21世纪高职高专系列规划教材
高职高专“十二五“规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学（下册）

主　编◎常瑞玲　郑兆顺

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高职高专系列规划教材
高职高专“十二五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学（下册）

主　编◎常瑞玲　郑兆顺
副主编◎李金嵘　纪保存　宋林锋
编　者◎李培录　杨信超　王晓东
张先荣　张月华　黄美霞　马秀芬

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 常瑞玲，郑兆顺主编. —北京：北京师范大学出版社，2012.8
（21世纪高职高专系列规划教材）
ISBN 978-7-303-15079-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①常…②郑… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 179579 号

营销中心电话 010-58802755 58800035
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com.cn
电子信箱 bsdzyjy@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：11.25
字　　数：228 千字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版
印　　次：2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：22.00 元

策划编辑：周　阳　　责任编辑：周　阳
美术编辑：高　霞　　装帧设计：李尘工作室
责任校对：李　菡　　责任印制：吕少波

内容提要

本书是根据教育部“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年高职高专高等数学教育研究成果及精品课一线教学实践经验，并认真研究、分析、总结国内的一些高等数学教材的基础上，精心编写而成。全书分上、下两册，上册共六章，内容分别是预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分。下册共六章，内容分别是常微分方程、级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分。其中，常瑞玲、郑兆顺担任上、下册主编，李金嵘编写第一章，常瑞玲编写第二、三、四、五、六、十、十一章，何青编写第七章，李培录编写第八、十一章，杨信超编写第九章，纪保存编写第四、十二章，李金嵘、宋林峰、刘艳平编写习题、郭新编写阅读材料，其他老师对教材作了修改工作。教材所需课时约为140学时，标有“*”的内容可根据不同专业选学。本书可供高职高专院校师生使用。

序

常瑞玲等编写的《高等数学》，令人耳目一新，该教材根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合多年高职高专高等数学教育研究成果及精品课建设和一线教学实践经验，精心编写而成。其特色主要体现在如下几个方面.

(1)立足高职，充分发挥高等数学技术教育功能和文化教育功能，突出了高等数学的教学本质。

(2)注重教学方法论的指导地位，把提高学生的一般科学素养、文化修养，以及形成和发展学生数学品质作为高等数学的教育目标。

(3)注重为学习相关专业课程和后继课程服务，为培养学生的思维能力服务，为学生处理和解决相关实际问题服务，为学生的可持续发展服务。

(4)注重概念方法的教学，强化基本概念脱胎于实际过程和主要方法的理念，在适度注意数学的严密性、系统性的基础上，返璞归真，尽量使数学知识生活化、通俗化、简单化。

(5)注重培养学生用数学思想和方法分析解决问题的能力，特别是用数学的思想、概念、方法，消化吸收工程概念和工程原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，求解数学模型的能力。

(6)在例题的处理上，层次分明、衔接得当、前后贯通，特别是穿插的“思考”问题，对打破学生的思维定式很有益处。

(7)每章后面，结合内容附有相关数学史话或数学实验，并适当介绍相关数学软件的使用，有利于发挥数学的两个教育功能以及培养学生用计算机及相应数学软件求解数学问题的能力。

