湖北省高职高专
规划教材
——应用数学系列

总主编
朱永银

◎ 主编　龚友运　肖业胜　廖红菊
◎ 主审　张业明

工程应用数学

（上册）

Gongcheng Yingyong Shuxue

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

湖北省高职高专规划教材——应用数学系列

总主编　朱永银

工程应用数学

（上册）

主　编　龚友运　肖业胜　廖红菊
主　审　张业明
副主编　万　武　孙旭东　王晓元
　　　　张汉萍　罗爱华

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

《工程应用数学》是“湖北省高职高专规划教材——应用数学系列”之一，分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续，导数及其应用，不定积分及其应用，定积分及其应用，多元函数的微积分及其应用，附录介绍了简易积分表；下册内容包括无穷级数，微分方程及其应用，拉普拉斯变换及其应用，傅里叶变换，矩阵代数及其应用，附录介绍了傅里叶变换简表、拉普拉斯变换简表. 每节后配有练习题，每章后配有综合练习题，并在书后附有参考答案.

本书是根据高职高专院校的培养目标，针对高职高专工科专业建设的需要及学生的实际状况编写的. 本书力求从实际案例引入概念，略去烦琐的理论论述，注重数学思想与方法的培养，强调数学知识的应用，顺应了高职高专教育的改革与发展，内容精要，简明易懂，适合作为高等职业技术学院及相当层次学校的工科类各专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

工程应用数学(上册)/龚友运　肖业胜　廖红菊　主编. —武汉：华中科技大学出版社，2010. 9
ISBN 978-7-5609-6393-8

Ⅰ. 工…　Ⅱ. ①龚…　②肖…　③廖…　Ⅲ. 工程数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 127682 号

工程应用数学(上册)　　龚友运　肖业胜　廖红菊　主编

策划编辑：徐正达
责任编辑：王汉江
封面设计：刘　卉
责任校对：张　琳
责任监印：熊庆玉
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：华中科技大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：9.5
字　　数：203 千字
版　　次：2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：32.50 元(上、下册)

前　言

为了推动我省高职高专数学课程教学改革、加强教材建设，湖北省数学学会高职高专数学研究会和华中科技大学出版社组织全省有较高学术水平和丰富教学经验的部分数学骨干教师，经过近两年的努力，编写了《湖北省高职高专规划教材——应用数学系列》. 本系列教材包括《工程应用数学》(上、下册)、《经济应用数学》、《计算机应用数学》等. 在编写过程中，我们力求做到以应用为目的，以"必需，够用"为原则，要求每章节尽量实行"案例(引例)驱动"，就是从实际问题出发，引出概念，并讲清概念，还注意到将数学建模思想渗透到教材中. 本系列教材适合于在高中阶段学过极限理论、导数与导数应用知识的大学生使用.

本系列教材由朱永银教授担任总主编，负责总策划，拟订编写大纲，并对全部教材进行统稿. 湖北职业技术学院夏俊炜副教授、咸宁职业技术学院副院长张业明副教授、武汉职业技术学院刘昌喜副教授担任主审，他们对本系列教材提出了宝贵的修改意见，编者不胜感激.

本册《工程应用数学》(上册)由龚友运、肖业胜、廖红菊担任主编，张业明担任主审，万武、孙旭东、王晓元、张汉萍、罗爱华担任副主编，参加编写的还有刘唯一、韩飞、余佑财、赫焕丽、陈大桥、范光、陈旭松等. 全书由龚友运和朱永银统稿.

本书第1章和第2章有"*"号的部分可以略讲，以学生自己看书为主，其他有"*"号的部分为选学内容。如果上、下两册有"*"号内容不讲或略讲，一个学期84学时可上完.

武汉职业技术学院、咸宁职业技术学院、湖北职业技术学院、仙桃职业学院、湖北轻工职业技术学院、恩施职业技术学院、沙市职业大学、湖北财税职业学院、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、十堰职业技术学院、荆州职业技术学院、鄂东职业技术学院、襄樊职业技术学院、武汉职业技术学院轻工学院、湖北开放职业学院等院校对本系列教材的顺利出版发行给予了大力支持，本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢.

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评意见，以便再版时修改，使本系列教材日臻完善.

