

声振模态分析与控制

〔日〕長松 昭男 萩原 一郎 吉村 卓也 编著
梶原 逸朗 雉本 信哉
于学华 译



科学出版社

声振模态分析与控制

〔日〕長松 昭男 萩原 一郎 吉村 卓也 编著
 梶原 逸朗 雉本 信哉
 于学华 译

科 学 出 版 社

北 京

图字:01-2014-2823

内 容 简 介

本书首先介绍了振动力学、声学 and 模态特性识别的基础知识;然后以汽车研发为例对声振耦合技术进行了系统论述与实例分析,并融合了日本声振耦合领域经典的研究成果;最后对振动控制、声学控制要点进行了系统论述。本书日文版是日本学术界一部经典著作。

本书内容翔实,信息量大,融合了大量的工程技术研究成果,可供高等院校机械、汽车及相关学科的本科生、研究生和教师使用,也可供从事机械、汽车及相关工程领域的科研人员参考。

音・振動のモード解析と制御

Modal Analysis and Control of Sound and Vibration

©(社)日本音響学会 1996

图书在版编目(CIP)数据

声振模态分析与控制 / (日) 長松昭男等编著;于学华译. —北京:科学出版社, 2014

书名原文: Modal Analysis and Control of Sound and Vibration

ISBN 978-7-03-041173-8

I. ①声… II. ①長…②于… III. ①机械振动-噪声控制 IV. ①TB535

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 200550 号

责任编辑:裴 育 王晓丽 / 责任校对:李 影

责任印制:肖 兴 / 封面设计:蓝正设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张:13 1/2

字数:272 000

定价:65.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

译者简介



于学华, 1964 年 7 月生, 工学博士, 盐城工学院汽车工程学院教授, 东京工业大学客座研究员。现任盐城工学院汽车工程学院副院长和江苏沿海新能源汽车研究院常务副院长, 日本自动车学会会员, 日本学术振兴会海外研究员, 中国声学学会理事。

主要研究方向: 折纸先进技术、车辆系统动力学、汽车噪声与振动控制技术(汽车 NVH 技术)。主持省部级科研项目 20 余项; “最新新能源汽车 NVH 技术和折纸工学”获 2010 年度日本东京工业大学中日科技合作贡献奖, “电动汽车白车身轻量化技术及应用”获 2013 年中国机械工业科学技术奖二等奖, “高端智能并联汽车喷涂机器人”获 2013 年江苏省人民政府科技进步奖三等奖; 在国内外学术会议与核心期刊发表论文 40 余篇, 发明专利 2 项, 出版专著 1 部。

译者前言

随着人类社会步入工业化时代,噪声与振动技术研究的重要性日益凸显。近年来,国内外学界相关研究成果大量涌现,本书日文版就是其中颇具代表性的研究成果之一。

该书是东京工业大学長松昭男教授和萩原一郎教授等学者共同撰写的一部学术著作,在日本一直作为工科大学机械、汽车工程方向本科生(研究生)教学和工程技术人员培训的教材。译者于2009年在东京工业大学做访问学者时结识了萩原一郎教授,在萩原教授的推荐和影响下,译者研读了该书,并萌生了翻译的想法,希望能够为我国机械、汽车行业的工程技术人员以及机械、车辆工程专业的学生提供一部有思想、有价值并且贴近工程实际的参考书。

译者在翻译过程中力求忠实于原著,原汁原味地向读者展现日本学者的独到见解。但由于译者水平有限,难免存在一些不妥之处,诚望广大读者批评指正。

本书由盐城工学院汽车工程学院于学华教授翻译,上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室蒋伟康教授、饶柱石教授审校。在翻译过程中,还得到了许多专家与同行的鼓励和帮助。

诚挚感谢东京工业大学長松昭男教授和萩原一郎教授,同济大学汽车学院余卓平教授和张立军教授,盐城工学院姚冠新教授、王保林教授、邵荣教授、宋长春教授、王资生教授、王路明教授和朱龙英教授的大力支持。此外,盐城工学院外国语学院钱露露老师在翻译过程中也给予了热心帮助。在此一并表示感谢!