看来，作者对《高等数学》的编写下了工夫、做了努力，期望本书在使用过程中能日臻完美。

杨世明

全国数学科学方法论研究交流中心副主任

目录

第七章　常微分方程 …………………………………………………… (1)
第一节　微分方程的基本概念 ……………………………………… (1)
第二节　一阶微分方程 ……………………………………………… (4)
第三节　一阶微分方程应用举例 …………………………………… (11)
第四节　可降阶的二阶微分方程 …………………………………… (15)
第五节　二阶常系数线性微分方程 ………………………………… (18)
综合测试题七 ………………………………………………………… (28)
第八章　级　　数 ……………………………………………………… (32)
第一节　数值级数 …………………………………………………… (32)
第二节　正项级数敛散性的判别 …………………………………… (35)
第三节　任意项级数 ………………………………………………… (38)
第四节　幂级数 ……………………………………………………… (40)
第五节　函数的幂级数展开 ………………………………………… (45)
第六节　傅里叶级数 ………………………………………………… (49)
综合测试题八 ………………………………………………………… (55)
第九章　向量代数与空间解析几何 …………………………………… (58)
第一节　空间直角坐标系 …………………………………………… (58)
第二节　向量及其线性运算　向量的坐标表示式 ………………… (60)
第三节　两向量的数量积与向量积 ………………………………… (64)
第四节　平面及其方程 ……………………………………………… (69)
第五节　空间直线及其方程 ………………………………………… (74)
第六节　曲面和空间曲线 …………………………………………… (78)
第七节　常见二次曲面的图形 ……………………………………… (85)
综合测试题九 ………………………………………………………… (90)
第十章　多元函数微分学 ……………………………………………… (92)
第一节　多元函数的概念，极限与连续 …………………………… (92)
第二节　偏导数与全微分 …………………………………………… (97)
第三节　多元复合函数与隐函数的微分法 ………………………… (103)
第四节　多元函数微分学的应用 …………………………………… (108)
综合测试题十 ………………………………………………………… (115)

第十一章　重积分 …………………………………………………… (117)
　第一节　二重积分 ……………………………………………………… (117)
　第二节　二重积分的应用 …………………………………………… (125)
　*第三节　三重积分 ……………………………………………………… (126)
　综合测试题十一 ………………………………………………………… (131)
*** 第十二章　曲线积分与曲面积分** …………………………………… (132)
　第一节　第一型曲线积分 …………………………………………… (132)
　第二节　第二型曲线积分 …………………………………………… (136)
　第三节　格林公式 ……………………………………………………… (141)
　第四节　曲线积分与路径无关的条件 ……………………………… (145)
　第五节　第一型曲面积分 …………………………………………… (150)
　第六节　第二型曲面积分 …………………………………………… (153)
　第七节　高斯公式 ……………………………………………………… (156)
　综合测试题十二 ………………………………………………………… (160)
习题参考答案 …………………………………………………………… (161)
参考文献 ………………………………………………………………… (173)

第七章　常微分方程

如果已知函数的导数，求它原来的函数，这是不定积分解决的问题．更多时候是知道一个函数的导数(或微分)所满足的关系式，如 $xy'+y=\sin x$，而求出该函数，这是微分方程解决的问题，也是本章的内容．微分方程是建立数学模型的重要方法，它在科学技术中有着广泛的应用．本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见的微分方程的解法，并初步介绍它们在一些实际问题中的应用．

第一节　微分方程的基本概念

引例 1　一曲线通过点(0，1)，且在该曲线上的任一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率等于该点的纵坐标与横坐标之积，求此曲线方程．

分析　若设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，根据导数的几何意义，未知函数 $y=f(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy \quad (\text{或 } y'=xy). \tag{7.1}$$

我们将在第二节给出它的解法．

引例 2　列车在平直轨道上以 20m/s 的速度行驶，当制动时，列车加速度为 −0.4m/s，求制动后列车的运动规律．

分析　设列车开始制动后 t 秒内行驶了 s 米，则制动后列车的运动规律为 $s=s(t)$，由题意可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \quad (\text{或 } s''=-0.4). \tag{7.2}$$

上述两例中的式(7.1)和式(7.2)都含有未知函数的导数，事实上，式(7.1)、式(7.2)就是微分方程．

定义 7.1　一般地，含有未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**．未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**．未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**．本章只研究常微分方程，简称为微分方程，有时也称为方程．

例如，下列方程都是微分方程(其中 y，v，θ 均为未知函数)：

(1) $y'=kx$（k 为常数）；

(2) $(y-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$；

(3) $mv'(t)=mg-kv(t)$；

(4) $y''=\dfrac{1}{a\sqrt{1+y'^2}}$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0$　（g，l 为常数）．

定义 7.2 微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数，称为**微分方程的阶**.

n 阶微分方程的一般形式可以表示为

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

其中 x 是自变量，y 是 x 的未知函数. 本章主要研究几种特殊类型的一阶和二阶微分方程.