编　者

2010年7月

目　录

第1章　函数、极限与连续

在自然科学、工程技术甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一．工程应用数学是用高等数学知识研究解决工程技术问题的一门基础学科，需要研究变数及变数间的依赖关系即函数关系，从而解决可以用函数形式表达的工程技术问题．而研究函数的主要工具是极限，它是学习高等数学的基础．本章在初等数学知识的基础上，介绍极限的定义、性质及其计算方法，然后介绍连续函数的概念和性质．

1.1　函数

函数是变量依存关系的数学模型，是研究客观世界变化规律的一个最基本、最重要的数学工具之一．在理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学、断裂力学、机械振动、机械设计基础、工程技术创新及研究人口的增长、金融市场的变化、国民经济的发展等多个学科领域都广泛地用到函数．

1.1.1　函数

引例1　自由落体运动的距离 s 与时间 t 的关系．

以自由落体运动为例，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s，假定开始下落的时刻 $t=0$，那么距离 s 与时间 t 的关系式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \qquad ①$$

其中 g 为重力加速度．

引例2　圆的内接正 n 边形的面积．

设圆的半径为 R，那么圆的内接正 n 边形面积 A 与 R 之间的关系式为

$$A=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}. \qquad ②$$

引例3　熔断体（保险丝）直径与熔断电流的关系．

常见熔断器的熔断体（俗称保险丝，材料为铅锡合金），其熔断电流 I 与熔断体直径 d 之间的关系如表1-1所示．

对于一个确定的熔断体直径，就有一个确定的熔断电流值与之对应．例如，当 $d=1.83$ mm 时，$I=19.0$ A．

在工程技术、生产、生活中，类似于上述引例的问题还可以举出很多。像这样一

表 1-1

直径 d /mm	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26
熔断电流 I/A	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0	18.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

个变量取定了一个数值,按照某种确定的对应关系,可以求得另一个变量的一个相应的值的问题,就是函数关系.下面介绍函数及其相关概念.

1. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 为两个变量,D 为一个给定的数集,如果对于每一个 $x\in D$,按照一定的法则 f,变量 y 总有唯一确定的数值与之对应,就称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$.数集 D 称为该函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,依法则 f 的对应值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值,并记为 $f(x_0)$.所有函数值组成的集合 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

在函数的定义中,并没有要求自变量变化时函数值一定要变化,只要对于自变量 $x\in D$,都有确定的 $y\in W$ 与之对应.因此,常量 $y=C$ 也符合函数的定义,因为当 $x\in D$ 时,所对应的 y 值都是确定的常数 C.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值都只有一个,这种函数称为单值函数,否则称为多值函数.以后凡是没有特别说明的,函数都是指单值函数.

设 δ 是一正数,a 为某一实数,把数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$.点 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径.$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域.

2. 分段函数

有些函数,对于定义域内自变量 x 取不同的值,不能用一个解析式表示,而要用两个及两个以上的式子表示,这类函数称为分段函数.下面举例说明.

例 1 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数.

例 2 取整函数 $y=[x]$,其值为不超过 x 的最大整数,定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\mathbf{Z}$.如 $[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$.

例 3 设 $y=f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\leqslant x\leqslant 2),\\ x^2 & (x>2),\end{cases}$ 求它的定义域和 $f(1)$,$f(3)$,$f(x-1)$.

解 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,2]\cup(2,+\infty)=[0,+\infty)$,则

$$f(1)=1+2=3;\quad f(3)=3^2=9;$$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & (0\leqslant x-1\leqslant 2),\\ (x-1)^2 & (x-1>2),\end{cases}\quad 即\quad f(x-1)=\begin{cases}x+1 & (1\leqslant x\leqslant 3),\\ (x-1)^2 & (x>3).\end{cases}$$

3. 函数关系的建立

如前所述，大量的实际问题都可用函数的知识去研究，而首先要解决的问题是将工程技术、生产、生活中的问题用函数的方法表示出来，即要正确地建立起变量之间的函数关系．这样的实例很多，下面举例说明．

例 4 销售价与销售量间的关系．

某商店销售一种商品，当销售量 x 不超过 30 件时，单价为 a 元，若超过 30 件时，其超出部分按原价的 90%计算，试求销售价 y 与销售量 x 之间的函数关系式．