原 书 前 言

近来,由于人力成本的高涨,生产工厂陆续向海外转移,失业者正在增加。此前,CAD 及计算机软件等的核心技术由模仿欧美起步,之后一直原封不动地引进与利用,日本产业仅注重与生产现场密切相关的生产技术,长此以往必将不可避免地以破产告终。为防止这一局面的出现,各领域的研究人员、技术人员须齐心协力,共同研究属于日本独有的技术,别无他法。

笔者从事的机械力学专业也不例外。在企业中,对基于有限元法的振动及强度的分析、机械与运动的分析、实验模态分析等,没有基础理论,未充分理解欧美制作的通用软件、装置的内容,而仅是通过阅读使用说明书寻求解决问题的对策和设计。

在研究水平方面,至少日本在机械力学方面取得了相当大的成果,虽萌生了数个独创技术的萌芽,但因企业的技术人员倾向于欧美的技术,导致日本独创研究难以结合实际应用。其中一个原因,大概是国内缺乏能简单明了地总结从基础到研究水平的书籍。

本书得到了同样意识到上述问题的大学研究人员的帮助,以共通的专业领域中振动、噪声模态分析与控制的基础开始到尖端技术,融合自身的研究成果,注重简单易懂的同时,进行了概括性的描述。

本书的主要内容如下:第 1 章是绪论。第 2、3 章是基础篇,尽可能简单地对多振动及声学基础内容进行说明。第 4~7 章是发展篇,针对最新的技术进行解读,以易于企业现场的技术人员理解。其中,第 4 章介绍实验模态分析中使用的各种模态特性识别法;第 5 章提出能够省略低量级与高量级特征模态的新的模态重合法,并对利用此方法解决声学 and 振动相互耦合问题进行说明;第 6 章从模型化及控制方法两个方面对振动的主动控制进行概括,从基础到最新技术进行讨论;第 7 章简单明了地讨论主动声控制中必不可少的知识及实用要点。

本书包含了众多作者自己研究开发的成果,期待今后这些成果能够被广泛地运用。读者对象以企业技术人员为主,同时为了方便用于大学教科书,对各章节也进行了简单的总结。由于笔者才疏学浅,恐还存在不完整之处,今后将根据读者的赐教及意见不断地改正。

最后,对自执笔以来给予极大耐心及鼓励的 CORONA 出版社的各位表达诚挚的谢意。

目 录

译者前言

原书前言

第 1 章 绪论	1
1.1 为什么要研究振动和声学	1
1.2 为什么要研究模态分析	1
1.3 为什么要研究控制	3
第 2 章 振动力学	4
2.1 单自由度系统	4
2.1.1 为什么会产生振动	4
2.1.2 阻尼的作用	6
2.1.3 强迫振动	8
2.1.4 频率响应函数	12
2.2 多自由度系统	15
2.2.1 两自由度系统	15
2.2.2 固有振动频率及固有模态	17
2.2.3 固有模态的正交性	18
2.2.4 模态坐标	20
2.2.5 比例黏性阻尼系统	21
2.2.6 一般黏性阻尼系统	24
2.2.7 频率响应函数	25
参考文献	30
第 3 章 声学	31
3.1 引言	31
3.2 声学基础	32
3.2.1 声波	32
3.2.2 声波的波动方程式	32
3.2.3 声源	33
3.3 声音的传播	33