定义 7.3 任何代入微分方程能使该方程成为恒等式的函数，称为**微分方程的解**. 微分方程的解可以是显式的，也可以是是隐式的.

如果微分方程的解中含有任意常数的个数与微分方程的阶数相同，且任意常数之间不能合并，这样的解叫做**微分方程的通解**. 当通解中的任意常数都取特定值时所得到的解，称为**微分方程的特解**. 比如 $y=x^3+C$ 是微分方程 $y'=3x^2$ 的通解，而 $y=x^3-7$是它的特解. 显然，方程的特解中是不含任意常数的.

定义 7.4 用于确定通解中任意常数的值的条件，称为**初始条件**.

一般地，一阶微分方程的初始条件写成

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0 \quad 或 \quad y(x_0)=y_0,$$

二阶微分方程的初始条件写成

$$\begin{cases} y\Big|_{x=x_0}=y_0, \\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=y_1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_1. \end{cases}$$

比如，引例 1 中曲线通过点(0, 1)，即 $y(0)=1$ 是其初始条件，它也可写为

$$y\Big|_{x=0}=1.$$

引例 2 中制动时列车的初速度和运动路程是其初始条件，即 $s'(0)=20$，$s(0)=0$，也可写为

$$\begin{cases} s(0)=0, \\ s'(0)=20. \end{cases}$$

求微分方程满足初始条件的解的问题称为**初值问题**. 求解某初值问题的解，就是求微分方程的特解. 如求微分方程 $y'=f(x, y)$满足初始条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题，记为

$$\begin{cases} y'=f(x, y), \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0. \end{cases}$$

例 1 验证方程 $y'=\dfrac{2y}{x}$ 的通解为 $y=Cx^2$ (C 为任意常数)，并求满足初始条件 $f(1)=2$的特解.

解 由 $y=Cx^2$，得

$$y'=2Cx,$$

将 y 及 y' 代入原方程，得

$$左边=y'=2Cx,$$

$$右边=\frac{2y}{x}=2Cx,$$

所以函数 $y=Cx^2$ 满足原方程. 又因为该函数含有一个任意常数，所以 $y=2Cx^2$ 是一阶微分方程 $y'=\frac{2y}{x}$的通解.

将初始条件 $y\Big|_{x=1}=2$ 代入通解，得 $C=2$，故所求特解为 $y=2x^2$.

由例 1 和引例可以知道，微分方程的每一个解都是一个一元函数 $y=y(x)$，其图形是一条平面曲线，这条平面曲线被称为微分方程的**积分曲线**. 通解的图形是平面上的一族曲线，这一族曲线被称为**积分曲线族**；特解的图形是积分曲线族中的一条确定的曲线. 这就是微分方程的通解和特解的几何意义.

习　题　7-1

1. 指出下列微分方程的阶数(其中 y 为未知函数)：

(1) $x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y=0$；　　(2) $-\mathrm{d}y=\frac{2y}{100+x}\mathrm{d}x$；

(3) $y''+8y'=4x^2+1$；　　(4) $y'+\mathrm{e}^y=x^2$；

(5) $xy''-5y'+3xy=\cos^2 x$；　　(6) $y'y''-x^2y=1$.

验证下面 2～5 题中各函数是否为所给微分方程的解，若是，试指出是通解还是特解(其中 C，C_1 及 C_2 均为任意常数).

2. $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=0$.

3. $y=xy'+f(y')$，$y=Cx+f(C)$.

4. $y''+y=\mathrm{e}^x$，$y=C_1\sin x-C_2\cos x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

5. $y''-2y'+y=0$，$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

6. 验证 $y=Cx^3$ 是方程 $3y-xy'=0$ 的通解(C 为任意常数)，并求满足初始条件 $y(1)=\frac{1}{3}$的特解.

