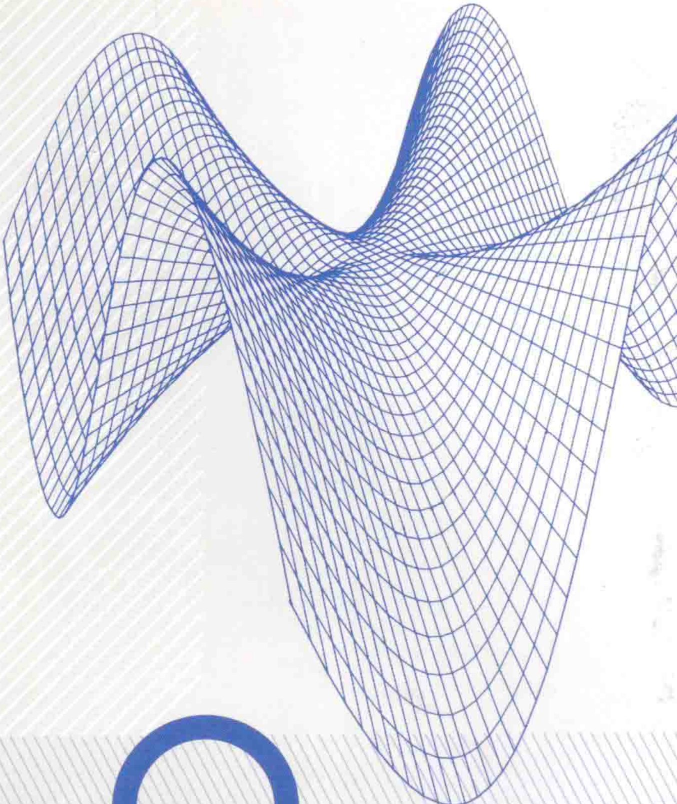
高 等 学 校 教 材



Advanced Mathematics

高等数学（上）

主 编 邵燕灵

副主编 王 鹏

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学(上)

Gaodeng Shuxue

主　编　邵燕灵
副主编　王　鹏

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是编者根据多年的教学实践经验，结合高等教育大众化背景下人才培养的多元化需求编写而成的。全书分为下、下两册，上册内容包含函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程；下册内容包含向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数。每章均配有习题，书末附有习题答案。

本书内容详略得当，语言浅显易懂，例题、习题的选配紧扣教学要点，侧重数学基本能力的训练。本书可作为应用型本科院校理工科专业高等数学课程的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目（C I P）数据

高等数学．上／邵燕灵主编．－－北京：高等教育出版社，2014．9

ISBN 978－7－04－040968－0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①邵…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 191565 号

策划编辑　杨　帆　　责任编辑　张长虹　　封面设计　赵　阳　　版式设计　王艳红
插图绘制　邓　超　　责任校对　孟　玲　　责任印制　田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	310 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	26.80 元

物 料 号　40968－00

前　　言

本书是在高等教育大众化的背景下，根据当前教学改革的需要编写而成的。在编写过程中汇集了编者多年的教学经验，特别是在一些内容的处理上融入了教学团队多年来在讲授高等数学课程中积累的教学方法和教学思路，在内容安排上也大量参考了国内同类教材，借鉴了部分优秀教材的特点。

在内容组织上，注重基本概念、基本理论、基本方法的介绍，突出有重要应用背景的概念、方法和实例；在文字表述上，力求做到详实顺畅，浅显易懂；在例题、习题配置上，以基本题型为主，突出数学能力的培养。另外，为适应不同层次的教学需要，我们对有些内容加了*号或用楷体印刷，教师可根据教学实际情况处理，略去不讲并不影响教材的系统性。

本书由邵燕灵教授主编，并负责全书的统稿工作。参加本书编写工作的有王鹏（第一章）、刘盼萍（第二、五章）、李有文（第三、九章）、谭秀辉（第四、七、八章）、梅银珍（第六章）。

本书初稿曾作为讲义在中北大学信息商务学院、软件学院和朔州校区试用。

本书在编写过程中得到了中北大学教务处、理学院、信息商务学院、软件学院、朔州校区各级领导的大力支持，中北大学数学系的教师提出了许多宝贵意见，编者在此一并表示衷心感谢。

编者还要特别感谢中北大学高玉斌教授，他仔细审阅了全部书稿，并提出了很多有益的建议。

由于经验和水平所限，书中存在不足之处，请读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学研究的主要内容是微积分，其研究的主要对象是函数. 极限是研究函数的基本方法，是建立微积分理论的基础，而连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限和连续等基本概念和方法，这些内容是学习高等数学的重要基础.