3.3.1	声功率及声强	33
3.3.2	辐射阻抗	34
3.3.3	声音强弱的评价	35
3.3.4	声功率级及指向性增益	36
3.3.5	声阻抗	37
3.3.6	声波的衰减(吸收)	37
3.3.7	声波的反射、透射	38
3.3.8	声波的折射、衍射	38
3.3.9	气柱振动——声管及射声器	39
3.4	声测量	40
3.4.1	声压的测量	40
3.4.2	声级计	41
3.4.3	声强的测量	42
3.4.4	声功率的测量	43
3.4.5	频率分析仪器	43
3.5	隔声理论与设计	45
3.5.1	穿透墙壁损耗	45
3.5.2	单层墙壁的隔声相关的质量定律	46
3.5.3	双层墙壁的隔声	49
3.6	吸声理论与设计	50
3.6.1	吸声机构原理	50
3.6.2	吸声系数	54
3.7	听觉与声音	56
3.7.1	耳朵的构造及功能	56
3.7.2	发声机构	57
	参考文献	58
第4章	模态特性识别	59
4.1	引言	59
4.2	模态特性识别法的分类	59
4.2.1	识别法的分类	59
4.2.2	频率响应函数的公式化	61
4.2.3	单位脉冲响应函数的公式化	63
4.3	单自由度法	64

4.3.1 伯德图的使用方法	64
4.3.2 圆曲线拟合	65
4.4 多自由度法	68
4.4.1 微分迭代法	68
4.4.2 线性直接法	72
4.4.3 正交多项式法	72
4.4.4 普罗尼法	75
4.5 多点参照法	78
4.5.1 多点参照法理论	78
4.5.2 多点偏分法	81
4.5.3 直接参数识别法	85
参考文献	88
附录 最小平方法	88
第5章 声振耦合分析	90
5.1 引言	90
5.2 构造-声场耦合系统的数理表现	91
5.2.1 麦克尼尔等的方法	92
5.2.2 萩原等的方法	93
5.3 耦合系统中模态重合法的表现	95
5.3.1 模态位移法	95
5.3.2 模态加速度法	96
5.3.3 Hansteen 等的方法	97
5.3.4 马-萩原的模态重合法	99
5.3.5 误差分析	101
5.4 耦合系统中的直接频率响应分析及其灵敏度分析	105
5.4.1 以往的直接频率响应分析	105
5.4.2 直接频率响应分析的迭代法	106
5.4.3 直接频率响应的灵敏度	107
5.4.4 运用特征模态进行计算	109
5.4.5 应用举例	111
5.5 耦合系统的特征值与固有模态灵敏度分析	112
5.5.1 福克斯等的模态法	113
5.5.2 纳尔逊法	114

5.5.3 B. P. Wang 的改善模态法	115
5.5.4 马-萩原的模态法	115
5.5.5 误差分析	117
5.5.6 应用举例	120
5.6 耦合系统的模态频率响应灵敏度分析	129
5.6.1 特征对的灵敏度方法	129
5.6.2 频率响应公式的直接微分法	132
5.6.3 声压水平积分及声压水平灵敏度积分的公式化	134
5.6.4 应用举例	135
5.7 耦合系统的部分构造合成法	138
5.7.1 部分构造合成法的公式	138
5.7.2 数值分析举例	140
5.8 小结	143
参考文献	143
第 6 章 振动控制	145
6.1 引言	145
6.2 振动控制的背景和设计概念	145
6.3 构造系统的模型化	146
6.3.1 状态方程式的表达	147
6.3.2 机械系统的状态方程式	147
6.3.3 模型的低量化	149
6.3.4 通过系统识别进行实验的模型化	150
6.4 系统构造	150
6.4.1 可控制性	151
6.4.2 可观测性	152
6.4.3 振动模态及可控、可观测性	153
6.5 最优控制	156
6.5.1 最优调节器	157
6.5.2 H^∞ 控制	160
6.5.3 其他方法	167
6.6 振动控制系统的设计举例	168
6.6.1 基于最优调节器的振动控制	168
6.6.2 H^∞ 理论的振动控制	171