7. 验证 $\mathrm{e}^y+C_1=(x+C_2)^2$ 是方程 $y''+y'^2=2\mathrm{e}^{-y}$的通解($C_1$，$C_2$ 为任意常数)，并求满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{1}{2}$的特解.

8. 设曲线上任一点处的切线斜率与切点的横坐标成反比，且曲线过点(1，2)，求该曲线的方程.

9. 物体在空气中的冷却速率与物体和空气的温差成正比，试以微分方程描述这一物理现象(设空气温度为 T_0).

*10. 设一质点沿 x 轴运动，其速度为 $v(t)$. 若 $v(t)$是连续函数，且当 $t=t_0$ 时该质

点的坐标为 x_0，试证该点的运动规律为 $x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y')=0.$$

下面，介绍几种常见的一阶微分方程的求解方法.

一、可分离变量的微分方程

形如

$$y'=f(x)g(y) \tag{7.3}$$

的微分方程，称为**可分离变量的微分方程**．这里 $f(x)$，$g(y)$ 分别是变量 x，y 的已知连续函数，且 $g(y)\neq 0$．这类方程的特点是经过适当的运算，可以将两个不同变量的函数与微分分离到方程的两边．其具体解法如下.

(1)分离变量，即将方程整理为

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

的形式，使方程两边都只含有一个变量.

(2) 两边积分，得

$$\text{左边}=\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y,\qquad \text{右边}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

故方程的通解为

$$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C.$$

我们约定在微分方程这一章中，不定积分式表示被积函数的一个原函数，而把积分所带来的任意常数明确地写上.

例 1　求微分方程 $y'=(\sin x-\cos x)(1+y^2)$ 的通解.

解　这是可分离变量的微分方程.分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得方程的通解为

$$\arctan y=-\cos x-\sin x+C,$$

而且它是该微分方程的一个隐式解.

例 2　求微分方程 $y'=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解　分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + C_1,$$

化简，得

$$|y| = e^{C_1}\left|\frac{1}{x}\right|,$$

即
$$y = \pm e^{C_1}\frac{1}{x}.$$

令 $C_2 = \pm e^{C_1}$，则 $y = C_2\frac{1}{x}$，$C_2 \neq 0$.

另外，我们看出 $y = 0$ 也是方程的解，所以可认为 $y = \frac{C_2}{x}$ 中的 $C_2 = 0$，因此 C_2 可作为任意常数. 这样，方程的通解是 $y = \frac{C}{x}$.

由此可以看出，凡遇到积分后是对数的情形，理应都需作类似于上述的讨论，但这样的演算过程没有必要重复. 所以为方便起见，今后这种情形都作如下的简化处理，以例 2 为例示范如下：

分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx,$$

两边积分，得

$$\ln y = \ln\frac{1}{x} + \ln C,$$

$$\ln y = \ln\frac{C}{x},$$

即通解为

$$y = \frac{C}{x}\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

现在，我们给出本章引例 1 的解法.

显然，$\frac{dy}{dx} = xy$ 是一个可分离变量的微分方程. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = x\,dx,$$

两边积分，得

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C',$$

即
$$y = \pm e^{\frac{x^2}{2}+C'},$$

亦即通解为
$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

曲线通过点(0, 1)，即 $y(0) = 1$ 是其初始条件，代入通解，有 $1 = Ce^0$，得 $C = 1$.

故所求曲线方程为

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

思考 微分方程 $dx + xydy = y^2dx + ydy$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解是什么?

* 二、齐次型微分方程

形如
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.4}$$
的微分方程称为**齐次型微分方程**.这类方程的特点是，方程 $f(x, y)$ 可写成$\frac{y}{x}$ 的函数.例如，$(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$ 可变形为如下齐次微分方程：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

这类方程的具体解法如下：令 $u = \frac{y}{x}$，则
$$y = xu,\ y' = u + xu',$$
将 y，y' 代入原微分方程，得到关于未知函数为 u，自变量为 x 的微分方程，即
$$xu' + u = f(u) \quad 或 \quad x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$
它是可分离变量的，由此先分离变量，再两端积分，即可得解.