解 由题意知，销售量为 x，销售价为 y．

当 $0\leqslant x\leqslant 30$ 时，$y=xa$．

当 $x>30$ 时，$y=30a+(x-30)\times a\times 90\%$．

综上所述，
$$y=\begin{cases} ax & (0\leqslant x\leqslant 30), \\ 0.9ax+3a & (x>30). \end{cases}$$

例 5 无盖圆柱形锅炉的总造价．

某工厂要生产一个容积为 50 m^3 的无盖圆柱形锅炉，锅炉底材料造价为周围材料造价的两倍，并知周围材料造价为 k 元/m^2，试求总造价 S 与锅炉底半径 r 的函数关系式．

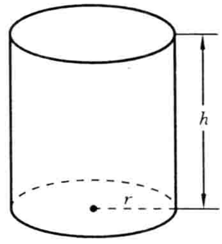

图 1-1

解 因为无盖圆柱形锅炉容积 $V=50\ \mathrm{m}^3$，设锅炉的高为 h（见图 1-1），则有 $V=\pi r^2 h=50$，从而有 $h=\dfrac{50}{\pi r^2}$．

已知锅炉底部材料造价为周围材料造价的两倍，而周围材料造价为 k 元/m^2，则底部材料造价为 $2k$ 元/m^2，根据圆面积及圆柱侧面积公式知，其总造价为

$$S=2\pi r^2 k+2\pi rhk=2\pi r^2 k+2\pi r\cdot\frac{50}{\pi r^2}k,\quad 即\quad S=\left(2\pi r^2+\frac{100}{r}\right)k,$$

这就是总造价 S 与锅炉底半径 r 的函数关系式．

4. 函数的几种特性

1）奇偶性

定义 2 给定函数 $y=f(x)$（$x\in D$，D 为对称区间），如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数．

2）单调性

定义 3 如果函数 $y=f(x)$对区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加（或单调减少）的．

3）周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$，若存在正数 T 使得 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此

函数为周期函数，满足这个等式的最小正数 T 称为函数的最小正周期，也称为周期.

4) 有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，对任意的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界，如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

1.1.2 基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）的函数称为幂函数.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$ 的函数称为指数函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，得到以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数记为 $y=\log_a x$（a 为常数，$a>0, a\neq1$），称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=\mathrm{e}$ 时，函数记作 $y=\ln x$，称为自然对数.

4. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) 余弦函数 $y=\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) 正切函数 $y=\tan x \quad \left(x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$；

(4) 余切函数 $y=\cot x \quad (x\neq n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$；

(3) 反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

除了常用的基本初等函数，在工程技术等应用领域，常出现自然指数函数及其一些特定组合的函数，给它们以专门的记号. 这些函数与双曲线的几何关系及三角函数与圆的关系很相似，称为双曲函数. 双曲函数主要有以下几种.

(1) 双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

(2) 双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

(3) 双曲正切　$\mathrm{th}x=\tanh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;

(4) 双曲余切　$\mathrm{cth}x=\coth x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$.

1.1.3　复合函数

在实际问题中,常常会遇到由几个较为简单的函数组成较为复杂的函数.下面举例说明.

例 6　自由下落的物体,其动能 E 与速度 v 的关系为 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$,其中 m 为物体的质量.由于速度 v 与时间 t 的关系为 $v=gt$,从两式中消去 v 得到 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$,这样物体动能 E 就成为时间 t 的函数. 函数 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$ 称为由函数 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ 和函数 $v=gt$ 复合而成的函数.

定义 6　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(x)$ 的定义域的交集非空. 那么,y 通过中间变量 u 的联系变成 x 的函数,把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

例 7　已知 $y=\ln u$,$u=x^2$,试把 y 表示为 x 的函数.

解　$y=\ln u=\ln x^2$,$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 8　设 $y=u^2$,$u=\tan v$,$v=\dfrac{x}{2}$,试把 y 表示为 x 的函数.

解　$y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

由复合函数的概念知,一个复合函数可以看成由几个简单函数复合而成,简单函数是指由常量与基本初等函数经过四则运算而得到的函数,这样就便于对函数进行研究.

例 9　指出下列函数 $y=e^{\sin x}$ 的复合过程:

解　令 $u=\sin x$,则 $y=e^u$,故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.复合函数的中间变量可以有两个或两个以上.