参考文献	174
第7章 声控制	176
7.1 引言	176
7.2 主动声控制的概念	176
7.2.1 声波干扰	177
7.2.2 对象频率范围	177
7.2.3 前馈控制与适应控制	178
7.3 数字信号处理	179
7.3.1 数字滤波器	179
7.3.2 FIR 滤波器	181
7.3.3 FIR 滤波器的特征	183
7.4 自适应运算法则	184
7.4.1 自适应 FIR 滤波器	185
7.4.2 最优梯度法	185
7.4.3 LMS 运算法则	187
7.4.4 已筛选 X LMS 运算法则	188
7.4.5 LMS 运算法则的模拟	191
7.5 实际应用中的问题	195
7.5.1 因果性	195
7.5.2 相干性	196
7.5.3 振鸣	197
7.5.4 滤波器长和采样间隔	197
参考文献	197
附录 主动声控制中的最优滤波器	198

第 1 章 绪 论

1.1 为什么要研究振动和声学

机械是转换并运用能量的一种现代工具,因为在一个过程中,一定是以运动这种形态保存着能量,所以在机械运转中必然存在持续运动的部分。然而,机械的大小是有限的,为了实现连续的运动,运动的形态将限定在旋转或往复中。而这两者必然产生振动(vibration),因此振动是机械产生以来的“命运伴侣”。但是,为什么现在振动显得如此重要呢?

近来,机械制造商为了同时满足提高性能、降低成本、减轻质量这三大目标,相互间进行着激烈的竞争。因为提高性能基本上可以通过能量的高效利用来实现,所以为了提高性能就必须防止能量的泄漏,并且要尽量避免将运动能量转化为热能的状态,同时要阻止振动引起的阻尼发生;因为加上阻止振动的材料和装置都比一般的构造材料昂贵,且构造材料并不发挥作用,所以在费用和质量两个方面都形成了负担。而为了降低成本和减轻质量,最好不要使用这种材料。对上述三大目标的追求,同时出现了振动增大的现象,于是振动问题也随之变得更加重要。

机械及结构在空气中振动时,因发出声音(sound)传递给人们,在人和机械的接点处,振动问题往往被归类于噪声问题。随着文明的不断进步,无论在空间上还是在心理上,人与机械的距离都进一步拉近,因此噪声问题也变得越来越重要。当今社会,以人为本的风潮越来越盛行,机械在安全性这一至上命题下,又形成了舒适性这一重要的商品价值,声音和振动也作为重要因素登场了。特别是声音问题,它是与人类生活息息相关的问题,并且与人的心理及感觉密切结合,虽复杂却作为重要的课题引起了学术界的关注。

1.2 为什么要研究模态分析

模态分析是在 21 世纪初建立的机械力学基础理论之一,有以下两种特征。第一,通过以模态坐标这一固有模态为基础导入坐标,运动方程式形成非耦合。并且,多自由度系统的运动可以作为单个自由度系统表现来解决。第

二,振动问题中以仅有数量的固有模态(多数是低量级到多量级的固有模态)表现,即使省略其他大多数固有模态,在实际应用中也具有充分的精度。

在计算机诞生之前,所有的振动问题被人们简化至人类能够处理的范围内的几个自由度模型中,与这种归类相比,模态坐标导入的复杂度加大,导致模态分析没有受到很大的关注;但是,自计算机产生之后,采用多自由度模型的振动分析成为可能,从此这两个特征开始发挥强大的威力。尤其是实施数百、数千自由度模型化的有限元法(finite element method, FEM)的振动分析,通过模态分析首次成为可能,所以市场上通用的 FEM 结构分析软件必定使用模态分析。

1950 年以前的振动实验,通常是用纸张输出并记录自由振动的,从响应的时刻波形图测量最低量级的基本固有模态的振动频率及对数阻尼率;但是,电子技术与计算机的发展大幅度地提高了振动实验的精度。同时通过在 1965 年提出并迅速实用化的快速傅里叶变换(FFT)及 60 年代后半期公式化的模态特性识别法,振动实验的方法有了翻天覆地的改变。由此,集振动实验、信号处理和模态特性识别为一体的实验模态分析原形诞生了。

