普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

陈殿友　术洪亮　编著

线性代数（第2版）

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

陈殿友　术洪亮　编著

线性代数（第2版）

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和方阵的对角化、二次型.

与本书配套的有习题课教材、电子教案. 该套教材汲取了当前教育改革中的一些成功举措, 总结了作者在教学、科研方面的研究成果, 注重数学在经济管理领域中的应用, 选用了大量有关的例题与习题; 具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进、结合实际等特点. 本书可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈殿友, 术洪亮编著. -- 2版. -- 北京: 清华大学出版社, 2014
(经济管理数学基础)
ISBN 978-7-302-34626-5

I. ①线…　II. ①陈…　②术…　III. ①线性代数-高等学校-教材　IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 290841 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：13.25　　**字　数**：233 千字
版　　次：2006 年 3 月第 1 版　2014 年 4 月第 2 版　**印　次**：2014 年 4 月第1 次印刷
印　　数：1～3500
定　　价：25.00 元

产品编号：053437-01

“经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”，具备了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大显身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）. 该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向21世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教

学方面积累的经验. 本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意体现时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，突出数学应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维. 总之，本系列教材体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，并使教材的系统性和文字简洁性相统一.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. “经济管理数学基础”系列教材中主教材基本在每节后面都配备了习题，每章后面配备了总习题，其中（A）题是体现教学基本要求的习题，（B）题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题的参考答案，供读者参考. 该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题. 每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还列出了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

自本教材问世以来，许多同行提出了许多宝贵的意见. 结合我们在吉林大学的教学实践经验，以及近年来大学数学课程教学改革的成果，我们对本系列教材进行了修订、完善. 本次修订的指导思想是：①突出数学理论方法的系统性和连贯性；②加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述；③文字力图简洁明了，删繁就简；④增加了实际应用例题和习题.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

“经济管理数学基础”系列教材编委会

2013 年 8 月

前　言

经济管理数学基础《线性代数》自 2006 年 3 月出版以来，受到了同行专家和广大读者的广泛关注，对本教材提出了许多宝贵的意见. 针对上述意见，结合我们在吉林大学的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要，我们对本教材进行了修订和完善.

根据本次修订的指导思想，考虑广大读者考研的需要，我们对第 1 章进行了较大的修改，用逆序数定义了行列式，以加强与考研大纲接轨. 重点修订了行文体例和文字叙述，增加了实际应用例题和习题.

本书修订工作第 1~4 章由陈殿友教授负责，第 5~6 章由术洪亮副教授完成，全书由陈殿友统稿. 书中带“*”号的章节，可供有需要的学生参考使用. 在本教材的修订过程中，得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 8 月

第 1 版前言

本书是依据经济类、管理类、人文类各专业对线性代数课程的教学要求而编写的. 在编写过程中，按照循序渐进的原则，深入浅出，从典型的自然科学与经济管理的实例出发，引出代数学的基本概念，如矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量等；再从理论上进行论证，得出代数学中的重要理论、方法和结果；然后再利用它们解决更多的自然科学和经济管理中的实际问题. 这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将线性代数和经济管理的有关内容有机地结合起来，为学生利用代数学的方法讨论更深层次的经济管理问题打下良好的基础.

在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，减少了一些抽象的理论推导，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高. 书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解之中，突出数学思想的介绍和数学方法的应用. 本书拓广了经济应用实例的范围，让学生全面地了解应用数学知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增强他们的应用意识，提高解决实际问题的能力.

本书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和方阵的对角化、二次型. 全书共分 6 章，第 1,2,3,4 章由陈殿友编写，第 5、6 章由术洪亮编写，全书由陈殿友统稿. 青年教师孙鹏、毛书欣、杨柳、任长宇和侯影及研究生姜政毅完成了本书的排版制图的全部工作. 清华大学居余马教授审阅了全书.

由于水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

作　者

2005 年 11 月

清华大学出版社　教学资源支持

尊敬的老师：您好!

为了您更好地开展教学工作，提高教学质量，我们将通过两种方式为您提供与教材配套的教学资源。

方式一：请您登录清华大学出版社教师服务网：http://www.wqbook.com/teacher 清华大学教师服务网是隶属于清华大学出版社数字出版网“文泉书局”的频道之一，将为各位老师提供高效便捷的免费索取样书、电子课件、申报教材选题意向、清华社各学科教材展示、试读等服务。

方式二：请您完整填写如下教辅申请表，加盖公章后传真给我们,我们将会为您提供与教材配套的教学资源。

<table>
<tr><td>主教材名</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>作者</td><td colspan="2"></td><td>ISBN</td><td></td></tr>
<tr><td>申请教辅资料</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>申请使用单位</td><td colspan="4">（学校）　（院系）
(课程名称)
（学期）采用本教材　册</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主讲教师</td><td>姓名</td><td></td><td>电话</td><td></td></tr>
<tr><td>通信地址</td><td colspan="2"></td><td>邮编　</td></tr>
<tr><td>e-mail</td><td></td><td>MSN/QQ</td><td></td></tr>
<tr><td>声明</td><td colspan="4">保证本材料只用于我校相关课程教学，不用本材料进行商业活动</td></tr>
<tr><td>您对本书的意见</td><td></td><td colspan="3">系/院主任：＿＿＿＿＿＿（签字）
（系 / 院办公室章）
＿＿年＿＿月＿＿日</td></tr>
</table>