例 10　指出下列函数 $y=\tan^2(2\ln x+1)$ 的复合过程:

解　令 $u=\tan(2\ln x+1)$,则 $y=u^2$,再令 $v=2\ln x+1$,则 $u=\tan v$,故 $y=\tan^2(2\ln x+1)$ 是由 $y=u^2$,$u=\tan v$,$v=2\ln x+1$ 复合而成的.

1.1.4　初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次函数的复合后所得到的能用一个解析式表达的函数,称为初等函数.例如,$y=\sqrt{1+x}$,$y=\sqrt{1-2^x}$,$y=\sin^2 x$,y

$=\tan(\ln x)^2$，$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$等都是初等函数.

本课程讨论的主要是初等函数.

练　习　1.1

1. 设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，计算 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(-3)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} 2+x, & x<0, \\ 2^x, & 0\leqslant x<1, \\ \sqrt{x^2+1}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$.

3. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=(2x+1)^{10}$；　(2) $y=\ln(x+5)$；　(3) $y=\sin^3(x-1)$；

(4) $y=\lg_a \sin 2^{x-1}$；　(5) $y=\ln(\ln x)$；　(6) $y=\mathrm{arccot}\sqrt{e^{2x-1}}$.

4. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

5. 证明下列等式.

(1) $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$；　(2) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$.

6. 有一块边长为 a 的正方形铁皮，将它的四角剪去大小相等的小正方形，做成一个无盖的盒子，求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

7. 拟建一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形，如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 3 倍，试将总造价表示成底边长的函数，并确定定义域.

8. 设公共汽车从甲站出发，以 0.5 m/s^2 的加速度前进，经过 20 s 后开始匀速行驶，再经过 4 min 后以 -0.5 m/s^2 的加速度匀减速到达乙站，试将汽车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数关系.

1.2　函数的极限

极限是工程应用数学中的重要的基本概念之一，在几何、物理、工程技术等实际问题中常常用到，它的思想方法萌芽于古代. 微积分中的许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和法则也是通过极限方法推得的. 因此，掌握极限的概念、性质和计算方法是学好工程应用数学的前提和基础.

案例 1　刘徽的割圆术.

公元 263 年，我国魏晋时期的数学家刘徽借助圆内接正多边形的周长，得出圆的周长为 $2\pi r$，割圆过程如图 1-2 所示. 刘徽在叙述这种作法时说：“割之弥细，所失弥少，割之又割？以至不可割，则与圆周合体而无所失矣.”

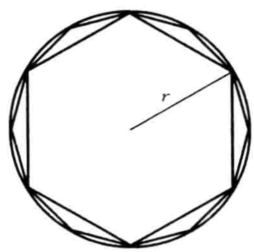

图 1-2

案例 2　水温的变化趋势.

将一盆 90 ℃的热水放在一间室温恒为 15 ℃的房间中，水温 T 将逐渐降低，随着时间 t 的推移，水温会越来越接近室温 15 ℃.

1.2.1　数列的极限

1. 数列

一个定义在正整数集上的函数 $y=f(n)$（或记为 $x_n=f(n)$）称为整标函数，当自变量 n 按正整数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 依次增大的顺序取值时，所得的一串有序函数值 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$ 称为数列. 数列中的每一个数叫数列的项，$f(n)$ 称为数列的通项.

2. 数列的极限

例 1　战国时期的哲学家庄周所著《庄子 · 天下篇》中有一段话"一尺之棰，日取其半，万世不竭". 事实上，木棒每日的剩余量组成数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.\ (n \text{ 表示天数})$$

当天数 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的值无限接近于常数 0.

例 2　已知数列 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$，当项数 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的值无限接近于常数 1.

定义 1　当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为这个数列的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，读作"当 n 趋于无穷大时，a_n 的极限等于 A". 符号"→"表示"趋于"，"∞"表示"无穷大"，"$n\to\infty$"表示"n 无限增大". $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 有时也读作：当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

若数列 $\{a_n\}$ 存在极限，也称数列 $\{a_n\}$ 收敛；若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

根据定义有：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

1.2.2　函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考虑定义在无限区间上的函数 $f(x)$，当 $|x|$ 无限增大时的极限. 所谓 $|x|$ 无限增大，实际上包括三种情况：$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$（$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$）.