根据实验模态分析,明确了以实验中发生的振动问题及现象作为对象的机械及结构的动态特性关系,什么样的固有模态影响什么样的现象,是否会引发问题也变得清晰。据此,实验模态分析得以在问题对策中发挥巨大的威力,在现场的实验振动分析中发挥主角作用的同时,在机械、建筑、电气等众多领域的企业现场也得到迅速普及。

随后,实验模态分析研究以美国为中心取得迅猛发展,产生众多振动方法的同时,多点参照模态特性识别法也提出了多种方案。这些方法都很快得到实际应用,从振动到识别的一系列过程实现了一体化和自动化,获得了很大的进步。

近期,作为解决问题的实验模态分析本身也进入了成熟期,至少在发达国家的企业中,被认为是基础技术。随后,实验模态分析不仅针对问题对策,也开始尝试着应用于理论分析的验证、非破坏查证、运转监视、故障诊断、FEM 模型的改进优化等新的领域中。

此外,通过 FEM 数值分析及实验模态分析的一体化,正在推进构筑部分结构合成法、实现实时在线模拟、最优化设计、振动控制等更高精度的分析系统。为此,模态分析名副其实地成为振动分析的主角。

1.3 为什么要研究控制

过去,控制的主要对象是化学反应流程、电气等,很少把机械系统的振动和声音作为控制器的对象;随着电子技术的进步,因机械的动态性能进一步提高,控制器作为机械的附件,逐渐开始应用。

近来,不进行控制就无法运行的新型机械陆续诞生。例如,被串联起来使用的产业机器人,如果不进行控制,就只是摇摇晃晃、东倒西歪的机构,肯定是不被人认可是机械的;此外,在高速运转的同时寻找目标位置,找到后立刻停止,在不足 $0.1\mu\text{m}$ 的精度下,一边跟踪运动目标一边输入及输出信息的光磁信息机器,是控制技术的集成。

在为了调试性能而将控制作为次要地位的时代,机械技术人员只要考虑结构就可以了,控制设计是之后由电气技术人员来实施的;但是,将控制作为核心技术,为了制作出功能一体化的机械,机械技术人员必须熟知控制,从一开始就必须实施控制与结构统一设计。

现在的超高层大厦,因采用了利用自身稳固性的免振结构,对风的阻力会产生轻微的摇动,而为了防止这一现象的发生,内设主动、半主动振动控制器的建筑物正在增多;此外,对提高大厅及室内的声功能并防止换气产生噪声,也开始积极地使用声控技术。即使对于建筑技术人员,控制也开始与其业务有着千丝万缕的联系。

如此一来,控制从作为一部分电气技术人员的专有特殊技术,开始逐渐转变为对机械、建筑、化工工程等领域技术人员也必不可少的基础技术。

随着计算机和电子技术的不断发展,从代表根轨迹法的古典控制理论开始,到以时刻特性为主要对象的 LQG 控制的现代控制理论,再到兼具频率特性调节功能和鲁棒性 H^∞ 控制及 μ 综合控制,进而到非线性系统中发挥威力的滑行模态控制,控制理论获得迅猛发展。

与此同时,控制对象从单自由度系统到多自由度系统转变。至少目前,普通 FEM 结构模型中就包含了数千个自由度,而相对控制设计模型最大也只是 10 个自由度左右,差异很大。以实际的机械及结构物体为对象,在进行控制设计时,为尽可能地减少自由度且不使结构模型动态特性发生变化,就有必要使用模态分析,以模态坐标来表现对象;像这样为进行振动分析而生成的模态分析,现在已成为控制设计中不可或缺的方法。

