新世纪

新世纪高职高专
基础类课程规划教材

高等应用数学简明教程

GAODENG YINGYONG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

（下）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主编 瞿正良

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

新世纪高职高专
基础类课程规划教材

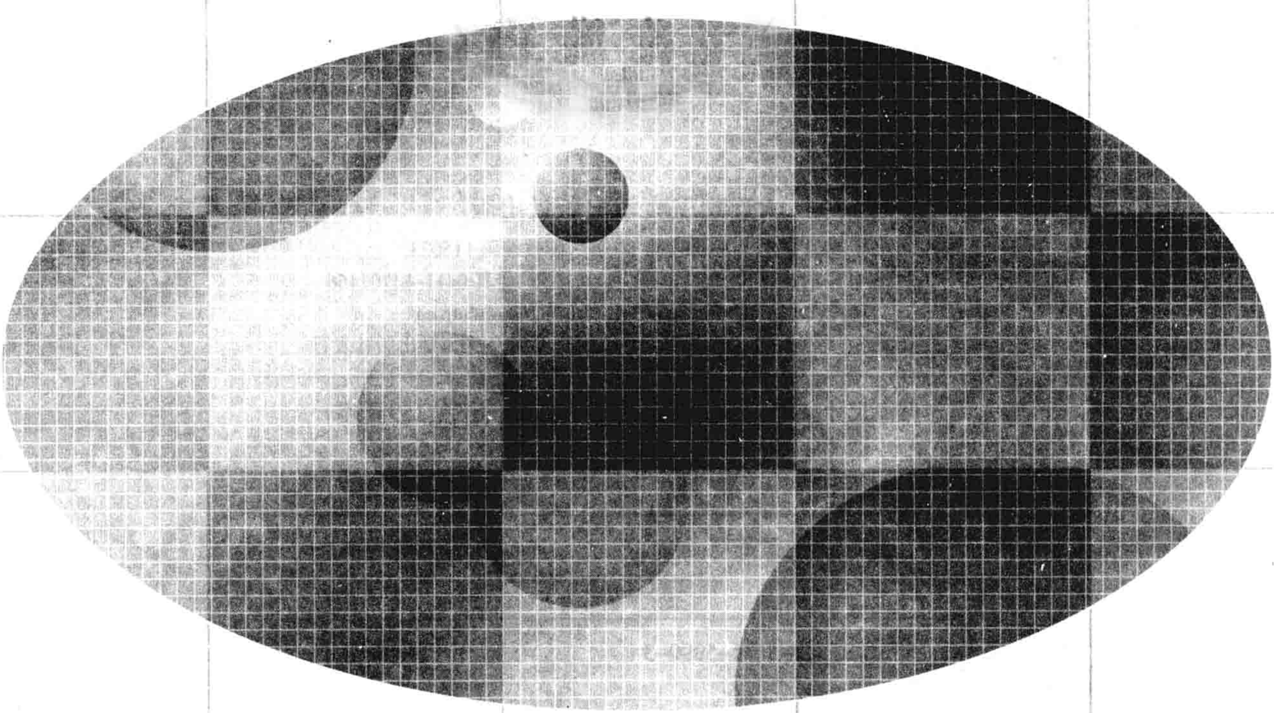
新世纪

高等应用数学简明教程

GAODENG YINGYONG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

（下）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 瞿正良
副主编 袁 生 莫晓琤
杨瑞玲 马廷强



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学简明教程. 下 / 瞿正良主编. — 大连：大连理工大学出版社，2011. 1

新世纪高职高专基础类课程规划教材

ISBN 978-7-5611-5990-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①瞿… Ⅲ. ①应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 004174 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7　字数:159 千字

印数:1~3000

2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑:欧阳碧蕾　责任校对:周双双

封面设计:张　莹

ISBN 978-7-5611-5990-3　定　价:15.00 元

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代,我们已经跨入了 21 世纪的门槛.

20 世纪与 21 世纪之交的中国,高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命,我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试.

20 世纪最后的几年里,高等职业教育的迅速崛起,是影响高等教育体制变革的一件大事.在短短的几年时间里,普通中专教育、普通高专教育全面转轨,以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步,其来势之迅猛,发人深省.

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育,还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育,都向我们提出了一个同样的严肃问题:中国的高等教育为谁服务,是为教育发展自身,还是为包括教育在内的大千社会?答案肯定而且唯一,那就是教育也置身其中的现实社会.