第一节　函　　数

一、集合与区间

1. 集合

集合是数学的一个基本概念，是学习现代数学的基础.

将具有某种特征的事物或对象的全体称为一个**集合**，构成集合的每个事物或对象称为该集合的**元素**.

集合通常用大写英文字母如 A,B,C 等来表示，元素则用小写英文字母如 a,b,c 等来表示. 如果 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

如果一个集合中的元素个数是有限的，则称其为**有限集**，否则称为**无限集**，而不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

集合常用列举法和描述法来表示.

列举法是将集合中的所有元素一一列出. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

描述法是将集合中元素所具有的性质写出. 例如，平面上位于圆 $x^2+y^2=1$ 上的点组成的集合 B 可记作

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}.$$

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称集合 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$. 如自然数集 $\mathbb{N}$，整数集 $\mathbb{Z}$，有理数集 $\mathbb{Q}$，实数集 $\mathbb{R}$ 之间存在关系

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记作 $A = B$.

本教材后面用到的集合主要是数集,即元素均为数的集合.若没有特别声明,后面提到的数都是实数.

2. 区间

区间是最常用的一类实数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,如图 1－1 所示,各类区间定义如下:

开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

左闭右开区间 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;

左开右闭区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

上述这些区间都称为**有限区间**,在数轴上表现为有限长度的线段.数 a 与 b 称为区间的**端点**,$b - a$ 称为区间的**长度**.

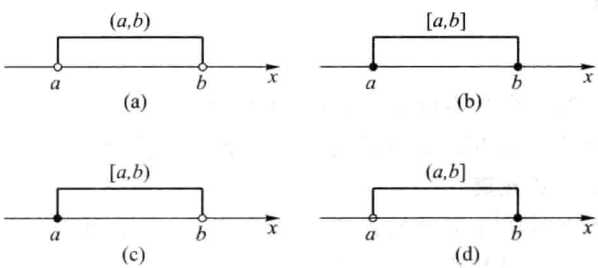


图 1－1

此外还有**无限区间**,例如:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}.$$

它们在数轴上表现为长度为无限的半直线,如图 1－2 所示.

全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 也记作 $(-\infty, +\infty)$,是无限的开区间.

在本教材中,当不需要特别区分区间是否包含端点、是有限还是无限时,为叙述方便,就用"区间 I"表示.

邻域是一类特殊的区间.设 x_0 是一个给定的实数,δ 是某一正数,数集

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

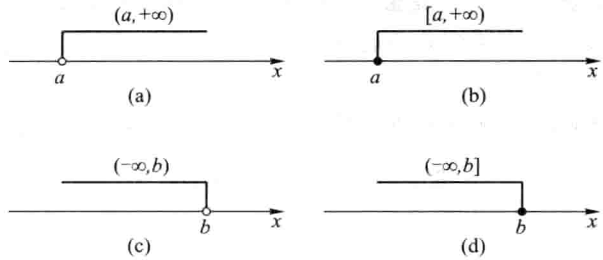


图 1 - 2

称为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，其中点 x_0 称为该邻域的**中心**，δ 称为该邻域的**半径**. 事实上，$U(x_0,\delta)$ 即是以 x_0 为中心，δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，如图 1 - 3(a).

当点 x_0 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，如图 1 - 3(b)，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

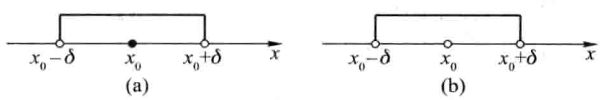


图 1 - 3

一般地，分别称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**左 δ 邻域**和点 x_0 的**右 δ 邻域**.