第2章 振动力学

2.1 单自由度系统

2.1.1 为什么会产生振动

世界上的事物之所以会呈现出当前的状态,是因为当前的状态是最为自然且稳定的状态。从而,事物具备了趋于维持现状的根本性质。从力学观点来看,有如下三种性质。

第一,运动的物体、静止的物体都趋于维持其固有的状态。状态的变化就是**加速度**(acceleration),万物都排斥加速度,并对其产生抵抗。抵抗外在表现为抵抗力。这种抵抗力因物体习惯当前状态的性质而产生,称为**惯性力**(inertia force)。这就是牛顿的**惯性定律**(law of inertia)。该性质的强度通过对单位加速度的抵抗力大小来表现,称为**质量**(mass)。

第二,有形的物体即固体,排斥形状的变化,即**变形**(deformation)。形状的变化,对于固体内的某点就形成了**位移**(displacement)。所有的固体都排斥伴随着变形而产生的位移,并会对此产生抵抗。而这种抵抗因固体想要恢复原来的形状而产生,称为**恢复力**(restrative force)。这种性质的强度通过对单位位移抵抗力的大小来表现,称为**刚度**(stiffness)或者**刚性**。

第三,被流体包围的固体,因具有趋于维持当前位置的性质而排斥位置的变化,即**速度**(velocity),对此产生抵抗。而这种抵抗力因流体的黏度,即**黏性**(viscosity)而产生,故称为**黏性阻力**(viscous resistance force)。

以上三种性质是作为**动力学**(dynamics)基础的**动态特性**(dynamic characteristics),是产生振动的原因。

那么,这种指定系统内的某一种状态就可以决定系统整体状态的系统,称为**单自由度系统**(single degree of freedom)。下面将以单自由度系统为对象,对上述性质进行分析。

系统状态随时间变化的力学是动力学,在此将这种状态作为位移,用时间 t 的函数 $x(t)$ 表示。另外,质量用 m 、刚度用 k 、黏性用 c 来表示。为了能够更直观地理解,用刚体表示质量、用**弹簧**(spring)表示刚度,用**阻尼器**(damper)表示黏性,如图2.1所示。

因图2.1是用力学性质来表示物体的,故称为**力学模型**(kinematic

model), 或简单地称为模型, 这种以力学模型来表现物体称为**模型化**(modeling)。力学模型如图 2.1 所示, 通常由 3 个要素构成, 但这 3 个要素并不是不同的物体, 而是同一物体所具备的性质。因图 2.1 是以振动为对象建立模型的, 故称为**振动系统**(vibration system)。

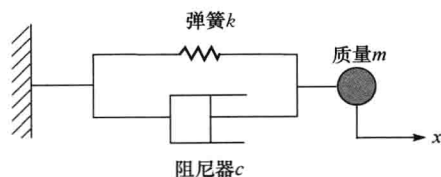


图 2.1 单自由度力学模型(黏性阻尼振动系统)

如果用点来表示与时间相关的微分, 位移 $x(t)$ 的 1 次及 2 次微分是速度及加速度, 可以分别用 $\dot{x}(t)$ 和 $\ddot{x}(t)$ 表示。上述三种阻力的大小, 与各自的性质强度 m, k, c 成正比, 同时与变化的大小 $\ddot{x}, \dot{x}, x$ 成正比。此外, 阻力自然地作用于与变化相反的方向, 因此以负号表示。即用 f_m 表示惯性力, 用 f_k 表示回复力, 用 f_c 表示黏性阻力, 可以得到如下公式:

$$f_m(t) = -m\ddot{x}(t), \quad f_k(t) = -kx(t), \quad f_c(t) = -c\dot{x}(t) \quad (2.1)$$

不受外部任何作用, 呈自由状态的单自由度模型中, 不存在式(2.1)以外的力, 因此构成下面**力的平衡方程式**(equation of force equilibrium):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.2)$$

式(2.2)不仅是力的平衡公式, 同时当位移作为时间函数时, 还可作为运动状态下的方程式, 因此也称为**运动方程式**(equation of motion)。