由此又引发出高等教育的目的问题.既然教育必须服务于社会,它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程.换言之,教育资源必须按照社会划分的各个专业(行业)领域(岗位群)的需要实施配置,这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题,这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题.

众所周知,整个社会由其发展所需要的不同部门构成,包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门,等等.每一个部门又可作更为具体的划分,直至同它所需要的各种专门人才相对应.教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标,就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命,而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑(在市场经济条件下尤其如此).可以断言,按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才,是教育体制变革的终极目的.

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论. 但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型（也是一种特殊应用）人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径.

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征. 它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程. 作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日. 从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基.

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的（同时也正处在变革分化过程中的）研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力. 新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体.

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律.

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势.

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任.

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

《高等应用数学简明教程》(下)是新世纪高职高专教材编审委员会组编的基础类课程规划教材之一.

《高等应用数学简明教程》分上、下两册.上册包括:函数、极限和连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用;下册包括:矢量代数初步、线性代数(行列式、矩阵、线性方程组)、概率论(随机事件概率、随机变量数字特征).

与同类教材相比,本教材主要突出以下特点:

1. 本教材在内容编排上以培养人才为目标,凸显实用性,依据"以够用为度"原则削弱理论证明,简化论证过程,便于学生理解.这一点在本教材概率论部分得到了充分体现,以贴近生产生活的概率问题为例进行讲解,解法简单明了.

2. 本教材重点突出,结构合理.在矢量代数初步章节,本教材重点讲解矢量概念,针对实际应用举例,使学生学会运用矢量知识分析问题和解决问题的方法.本教材线性代数部分以线性方程组的求解问题为核心,先引入行列式和矩阵的知识,再讲解一般线性方程组的求解方法.这样,既帮助学生明确学习思路,理清知识脉络突出重点,又培养了他们运用所学知识解决问题的能力.

3. 本教材在每章开头部分列出了"学习要点"和"重点内容",目的是帮助学生在自学时做到"心中有数",教师在授课时做到"有的放矢".这样,既加强了学生的学习积极性,又增强了教师的教学目的性.

本教材由瞿正良担任主编,袁生、莫晓琤、杨瑞玲、马廷强担任副主编.朱玲梅、王红丽、庞元玉、辛桂凤、方云东、李佐、陈爱萍、伍桂花等参与编写.本教材由瞿正良负责统稿和审阅.

限于时间和编者水平，书中难免存在不足之处，且由于角度不同，各人对书中涉及知识点的认同一定有所出入，恳请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正.

所有意见和建议请发往：dutpgz@163.com
欢迎访问我们的网站：http://www.dutpgz.cn
联系电话：0411－84707492　84706104

编　者

2011年1月

目　　录

第1章

矢量代数初步

学习要点

(1)理解并掌握标量与矢量的概论.

(2)掌握矢量加(减)法的平行四边形法则和三角形法则.

(3)掌握矢量在矢量式或坐标式表示下的运算法则.

(4)掌握矢量的模、方向余弦和方向角的计算.

重点内容

矢量的概念、矢量的运算法则、矢量模、方向余弦和方向角的计算.

1.1 矢量与运算法则

矢量在数学、物理、力学及其他学科中都有着十分广泛的应用.因此,学习一点矢量代数知识是非常必要的.

1.1.1 标量与矢量

我们在生活中,常会听到这样类似的说法:

一个盒子的体积是12立方厘米;

王老师的住房面积是88平方米;

某同学18岁;

2010年在南非举办了足球世界杯赛.

在这些例子中,体积大小、面积大小、年份等均是数字.我们用数字来表示量.这样的量称作数量或标量.又比如:

某同学从甲地到乙地沿直线移动了300米;

向前用了50公斤的力;

向后的拉力是150公斤;

飞机在飞行中常常会受到风力、引力、重力、牵引力等力的作用.

在这些例子中,位移、拉力、风力、重力、引力、还有速度和加速度等是用数与方向来表示量,这样的量称作矢量或向量.

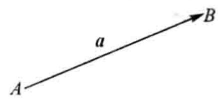


图 1-1

矢量常用一条有向线段来表示. 线段的长度表示矢量的大小,线段的方向表示矢量的方向,并用箭头表示. 起点是 A,终点是 B 的矢量,记作$\overrightarrow{AB}$. 矢量亦可用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示,如图 1-1. 也可以在普通字母上加"$\rightarrow$"表示,如 $\vec{a}$.

