图示法

图示法(又称图像法)，就是用平面坐标系中的曲线来表示两个变量之间的关系. 如例 1.2 中的函数.

3. 表格法

表格法(又称列表法)，就是将自变量的一些值与对应的函数值列成表格表示变量之间的对应关系. 如例 1.3 中的函数.

在函数的三种表示方法中，公式法是对函数的精确描述，它便于对函数进行理论分析与研究. 图示法是对函数的直观描述，通过图像可以清楚地看出函数的一些性质. 表格法常常是在实际应用问题中所采用的描述方法，这是因为在许多实际问题中，变量之间的对应关系常常难以用一个确定的数学公式表达出来.

【例 1.4】 求函数 $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

【解】 对于$\dfrac{1}{x+2}$，要求 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$；

对于 $\sqrt{4-x^2}$，要求 $4-x^2\geqslant 0$，从而得出 $-2\leqslant x\leqslant 2$；

因此，函数 $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是$(-2,2]$.

【例 1.5】 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域.

【解】 对于 $\ln(x-1)$，要求 $x-1>0$，即 $x>1$；