例 3 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解 这是一个齐次微分方程.令 $u = \frac{y}{x}$，则
$$y = xu,\ y' = u + xu',$$
代入方程，得
$$xu' = \tan u,$$
分离变量，得
$$\cot u du = \frac{dx}{x},$$
两边积分，得
$$\ln\sin u = \ln x + \ln C$$
代回原变量，即可得通解
$$\sin\frac{y}{x} = Cx \quad (C 为任意常数)$$

例 4 求微分方程 $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = -1$ 的特解.

解 原方程即为
$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2},$$
或
$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}.$$

这是一个齐次微分方程. 令 $u=\frac{y}{x}$，则

$$y=xu,\ y'=u+xu',$$

代入方程，得

$$xu'=\frac{u}{u-1},$$

分离变量，得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$u-\ln u=\ln x+\ln C,$$

即

$$u=\ln Cxu.$$

回代 $u=\frac{y}{x}$，即

$$\frac{y}{x}=\ln Cy,$$

于是通解为

$$Cy=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$$

代入初始条件，求得

$$C=-\frac{1}{\mathrm{e}},$$

故所求特解为

$$y=-\mathrm{e}^{\frac{y}{x}+1}.$$

三、一阶线性微分方程

形如

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

的微分方程称为**一阶线性微分方程**. 其中 $P(x)$，$Q(x)$ 分别是自变量 x 的连续函数，而“线性”是指在方程中未知函数 y 和它的导数 y' 都是一次的，$Q(x)$ 称为**自由项**或**非齐次项**.

当自由项 $Q(x)\equiv 0$ 时，方程变为

$$y'+P(x)y=0, \tag{7.5}$$

称为**一阶线性齐次微分方程**. 当自由项 $Q(x)\neq 0$，时，方程

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{7.6}$$

称为**一阶线性非齐次微分方程**. 通常，方程(7.5)称为方程(7.6)所对应的线性齐次微分方程.

1. 一阶线性齐次微分方程

不难看出，**一阶线性齐次**微分方程

$$y'+P(x)y=0$$

实际上是可分离变量方程.分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

所以方程的通解公式为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{7.7}$$

以后凡遇到形如 $y'+P(x)y=0$ 的方程也可以直接套用公式.

例 5 求方程 $y'+(\sin x)y=0$ 的通解.

解 所给方程是一阶线性齐次方程，由 $P(x)=\sin x$，得出

$$-\int P(x)\mathrm{d}x=-\int \sin x\mathrm{d}x=\cos x,$$

由通解公式得通解

$$y=C\mathrm{e}^{\cos x}.$$

2. 一阶线性非齐次微分方程

显然，方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 一定不满足线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$，即 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 不是方程(7.6)的通解.那么方程(7.6)的通解会是什么样呢?

观察式(7.5)与式(7.6)发现，它们的左边都是相同的，而其差别就在右边的自由项，其中一个是0，另一个是 x 的函数 $Q(x)$.因此，可以猜想它们的解之间应该有一定的联系，即方程(7.6)的通解中应该含有方程(7.5)通解的主要部分，即 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

为了书写简便，不妨令 $y_1=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，当 C 恒为常数时，$y=Cy_1$ 是方程(7.5)的解.根据上面的分析，设一阶线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解为 $y=C(x)y_1$.这样，问题变为 $C(x)$ 为多少才能使 $y=C(x)y_1$ 真正成为方程(7.6)的通解.根据微分方程解的定义，可以把 $y=C(x)y_1$ 代入线性非齐次方程(7.6)中去，从而确定 $C(x)$.