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称作矢量的模,记作 $|\boldsymbol{a}|$. 特别,模等于 1 的矢量,称作单位矢量. 模等于零的矢量,称作零矢量,记作 $\mathbf{0}$. 规定零矢量的方向是任意的.

定义 1 如果两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,方向相同(两个矢量平行或共线且有同指向),称作两个矢量相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 矢量相等的两个条件缺一不可,否则,两矢量是不相等的,记作 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 因此,某同学沿直线从甲地 A 到乙地 B,与该同学从乙地 B 到甲地 A,虽然模 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$,但方向是不相同的,因此,$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$.

根据矢量相等的定义,我们可以将一个矢量平行移动,使得移动后的矢量和原矢量相等. 比如我们作一条直线 L,如图 1-2 中矢量 $\boldsymbol{a}$ 平移而得到的所有有向线段表示的矢量都是相等的矢量.

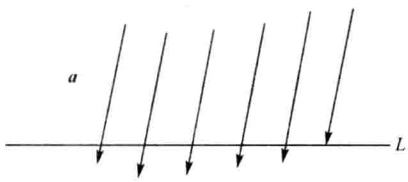


图 1-2

这样一来,矢量的起点可以放在平面(或空间)的任何一点处. 不考虑起点位置的矢量,称作自由矢量. 本章只学习自由矢量. 简称矢量.

定义 2 如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,但方向相反,则称矢量 $\boldsymbol{b}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量,记作 $-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,同样 $\boldsymbol{a}$ 亦是 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

作为定义 2 的一个应用,我们来看下例:

【例 1】 将雨伞挂在桌子边上 A 点处(图 1-3),只有当雨伞倾斜到一定位置时,雨伞才保持平衡,这时桌面给雨伞的支撑力 $\boldsymbol{F}$ 应恰等于伞的重力 $\boldsymbol{w}$,且 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 位于同一铅垂线上,显然,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 大小相等,方向相反,$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{w}$ 或 $\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{F}$.

【例 2】 当重物静止的挂在起重机上时(图 1-4),吊绳保持铅垂,吊绳给重物的拉力 $\boldsymbol{T}$ 应与重物的重力 $\boldsymbol{P}$ 大小相等,方向相反且 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 两力位于同一铅垂线上,即 $\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{P}$ 或$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{T}$.

由此,证明了力学的一个普遍规律:一个物体若只受二力作用处于平衡,则这二力必大小相等,沿同一直线而方向相反——二力平衡条件.

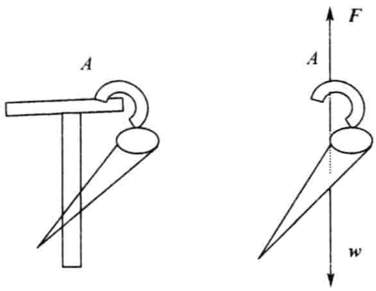


图 1-3

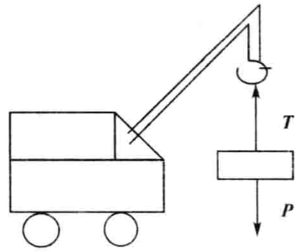


图 1-4

1.1.2　矢量的运算

1. 矢量的加法

设有两矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，若以这两矢量为邻边作平行四边形，则其对角线矢量$\overrightarrow{OC}$称作矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的和，如图 1-5，记作$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$. 如此定义两矢量之和的方法称作平行四边形法则.

根据平行四边形的性质和两个矢量相等的定义，由图 1-5 知，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$，即$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}$，如此求两矢量和的方法称作三角形法则.

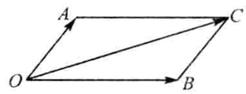


图 1-5

对于矢量的加法，存在以下特殊情况：

如果设两个非零矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$共线于L，则有下列两种情况：

(1)若矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$同向，则和矢量$\overrightarrow{OC}$的方向与原来两矢量同向，而模等于原来两矢量模之和，即$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$. 如图 1-6.

图 1-6

(2)若矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$反向，则和矢量$\overrightarrow{OC}$的方向与模较大的矢量$\overrightarrow{OB}$的方向相同，而模等于两矢量模之差，即$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|-|\overrightarrow{OA}|$. 如图 1-7.