上述三种性质中, 质量和刚度产生振动。与此相反, 黏性因具有抵抗运动的性质, 所以会抑制所有的振动, 使振动衰减。因此, 把黏性阻力也称为**黏性阻尼力**(viscous damping force)。由此看来, 为了研究振动的产生及形态, 省略阻尼的情况较多。这样, 式(2.2)变为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.3)$$

式(2.3)中的时间 t 作为独立变量, 构成了位移 x 作为从属变量的**微分方程式**(differential equation)。在这个公式中, 显示将 x 及 2 次微分分别乘以表示物质特性的正的常数后, 相加为 0。因此, 如果用时间对 x 实施 2 次微分后, 必定会得到相同函数的负值。满足这种情况的函数只有三角函数及**复指数函数**(complex exponential function)。二者是同一函数, 只是表现不同, 因此这里使用后者, 假设式(2.3)的解为

$$x(t) = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t} \quad (2.4)$$

式(2.4)中的 X_1 及 X_2 是未定系数, 根据两个初始条件确定。式(2.4)中使用的是虚数。在表现振动这一实际现象时, 为何使用实际上并不存在的虚数。这是自然而然产生的疑问, 下面有必要对这个问题进行回答。

复数(complex number)是由实部和虚部(或大小与相位)2个相互独立的要素组成的2维数。另外,振动是由大小和时间2个相互独立的元素组成的2量级现象。因复数及振动都是2量级的,如果使用复数,振动这一现象可以用1个数字完整地表现出来,非常方便。使用复数的理由,只是因为方便。这是由在数学上是好是坏、进展是否顺利决定的,且在实际上的进展也是很顺利的。

之后,只需要考虑实际现象与公式的对应即可。无论是数理公式的处理、展开的过程及结果,只要出现复数,此时或此阶段表达实际发生的现象的只有实部,虚部作为现象没有任何意义,通常这样考虑即可。

将式(2.4)代入式(2.3)中,两边用 $X_1 e^{i\Omega t} + X_2 e^{-i\Omega t}$ 去除:

$$(-\Omega^2 m + k)x(t) = 0 \quad (2.5)$$

为使式(2.5)在任意时刻 t 都成立,有

$$x(t) = 0 \quad \text{或} \quad -\Omega^2 m + k = 0 \quad (2.6)$$

在式(2.6)中,因为 $x(t) = 0$ 是系统静止状态,在动力学上没有意义,所以作为系统随时间变动的条件:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

实际上,式(2.4)中的复数指数函数是周期函数,是角频率 Ω (rad/s)的振动的含义。有关这一点的详细介绍,请参考文献[1]。式(2.7)在自由状态下必定会按照该角频率振动,这意味着绝对不会产生除此以外的振动。

Ω 在图 2.1 所示的无阻尼振动系统中由固有性质 m 及 k 来决定,称为**无阻尼固有角频率**(undamped natural angular frequency)。如果 Ω 以 1 周期的角 2π 来除,会得到 1s 可以反复几周的结果, f_n (Hz) = $\Omega / (2\pi)$ 称为**无阻尼固有振动频率**(undamped natural frequency)。其倒数 T_n (s) = $1 / f_n$, 表示一个周期所需要的时间,称为**无阻尼固有周期**(undamped natural period)。固有振动频率之所以用英语 natural frequency 表示,是因为它不受来自外部的初始影响以外的任何作用,是自然的(natural)状态下的自发振动,称为**自由振动**(free vibration)。

固有振动频率的意义可单纯描述如下。数学上是使运动方程式具有动态解的条件。物理学上是在保持力的平衡的同时能够自由振动的振动频率,或更为根本的是在满足能量保存法则的同时可以自由振动的振动频率^[1]。

2.1.2 阻尼的作用

实际的结构及机械中必然存在**阻尼**(damping)。因此,以图 2.1 的单自由度系统为对象,尝试对阻尼给振动带来的影响进行研究。力的平衡公式或