将 $y=C(x)y_1$ 及其导数 $y'=C'(x)y_1+C(x)y'_1$ 代入方程 $y'+P(x)y=Q(x)$，则有

$$[C'(x)y_1+C(x)y'_1]+P(x)[C(x)y_1]=Q(x),$$

即

$$C'(x)y_1+C(x)[y'_1+P(x)y_1]=Q(x),$$

因为 y_1 是对应的线性齐次方程的解，故 $y'_1+P(x)y_1=0$.因此有

$$C'(x)y_1=Q(x),$$

其中 y_1 与 $Q(x)$ 均为已知函数，所以可以通过积分求得

$$C(x)=\int\frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x+C,$$

将其代入 $y=C(x)y_1$ 中，得

$$y=Cy_1+y_1\int\frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x,$$

式中，$y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. 可以验证，上式给出的函数满足线性非齐次方程(7.6)，且含有一个任意常数，所以它是一阶线性非齐次方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的通解. 于是，一阶线性非齐次方程的通解公式为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]. \tag{7.8}$$

上述讨论中所用的方法，是将常数 C 变为待定函数 $C(x)$，再通过确定 $C(x)$ 而求得方程的解，这种方法称为**常数变易法**.

在求一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解时，既可以用常数变易法，也可以直接套用公式.

例 6 求方程 $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ 的通解.

解 将原方程改写为

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2,$$

这是一阶线性非齐次方程.

方法一：常数变易法.

(1) 先求它所对应的线性齐次方程 $y' - \dfrac{2x}{1+x^2} = 0$ 的通解，分离变量后积分，依次有

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx,$$

$$\ln y = \ln(1+x^2) + \ln C,$$

所以齐次方程的通解为

$$y = C(1+x^2).$$

(2) 设所给线性非齐次方程的解为

$$y = C(x)(1+x^2),$$

将 y 及 y' 代入该方程，得

$$(1+x^2)[C'(x)(1+x^2) + 2xC(x)] - 2xC(x)(1+x^2) = (1+x^2)^2,$$

于是，有

$$C'(x) = 1, C(x) = x + C,$$

因此，原方程的通解为

$$y = (x+C)(1+x^2).$$

方法二：公式法.

$$P(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, Q(x) = 1 + x^2,$$

由公式(7.8)得

$$y = e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx + C\right]$$

$$= (1+x^2)(x+C).$$

故原方程的通解为

$$y = (x+C)(1+x^2).$$

观察上面两种方法，常数变易法不用记忆公式，但步骤较烦琐；公式法步骤简便，但需要牢记公式，各有利弊.

例 7 求$\begin{cases} xy' + y = \cos x, \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$的解.

解 原方程可化为

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x,$$

此方程的自由项 $Q(x) = \frac{1}{x}\cos x$，与其所对应的线性齐次方程为

$$y' + \frac{1}{x}y = 0,$$

求得该线性齐次方程的通解为

$$y = \frac{C}{x}.$$

设所给线性非齐次方程的通解为

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

将 y 及 y' 代入所给线性非齐次方程，得

$$C'(x)\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cos x,$$

于是有

$$C(x) = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C,$$

故原方程的通解为

$$y = (\sin x + C)\,\frac{1}{x} = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\sin x.$$

将初始条件 $y(\pi) = 1$ 代入，得 $C = \pi$. 故所求的特解即初值问题的解为

$$y = \frac{1}{x}(\pi + \sin x).$$

有时，所给方程不是关于 y，y' 的一阶线性微分方程，但如果把 y 看做自变量，把 x 看做是 y 的函数，方程成为关于 x，x' 的一阶线性微分方程，即 $x' + P(y)x = Q(y)$，如

$$(y^2 - 6x)y' + 2y = 0,$$

它不是关于 y，y' 的一阶线性微分方程，但可变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2},$$

显然，这是一个关于 x，x' 的一阶线性微分方程. 这时仍可利用一阶线性微分方程的解法求解，对原来的未知函数而言，得到的通解的形式是