例 3　讨论函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势.

解 作出函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 的图形,如图 1-3 所示. 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时,$y=\frac{1}{x}+1\to1$,因此当 $x\to\infty$ 时,$y=\frac{1}{x}+1\to1$.

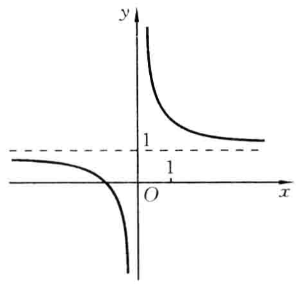

图 1-3

定义 2 如果在 $|x|$ 无限增大(即 $x\to\infty$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ (当 $x\to\infty$). 例如,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

类似地,还可以有当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数极限的定义.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 3 假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右邻域内有定义,当 x 趋于定值 x_0,即 $x\to x_0$(x 可以不等于 x_0)时,函数 $f(x)$ 的值无限接近确定的常数 A,那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to x_0$).

例如,当 $x\to3$ 时,函数 $f(x)=\frac{x}{3}+1$ 的极限是 2,记为

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\left(\frac{x}{3}+1\right)=2.$$

例 5 考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0}C$(C 为常数)和 $\lim\limits_{x\to x_0}x$.

解 设 $f(x)=C,\varphi(x)=x$.

因为当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的值恒等于 C,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$;

因为当 $x\to x_0$ 时,$\varphi(x)=x$ 无限接近于 x_0,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

当 $x<x_0$ 且 $x\to x_0$ 时,记为 $x\to x_0^-$;

当 $x>x_0$ 且 $x\to x_0$ 时,记为 $x\to x_0^+$.

3. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限与右极限

定义 4 如果当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0+0) = A.$$

一般地，函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是函数 $f(x)$ 的左、右极限都存在且都等于 A，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 6 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x+1 & (x>0) \end{cases}$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

解 函数 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时的左极限为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1) = -1$，右极限为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = 1$. 由于当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限与右极限都存在但不相等，所以极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 7 已知 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，判断极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在.

解 当 $x>0$ 时，$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$；当 $x<0$ 时，$f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$，所以函数可以分段表示为 $f(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ 于是 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$，即 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

1.2.3 极限的运算法则

设 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

(3) 当 $B \neq 0$ 时，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

当 C 是常数时，常数因子可以提到极限符号外面，即 $\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$.

例 8 求：(1) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+2x-3)$； (2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$； (3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+3n+4}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}(x^2+2x-3) &= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 3 = (\lim_{x \to 2} x)^2 + 2\lim_{x \to 2} x - 3 \\ &= 2 \times 2 + 2 \times 2 - 3 = 5.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+3n+4} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+2/n+1/n^2}{2+3/n+4/n^2} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty}(1+2/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n \to \infty}(2+3/n+4/n^2)} = \dfrac{1}{2}$.

一般地，设 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$，m，n 为自然数，对于分式函数，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}a_0/b_0, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

1.2.4 两个重要极限

1. 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

取 x 的一些值,计算出$\frac{\sin x}{x}$的对应值并列于表 1-2 中.

表 1-2

x/rad	0.50	0.10	0.05	0.04	0.03	0.02	…
$\sin x/x$	0.9585	0.9983	0.9996	0.9997	0.9998	0.9999	…

观察当 $x\to 0$ 时函数$\frac{\sin x}{x}$的变化趋势,可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$;同理可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$,所以有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例 9 求:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\overset{\text{令 }3x=t}{=\!=\!=}3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3.$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{2(x/2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot\frac{\sin x/2}{x/2}=\frac{1}{2}.$$

2. 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

取 x 的一些值,计算出$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的对应值并列于表 1-3 中.

表 1-3

x	1	2	10	1000	10000	100000	…
$(1+1/x)^x$	2	2.25	2.594	2.717	2.7181	2.71828	…

观察当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数的变化趋势:当 x 取正值并无限增大时,$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是逐渐增大的,但是不论 x 如何大,$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值总不会超过 3. 实际上,如果 x 继续增大,即当 $x\to+\infty$时,可以证明$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是接近于一个确定的无理数 e