编辑联系方式：　100084　北京市海淀区双清路学研大厦

`大学出版社理工分社　佟丽霞

：010-62770175-4156　邮箱：tonglx@tup.tsinghua.edu.cn

目　　录

第1章　行　列　式

在经济学及其他领域中, 线性代数是必不可少的基础理论之一, 它在研究离散变量之间的线性关系上有着重要的应用, 而行列式是研究线性代数的基础工具, 也是线性代数中的一个重要概念. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法, 进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　n 阶行列式的引出

在初等代数中, 曾用消元法求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为消去方程组 (1.1.1) 中的未知数 x_2, 以 a_{22} 与 a_{12} 分别依次乘以式 (1.1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端, 然后将两个方程相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组 (1.1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在式 (1.1.2) 中, 其各自的分母均由方程组 (1.1.1) 中未知数的系数构成, 把这 4 个系数按它们在方程组 (1.1.1) 中的位置, 排成两行两列 (横排称行, 竖排称列) 的数表, 即用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为**二阶行列式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.4}$$

其中 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} 称为二阶行列式的**元素**; 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为**列标**, 表明该元素位于第 j 列. 在式 (1.1.3) 中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的**值**(或展开式). 于是二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念, 式 (1.1.2) 中 x_1, x_2 的分子也可以写成二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式 (1.1.2) 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式为二元一次线性方程组的求解公式. 值得注意的是分母 D 是由方程组 (1.1.1) 的系数所确定的二阶行列式 (称为**系数行列式**), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1.1 *求解二元一次线性方程组*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -3, \\ 2x_1 + \ \ x_2 = -2. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

所以该方程组有解, 且

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3-4=-7, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6-(-6)=0.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{7} = 0.$$

类似地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}$$

表示的代数和式为 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, 称为三阶行列式的**值**(或称**三阶行列式的展开式**).

上述定义表明三阶行列式的值可按图 1.1 的“对角线法则”计算. 其遵循的规律为三条实线看作是平行于主对角线的连线, 实线上连结的三个元素的乘积取正号; 三条虚线看作是平行于副对角线的连线, 虚线上连结的三个元素的乘积取负号. 然后取这六项之和即为三阶行列式的值.

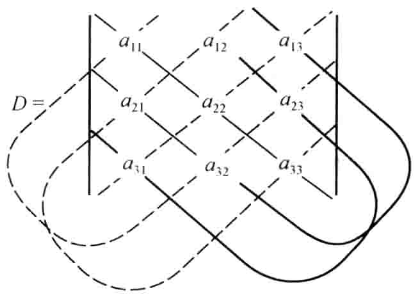

图 1.1

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可用对角线法则计算出 D_1, D_2, D_3 的值, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1.5) 的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.7}$$

例 1.1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　按照对角线法则, 得

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times 1+2\times(-3)\times(-2)+(-4)\times(-1)\times 2 \\ &\quad -(-4)\times 2\times(-2)-1\times(-3)\times 2-2\times(-1)\times 1 \\ &= 2+12+8-16+6+2=14. \end{aligned}$$

例 1.1.3　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解　方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6. \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$, 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

请读者注意, 对角线法则仅适用于二阶与三阶的行列式. 为研究四阶及更高阶的行列式, 先介绍 n 阶行列式的引出.

对于 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

也可类似二、三元的线性方程组引出的二、三阶行列式而引出 n 阶行列式. 式 (1.1.8) 的系数行列式记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.9}$$

若令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

那么, 我们若称方程组 (1.1.8) 的系数行列式 (1.1.9) 为 **n 阶行列式**, 则自然会提出以下几个问题: (1) $D=$? (2) 若 $D \neq 0$, 方程组 (1.1.8) 是否有唯一解? (3) 若方程组 (1.1.8) 有唯一解, 其求解公式是否是 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$? 关于这些问题, 我们将在本章结束之前, 给读者一个明确的回答.

为解决 n 阶行列式的计算问题, 我们先来介绍全排列和逆序数的有关知识, 然后给出 n 阶行列式的定义.

1.1.2 全排列及其逆序数

由 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 按照任何一种次序排成的有序数组 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 称为一个 n **级排列**, 例如 123, 132, 213, 231, 312, 321 都是不同的 3 级排列.

显然不重复的 n 级排列共有 $n!$ 个.

若规定由小到大为自然数间的标准顺序, 则在一个排列中, 当两个元素的顺序与标准顺序不同时, 就称产生了一个**逆序**. 一个 n 级排列所有逆序的总和称为该排列的**逆序数**. n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

由逆序数的定义可知, 标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 的逆序数为 0, 对于一般的 n 级排列, 逆序数可用如下的方法计算:

对于 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 自 j_1 开始直到 j_{n-1} 逐个计算每个元素的右边比它小的元素的个数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$, 则该排列的逆序数为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}.$$

例如 5 级排列 53421, 其逆序数为

$$\tau(53421) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9.$$