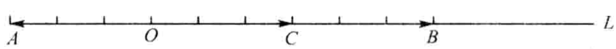


图 1-7

作为练习. 如图 1-8 有五个力平行四边形，在各图形中哪些力 $\boldsymbol{R}$ 是对应 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 两力的合力？如果不是，试画出正确的合力 $\boldsymbol{R}$，设各力的作用点都在 A 点. 请同学们自行完成.

矢量加法有下列运算律：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　(交换律)

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　(结合律)

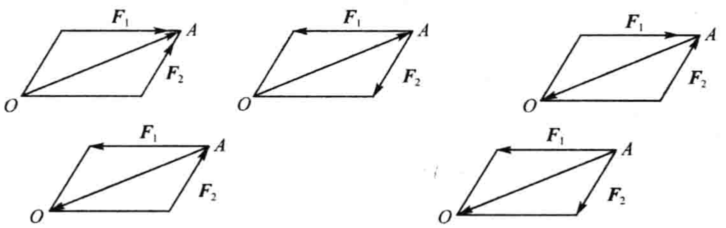


图 1-8

2. 矢量的减法

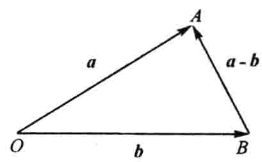


图 1-9

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 也就是说，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 之差，就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量 $-\boldsymbol{b}$ 之和. 由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 的矢量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 1-9.

3. 矢量的数乘

设 λ 是一常数，λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$，简称矢量的数乘，我们规定

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是同向的矢量，且模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即零向量.

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是反向的矢量，且模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$.

例如：在 $\lambda=2,\dfrac{1}{2}$ 和 -2 时，其图形如图 1-10.

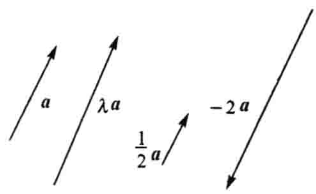


图 1-10

由矢量的数乘，不难有如下结论：两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是：

$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\ (\lambda\neq0)$，或存在不全为零的数 λ_1 和 λ_2，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{a}$ 是一非零矢量，特别有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

而

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 是与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量.

矢量数乘有下列的运算律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ （结合律）

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ （分配律）

【例 3】 已知平行四边形 $ABCD$，若记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，对角线 AC 和 BD 的交点为 M. 如图 1-11，试用矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解 由于平行四边形对角线互相平分，由矢量加法，得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MA}$$

所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

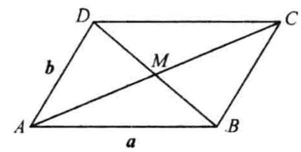


图 1-11

又由矢量减法，得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{DM}$$

所以

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

习题 1.1

1. 应用三角形法则，验证：$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

3. 已知长方形 $ABCD$ 如图 1-12，若记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{DM},\overrightarrow{MA}$.

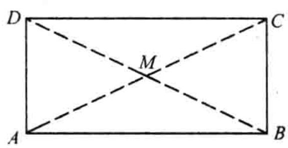


图 1-12

1.2　矢量的坐标与方向余弦

在上节中，我们规定用“有向线段”来表示相应的矢量. 在进行矢量运算时，用的是几何方法. 为了便于应用和运算，特引进矢量的坐标及分解式.

1.2.1　矢量的投影

若知空间一点 A 及一轴 u，如图 1-13 过点 A 作与轴 u 垂直的一平面 π，把平面 π 与轴 u 的交点 A_1，称作 A 点在轴 u 上的投影. 又设 $\overrightarrow{AB}$ 为已知矢量，在轴 u 上起点 A 和终点 B 的投影分别为 A_1 和 B_1，则有向线段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的数值 A_1B_1 称作矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影. 记作 $\mathrm{Prju}\,\overrightarrow{AB}=A_1B_1$.

矢量的投影有如下性质：

定理 1　非零矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于矢量的模乘以轴 u 和矢量的夹角 θ 的余弦. 即

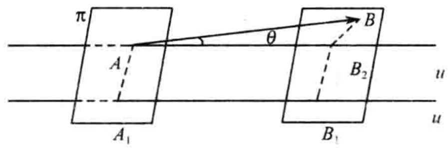


图 1-13

$$\text{Prju}\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta\,.$$

$$\text{如果}\begin{cases} 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}\ \text{时}, \text{Prju}\,\overrightarrow{AB} > 0, \text{即 } A_1B_1 > 0; \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\ \text{时}, \text{Prju}\,\overrightarrow{AB} = 0, \text{即 } A_1B_1 = 0; \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi\ \text{时}, \text{Prju}\,\overrightarrow{AB} < 0, \text{即 } A_1B_1 < 0. \end{cases}$$

显见，相等矢量在同一轴上的投影是相等的，即若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 Prju $\overrightarrow{AD}$=Prju $\overrightarrow{CD}$.