当不需要特别指出邻域的半径时，直接用 $U(x_0)$，$\mathring{U}(x_0)$ 分别表示点 x_0 的某邻域和点 x_0 的某去心邻域.

二、函数概念

在自然界中，往往同时存在多个不断变化的量，即变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律. 例如，圆的面积 A 是随着半径 r 的变化而变化的，其变化规律是 $A=\pi r^2$，当半径 r 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个值时，面积 A 有相应的值与之对应. 函数即是描述这种联系的一个法则.

定义 1　设 x,y 为两个变量，D 为给定数集，若对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照某个法则 f，总有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**.

对 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记作 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**.

当自变量取遍定义域 D 的所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**.

函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

在确定函数的定义域时，如果讨论的是实际问题，应根据问题的实际意义具体确定，如圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$. 如果讨论的是纯数学问题，则取使函数表达式有意义的一切实数所组成的集合作为函数的定义域，这种定义域也称为函数的**自然定义域**.

例 1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解　要使数学表达式有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}4-x^2 \geqslant 0, \\ x-1>0,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}|x| \leqslant 2, \\ x>1.\end{cases}$$

由此有 $1<x \leqslant 2$，因此函数的定义域为 $(1,2]$.

对函数 $y=f(x)(x \in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中，点集

$$C=\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的**图形**，如图 1－4.

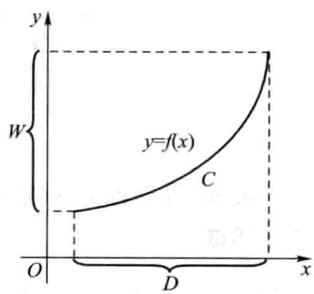


图 1－4

中学数学中已经讨论过许多函数，其中幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为**基本初等函数**，它们的图形及主要性质可参见附录 Ⅰ.

幂函数　　$y=x^{\mu}$（μ 是常数）；

指数函数　　$y=a^x$（a 是常数，$a>0, a \neq 1$）；

对数函数　　$y=\log_a x$（a 是常数，$a>0, a \neq 1$）；

三角函数　　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数　　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

下面介绍几种常见的函数表达形式：

（1）**显函数**　函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示. 例如 $y=e^x+x^2$.

（2）**隐函数**　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程

$$F(x,y)=0$$①

来确定. 例如 $\sin y=\ln(x+y)$.

（3）**分段函数**　函数在定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.

下面给出一些常用的分段函数.

例 2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,如图 1-5.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,如图 1-6.

例 4　取整函数

$$y=[x],$$

其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

例如,$[2]=2,[\pi]=3,[-2.4]=-3$.

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\mathbb{Z}$,如图 1-7.

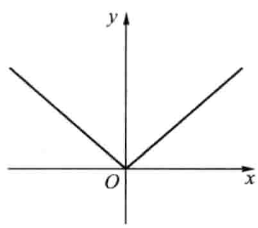


图 1-5

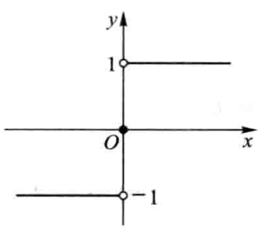


图 1-6

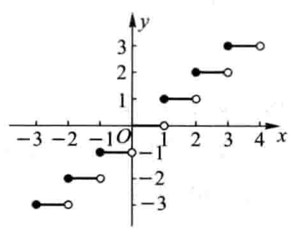


图 1-7

三、函数的基本性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 若存在某个正数 M,使得对任意

① $F(x,y)$表示变量 x 和 y 的一个算式.

$x \in X$,都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 正数 M 称为函数 $f(x)$ 的一个**界**.

若具有上述性质的正数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为无论 x 取任何实数,不等式 $|\cos x| \leqslant 1$ 都成立;函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使得对 $(0,1)$ 内的任意 x 都有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 成立,但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内又是有界的,此时可取 $M = 1$.

从几何上看,有界函数的图形界于直线 $y = \pm M$ 之间.

如果存在常数 M_1 和 M_2,使得对任意 $x \in X$,都有 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$,则 $f(x)$ 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和一个**上界**.