定理 2 有限个矢量之和在轴 u 上的投影等于各个矢量在该轴上投影之和. 即

$$\text{Prju}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \text{Prju}\boldsymbol{a}_1 + \text{Prju}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \text{Prju}\boldsymbol{a}_n.$$

1.2.2 矢量的坐标分解式

设一矢量$\overrightarrow{OM}$(又称矢径)的起点是直角坐标系的原点 O，终点 M 的坐标为：$M(x,y,z)$，由图 1-14 知$|\overrightarrow{OA}|=x$，$|\overrightarrow{OB}|=y$，$|\overrightarrow{OC}|=z$ 是矢量$\overrightarrow{OM}$分别在 x,y,z 轴上的投影，亦称作矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标，记作$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$.

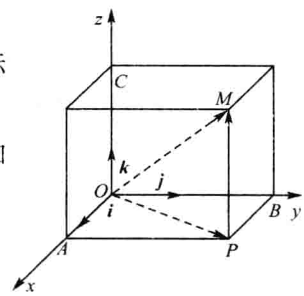


图 1-14

若在 x 轴，y 轴和 z 轴上，以原点为起点分别取三个与坐标轴同向的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$.

设点 P 是点 $M(x,y,z)$ 在平面 xOy 上的投影，由矢量加法得，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

由矢量相等，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$；得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

即矢量$\overrightarrow{OM}$可表示为三矢量之和：

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

我们把矢量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$称作矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标上的分矢量. 亦称作矢量$\overrightarrow{OM}$的分解式. 显见，我们必须注意矢量的分解式与矢量的坐标是不同的概念.

现在，我们利用矢量的分解式或坐标式来进行矢量的加、减和数乘运算就方便多了.

(1)若矢量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\{a_1,a_2,a_3\}$

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}=\{b_1,b_2,b_3\}$$

则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1)\boldsymbol{i}+(a_2\pm b_2)\boldsymbol{j}+(a_3\pm b_3)\boldsymbol{k}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\}$$

(2)数乘 λ：如

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$$

请看下面例子：

【例 1】 已知$\overrightarrow{OA}=\{3,4,5\}$，$\overrightarrow{OB}=\{-1,0,4\}$．计算$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，$5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$．

解法 1

$$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$
$$5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=10\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}+45\boldsymbol{k}$$

解法 2 由于$\overrightarrow{OA}=\{3,4,5\}$，$\overrightarrow{OB}=\{-1,0,4\}$，于是

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\{3+(-1),4+0,5+4\}=\{2,4,9\}$$
$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\{3-(-1),4-0,5-4\}=\{4,4,1\}$$
$$5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=5\{2,4,9\}=\{10,20,45\}$$

【例 2】 已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求矢量$\overrightarrow{AB}$的分解式．

解 由图 1-15 知由于

$$\overrightarrow{OA}=\{x_1,y_1,z_1\}$$
$$\overrightarrow{OB}=\{x_2,y_2,z_2\}$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

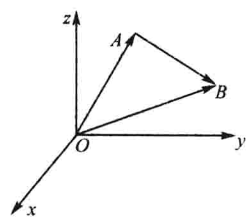


图 1-15

【例 3】 设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，若点 M 将线段 M_1M_2 分成定比 λ（$\lambda\neq-1$）的两段，求分点 M 的坐标．

解 设分点为 $M(x,y,z)$，如图 1-16，据题意得：

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$$
$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$$
$$\lambda\overrightarrow{MM_2}=\{\lambda(x_2-x),\lambda(y_2-y),\lambda(z_2-z)\}$$

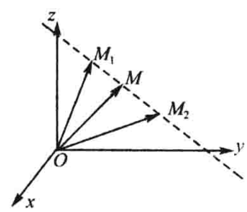


图 1-16

由于$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，则其坐标分别对应相等．即

$$x-x_1=\lambda(x_2-x)$$
$$y-y_1=\lambda(y_2-y)$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

解出 x,y,z 得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$