当且仅当函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界时,$f(x)$ 在 X 上有界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2,且 $x_1 < x_2$,若恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加**的;若恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的,在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的. 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,必有 $-x \in D$),对任意 $x \in D$,若恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 是奇函数,函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数,而函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数,又非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在不为零的常数 T,使得对一切 $x\in D$,都有 $(x\pm T)\in D$,且恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

通常,周期函数的周期是指**最小正周期**.例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

并非每个周期函数都有最小正周期.

根据周期函数的特点,只要作出函数在一个周期 T 内的图形,就可通过图形的平移得到整个函数的图形.

四、反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了因变量与自变量之间的关系,但这种关系是相对的,如圆面积公式 $A=\pi r^2$,这里半径 r 是自变量,面积 A 是因变量;若将面积 A 作为自变量,则半径 r 是 A 的函数,即 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.若对于值域 W 中的任意数值 y,都有 D 中惟一的 x,使得 $f(x)=y$,则这个对应法则定义了变量 x 是 y 的一个新函数,称该函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in W.$$

反函数的定义域为 W,值域为 D.相对于反函数,$y=f(x)$ 称为**直接函数**.

习惯上,常用字母 x 表示自变量,字母 y 表示因变量,所以常把反函数写为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in W$.

例如,函数 $y=\sqrt{x+1}\,(x\geqslant -1)$ 的反函数为 $x=y^2-1\,(y\geqslant 0)$,习惯上写为 $y=x^2-1\,(x\geqslant 0)$.

函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.例如,指数函数 $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ 与它的反函数——对数函数 $y=\log_a x\ (x>0)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-8).

并不是每个函数都存在反函数.例如,由函数 $y=x^2\,(-\infty<x<+\infty)$,可得

到 $x=\pm\sqrt{y}(y\geqslant 0)$，此时，对每个 $y>0$，x 有两个不同的对应值 $\pm\sqrt{y}$，因此按反函数的定义，函数 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$ 不存在反函数．但如果考虑函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$，可解得 $x=\sqrt{y}(y\geqslant 0)$，这时对每个 $y\geqslant 0$，x 有惟一确定的值 $\sqrt{y}$ 与之对应，因此函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 存在反函数 $y=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$．注意到，对于函数 $y=x^2$，当 $x\geqslant 0$ 时是单调（增加）的，而当 $-\infty<x<+\infty$ 时不是单调的（图 1－9）．

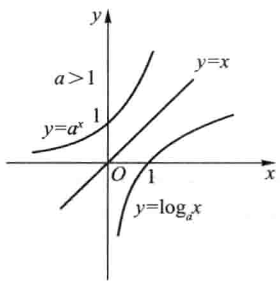


图 1－8

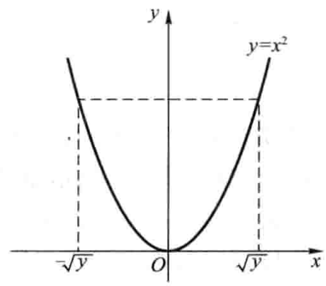


图 1－9

一般地，**若函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 内有定义且单调（增加或减少），则它必存在反函数**．

事实上，若设函数 $y=f(x)(x\in I)$ 的值域为 W，则由 $f(x)$ 在区间 I 上的单调性可知，对任意 $y\in W$，在 I 内只有惟一的 x 值，满足 $f(x)=y$，从而说明函数 $y=f(x)(x\in I)$ 必存在反函数．

五、复合函数

在许多实际问题中，函数的自变量与因变量是通过另外一些变量才建立起它们之间的对应关系的．例如，高度为定值 h 的圆柱体的体积 V 与其底面圆半径 r 的关系，就是通过其底面圆面积 S 建立起来的对应关系，即由

$$V=S\cdot h,\quad S=\pi r^2,$$

可得 $V=\pi r^2 h$．

定义 3　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，u 称为**中间变量**．

例如，绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 可看作是由函数 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2$ 复合而成的．

应注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数．如函数 $y=\arcsin u$，其定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$，函数 $u=2+x^2$，其值域为 $u\geqslant 2$，所以这两个函数不能复合成复合函数．